This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

3 3433 06642078 1

VEO
TEDESCO

TRAITÉ THÉORIQUE ET PRATIQUE

DE LA

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

APPLIQUÉE

AU BÉTON

ET

AU CIMENT ARMÉ

TRAITÉ THÉORIQUE ET PRATIQUE
DE LA
RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX
APPLIQUÉE
AU BÉTON
ET
AU CIMENT ARMÉ

PAR
N. DE TEDESCO
RÉDACTEUR EN CHEF DU JOURNAL " LE CIMENT "
ET
A. MAUREL
INGÉNIEUR-CONSTRUCTEUR

PUBLIC LIBRARY

PARIS
LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE CH. BÉRANGER, ÉDITEUR
Successeur de BAUDRY et Cie
15, RUE DES SAINTS PÈRES, 15
MÊME MAISON A LIÈGE, RUE DE LA RÉGENCE, 21
1904
Tous droits réservés

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
305209
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R 1904 L

PRÉFACE

Ce livre présente des études préliminaires complètes de nature à donner aux ingénieurs la connaissance approfondie de tout ce que l'on sait actuellement sur la théorie du ciment armé.

Les méthodes de calcul les plus célèbres ont été exposées avec assez d'ampleur pour que le lecteur puisse les appliquer avec sécurité; de nombreuses applications numériques lui permettent de se familiariser avec les notations et les unités relatives à chaque méthode principale. Pouvant ainsi suivre les théories les plus diverses il se rendra compte de la grande similitude des résultats obtenus par les formules les plus dissemblables, qu'elles émanent de théoriciens ou de praticiens.

Le premier livre rappelle les propriétés physiques, chimiques et mécaniques du ciment Portland dans un chapitre, des mortiers et bétons de ciment dans un autre. Dans un troisième chapitre ont été résumées les connaissances sur le calcul des ouvrages en béton non armé.

Le second livre est consacré aux principales méthodes de calcul proposées, parmi lesquelles, en dernier lieu, celle de M. Considère, déduite de ses expériences à jamais mémorables, et qui est et restera la base de tout traité sur le ciment armé.

Dans le livre III les auteurs, suivant les indications magistrales de M. Considère, ébauchent un premier essai de traité de calcul des ouvrages en ciment armé, soumis

à la compression, à l'extension, à la flexion, au cisaillement, ou à des efforts obliques, et donnent la théorie générale du calcul des déformations. En ce qui concerne la flexion, le chapitre le plus développé, les formules de M. Considère ont été transformées de manière à pouvoir être appliquées aisément à la vérification de la stabilité des ouvrages déjà projetés — et ce aussi bien dans l'hypothèse à laquelle se sont ralliés un grand nombre d'ingénieurs pour le calcul du moment de résistance du ciment armé (l'insuffisance de résistance du béton tendu), que dans l'hypothèse contraire (celle où la tension du béton est suffisante pour modifier complètement les conditions de la stabilité).

Le quatrième livre est une œuvre encore plus personnelle. Il est le résultat de l'application des formules présentées dans le livre précédent, aux divers cas de pièces fléchies, dalles, poutres, éléments de planchers nervurés, dans lesquelles on a fait varier dans les limites les plus étendues les divers paramètres entrant dans ces formules et notamment les pourcentages des armatures et le coefficient de sécurité. Le lecteur suivra avec fruit ces exemples de calcul, qui d'une part constitueront d'excellents exercices, de l'autre lui feront bien comprendre l'influence de tel ou de tel paramètre variable. Cette accumulation de chiffres, pénible seulement pour les auteurs, a eu pour résultat principal de conduire à des expressions très simples du moment de résistance à la flexion, de la forme KSh ou $K'sh$, suivant que c'est le béton ou l'armature qui se trouve le premier en défaut, quand les charges croissent jusqu'à rupture. Les coefficients K et K' donnés ne répondent naturellement qu'à des valeurs déterminées des paramètres, inspirées par une longue expérience de la construction des ouvrages en ciment armé ; mais il est indiqué comment on peut modifier ces coefficients pour des conditions sensiblement

différentes, et ce dans les deux hypothèses opposées, mentionnées plus haut, relatives à la résistance à l'extension du béton.

Le dernier chapitre de ce livre, intitulé « Conclusions », résume les formules simplifiées obtenues dans les chapitres précédents et de la comparaison des résultats obtenus dans les deux hypothèses ressort alors d'une façon excessivement claire combien il est facile de concilier ceux qui ont confiance dans la résistance à l'extension du béton et leurs adversaires.

Le principal avantage des formules simplifiées est de s'appliquer à la détermination des dimensions d'une pièce en ciment armé, avant de la soumettre à la vérification des formules générales du livre III. On verra que les résultats fournis par ces formules simplifiées s'écartent si peu de ceux des formules exactes, que pratiquement il est inutile de recourir à cette vérification.

A noter cependant un autre avantage : c'est d'enseigner la manière d'obtenir des formules analogues à $M = Ksh$ avec celles des autres théoriciens ou praticiens et de permettre ainsi de saisir les différences qu'elles présentent. Il est ainsi démontré que, quelles que soient les hypothèses admises, le moment de résistance d'une pièce fléchie en ciment armé est fonction de la section de béton ou d'armature et de la hauteur de la pièce, et même, à peu de chose près, proportionnel à ces deux facteurs. S'il en est ainsi, ces coefficients pourraient être déterminés expérimentalement et contradictoirement une fois pour toutes par les soins des commissions instituées à cet effet.

Beaucoup de lecteurs s'étonneront des valeurs attribuées à certains paramètres et notamment au rapport n du coefficient d'élasticité du métal à celui du béton comprimé. Il ne faut pas oublier que tous les calculs sont basés précisément sur la considération des taux de travail limites de rupture pour les diverses matières et que le

coefficient d'élasticité du béton dans ces conditions n'est pas éloigné de 100 000 kilogrammes.

On a admis en outre les taux de travail limites normaux suivants :

pour le béton comprimé . . .	$47^k,50$	par cmq.
» » tendu	20 ,00	par cmq.
» l'acier tendu	13 ,00	par mmq.

On remarquera que le chiffre de $47_k,50$ ne s'applique qu'aux fibres extrêmes les plus comprimées, alors que la plupart des praticiens admettent 25 kilogrammes pour le travail moyen. En outre ce chiffre correspond à un certain coefficient de sécurité ; s'il est trouvé trop fort, il suffit de recourir à un coefficient de sécurité plus élevé.

En ce qui concerne la tension du béton, il y avait lieu d'admettre un chiffre élevé pour mieux saisir l'influence de ce facteur.

Pour les armatures tendues, on répondra comme plus haut, que du moment que l'on peut faire varier le coefficient de sécurité, le taux de travail choisi n'a pas grande importance. D'autre part il y a lieu de se rappeler que l'on a en réserve la compression due au retrait du béton.

Il en est autrement des armatures comprimées, mais l'on verra que l'usage de ces dernières paraît peu efficace, et en tout cas peu économique dans la plupart des cas ; d'autre part le taux de travail des barres comprimées est généralement inférieur à celui des barres tendues.

Enfin l'ouvrage contient dans une annexe une nouvelle série de chapitres, parmi lesquels :

1° Une deuxième solution relative aux planchers nervurés ;

2° Une discussion générale relative aux variations des paramètres ;

3° Un recueil raisonné d'essais à la rupture ;

4° Un exposé succinct du béton fretté.

TRAITÉ THÉORIQUE ET PRATIQUE

DE LA

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

APPLIQUÉE

AU BÉTON ET AU CIMENT ARMÉ

LIVRE I

—

CHAPITRE PREMIER

—

LE CIMENT — SES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

1. Définition. — Le ciment Portland est le produit de la mouture de roches scarifiées obtenues au moyen de la cuisson, jusqu'à ramollissement (1600°), d'un mélange intime d'environ 80 % de carbonate de chaux et 20 % d'argile (silice, alumine et oxyde de fer), rigoureusement dosé, chimiquement et physiquement homogène dans toutes ses parties [1].

Le troisième Congrès International des essais des matériaux, tenu à Budapest, a adopté, sur la proposition du Docteur Schott la définition officielle suivante :

Le ciment est un produit défini, obtenu par la calcination d'un mélange intime de matières calcaires avec des matières argileuses ou avec des silicates. Le mélange doit être calciné jusqu'au commencement de fusion. Des ciments fabriqués d'une autre manière ou des mélanges de matières quelconques avec du ciment Portland ne doivent pas être vendus comme du ciment Portland.

[1] Guillain et Vetillart. — Cahiers des charges des ports de Boulogne et de Calais.

2. Réactions chimiques pendant la cuisson. — A la température de 700° à 800°, l'acide carbonique est expulsé et la chaux réagit sur la silice, l'alumine et l'oxyde de fer. Il se forme du silicate, de l'aluminate et du ferrite de chaux, ces deux derniers sels étant d'abord en quantité prépondérante ; à mesure que la cuisson s'élève, la silice s'empare d'une plus grande quantité de chaux au détriment de l'aluminate et du ferrite de chaux, et finalement, si la quantité de chaux est suffisante, il se forme du silicate tricalcique, de l'aluminate tricalcique et très peu de ferrite de chaux; une petite quantité de silice, d'alumine et d'oxyde de fer et de chaux, reste à l'état de silicate multiple qui sert de fondant et constitue une matière inerte (1).

3. Composition chimique. — L'analyse montre que la composition chimique des ciments Portland oscille dans des limites relativement étroites. On s'en rendra compte en comparant les résultats suivants obtenus.

Colonne I, par M. E. Candlot, sur les ciments français.

Colonne II, par MM. F.-W. Büsing et C. Schumann (2) sur les ciments allemands.

I. — E. Candlot.			II. — Büsing et C. Schumann		
Chaux . . .	58,12	67,31 %	Kalk	58,22	65,59 %
Silice. . . .	20,30	26,10 »	Kieseisäure . .	19,80	26,45 »
Alumine. . .	5,20	10,60 »	Thonerde. . .	4,16	9,45 »
Oxyde de fer .	2,10	5,30 »	Eisenoxyd . .	2,19	4,47 »
Magnésie . .	0,33	2,30 »	Magnesia . . .	traces	2,89 »
Acide sulfurique. . . .	0,26	1,78 »	Schwefelsäure .	0,19	2,19 »
			Alkalien . . .	0,19	2,83 »
			Glühverlust . .	0,26	2,67 »
»	»	»	Unaufgeschlossener Rückstand . . .	0,12	1,38 »

4. Indice et module d'hydraulicité. — Le devis et cahier des charges pour la fourniture du ciment Portland au service des

(1) Ciments et chaux hydrauliques, E. Candlot.

(2) *Der Portland Cement und seine Anwendungen in Bauwesen*, par F.-W Büsing et C. Schumann.

Ponts et Chaussées considère comme suspect tout ciment pour lequel le rapport $\frac{\text{silice} + \text{alumine}}{\text{chaux}}$ n'est pas au moins égal à 0,44. Ce rapport a reçu le nom d'*indice d'hydraulicité*. On nomme *module* ou *coefficient d'hydraulicité* le rapport inverse : $\frac{\text{chaux}}{\text{silice} + \text{alumine} + \text{sesquioxyde de fer}}$.

D'après le Docteur W. Michaelis *Junior* le module d'hydraulicité ainsi défini diffère très peu de 2 dans les ciments de première qualité [1].

N.-B. — Le devis et cahier des charges sus-mentionné refuse les ciments dont l'analyse chimique accuse plus de 1 °/₀ d'acide sulfurique ou décèle des quantités dosables de sulfures.

5. Conservation du ciment. — Les ciments se vendent en sacs de 50 kilos de contenance. Emmagasinés sous des abris convenables, bien clos, ils peuvent être conservés ainsi sans inconvénient durant des mois ; la résistance du ciment s'améliore même par suite d'une augmentation de finesse des grains et de l'éventement de la chaux qu'il contient; seule la vitesse de prise diminue.

A défaut d'abris fermés, on conserve très fréquemment le ciment sur les chantiers en le recouvrant d'une double bâche. On peut le garder ainsi sans inconvénient pendant un mois. Exposé trop longtemps à l'air humide, le ciment se ramasse en grumeaux, perd de ses qualités et peut devenir tout à fait inutilisable.

6. Structure. — Le ciment Portland est une poudre impalpable (au moins en ce qui concerne 70 ou 75 °/₀ de la masse), de couleur grise avec un reflet tirant sur le vert. Le microscope permet de découvrir qu'il est formé de lamelles anguleuses et brillantes, qui sont incolores en couches minces et paraissent vertes et même violettes en fortes épaisseurs (Büsing et Schumann).

7. Poids spécifique. Densité apparente. — Le poids spécifique du ciment frais oscille entre 3,03 et 3,25 ; il diminue avec l'âge.

[1] Voir *Le Ciment* de Septembre 1900.

M. E. Candlot cite un ciment dont le poids spécifique était de 3,13 immédiatement après la mouture et de 3,058 seulement 6 mois après, en sac. Le volume réel d'un kilogramme est donc d'environ 325 centimètres cubes.

Le ciment en poudre se tasse facilement. Par suite son poids spécifique apparent variera avec la capacité de la mesure employée, $1^{kg},2$ pour un litre, 130 à 140 kilos pour un hectolitre. On peut admettre qne 1 kilogramme de ciment en poudre mesure 0^{l}, 83 et qu'un mètre cube de ciment gâché durci pèse 2700 à 3000 kilogrammes.

8. Finesse de mouture. — Le degré de finesse du ciment est un des facteurs importants de sa qualité. En grains trop grossiers, il ne s'humecte que lentement, quelquefois même seulement après la prise ; il est par suite moins profitable ; *il rend moins.* En poudre trop fine il forme une pâte que l'on a généralement assez de peine à mélanger au sable et au gravier d'après les procédés usuels.

Les ciments de bonne fabrication donnent ordinairement un refus de 25 à 30 % au tamis de 5.000 mailles, de 4 à 5 % à celui de 900 et nul au tamis de 324 mailles au centimètre carré.

9. Variations de volume. — Le ciment ne change pas sensible-de volume pendant la prise. Par contre, si on le laisse durcir à l'air, il se contracte ; si le durcissement s'effectue dans l'eau, il se dilate un peu, mais ces variations sont très faibles dans un cas comme dans l'autre. Le retrait observé dans le premier cas n'est réellement appréciable que lorsqu'on a gâché le ciment avec un excès d'eau, ou lorsque l'on a employé un sable trop fin.

Le ciment est très hygroscopique. Meier a observé à l'air des contractions de 0.2 % et dans l'eau des dilatations de 0,1 %. M. Schumann donne les chiffres suivants comme moyenne d'une série d'observations :

Durée de l'immersion de l'eau en semaines	1	4	13	26	39	82
Pourcentage de dilatation . .	0,048	0,082	0,104	0,125	0,139	0,146

Ces dilatations ne présentent pas d'inconvénients, quand elles

sont lentes ; rapides, elles produisent des fissures dans la masse ; tel est le cas de blocs exposés à des alternatives de pluie et de soleil. La gelée agrandit généralement ces fissures et peut amener la désagrégation de la masse. Il ne convient donc pas de faire usage du ciment pur pour la fabrication de pièces qui présentent un volume de quelque importance et qui peuvent être soumises à des alternatives d'humidité et de sécheresse.

Le faïençage qui se produit souvent dans les dallages résulte de ces alternatives. Comme il a été dit, les mortiers y sont moins sujets que le ciment pur ; on évite complètement ce phénomène en recouvrant la surface des ouvrages de sable bien mouillé, pendant quelques jours après l'achèvement du dallage.

10. Dilatation. — Comme les pierres, comme les métaux, le ciment se dilate sous l'effet d'une élévation de température.

Les premières expériences ayant pour but de déterminer le coefficient de dilatation des ciments Portland, de leurs mortiers et de leurs bétons, ont été faites au Hâvre par M. Bouniceau, inspecteur général des Ponts et Chaussées. Elles ont été relatées dans les Annales des Ponts et Chaussées (1er semestre 1883) ; elles ont donné :

0,0000107	pour le ciment Portland gâché pur.	moyenne 0.000013
0,00001118	pour le mortier de sable et de ciment Portland	
0.0000143	pour le beton de galets et de mortier de ciment Portland.	

Il est généralement admis que le ciment a à peu près le même coefficient de dilatation que le fer entre — 5° et + 25° ; il est probable qu'il en est de même pour des températures plus élevées.

La dilatation du ciment est la principale cause des fissures qui se produisent parfois dans les dallages ; on parvient à les éviter en divisant les surfaces de dallage en parties de dimensions restreintes.

11. Perméabilité. — Le ciment est poreux ; c'est ce qui explique d'ailleurs sa faible conductibilité thermique. Il est perméable, mais faiblement sous des pressions ne dépassant pas quel-

ques mètres d'eau ; il devient d'ailleurs d'une étanchéité absolue à la suite d'un colmatage artificiel ; immersion dans une eau chargée de carbonate de chaux. Ce colmatage se fait naturellement dans les conduites en ciment sous l'effet du passage des eaux.

12. Conductibilité électrique. — Le ciment peut être classé parmi les corps mauvais conducteurs de l'électricité.

Le système le plus communément employé à l'étranger pour isoler les rails des tramways électriques, consiste à les faire reposer sur des massifs en béton. Il résulte d'expériences faites par le Dr Lindeck à l'Institut de physique de Charlottenbourg que la résistance augmente très rapidement avec la quantité de sable entrant dans sa composition, mais qu'elle diminue considérablement dès que les mortiers contiennent la moindre trace d'humidité. Il convient par suite de protéger le béton par une couche d'asphalte.

13. Prise et durcissement. — Le ciment en poudre gâché avec e l'eau se transforme rapidement en une pâte très ferme, et, avec le temps se transforme en un corps très dur, analogue aux pierres naturelles. Le premier phénomène constitue la *prise* ; le second est celui que l'on nomme *durcissement*.

La prise est produite surtout par l'hydratation ou la cristallisation de l'aluminate de chaux ; elle est déclarée faite quand la pâte peut résister à une forte pression du doigt ou classiquement quand elle peut porter l'aiguille de Vicat de *un* millimètre carré de section et du poids de $0^k,300$ (soit 30 kilogrammes par centimètre carré). Du moment que la prise est le résultat d'une cristallisation, l'on saisit tout l'intérêt qu'il y a à ne pas laisser troubler ce phénomène par des mouvements, des chocs ou des évaporations trop rapides de l'eau de cristallisation. D'où les précautions à prendre pour la rigidité absolue des coffrages, afin de les soustraire à des vibrations et pour abriter les ouvrages contre l'ardeur du soleil.

La prise du ciment Portland varie entre 15 minutes et 6 heures. On peut considérer comme ciments à *prise lente* ceux qui font

prise au bout de 2 heures ; on cherche en général à n'obtenir la prise qu'au bout de 3 à 4 heures. (1)

Les ciments frais font prise plus rapidement que les ciments vieux. Par des temps chauds et secs la prise est plus rapide que par un temps froid et humide ; il est donc indispensable, quand on veut déterminer la durée de prise d'un ciment, de veiller à ce que la température ambiante et celle de l'eau soient comprises entre 12 et 18° (2).

L'emploi d'eau chaude pour le gâchage, précipite la prise ; c'est un des procédés auxquels on a recours dans des cas particuliers, tels que l'aveuglement de sources.

Une addition d'eau restreinte, active davantage la prise qu'une addition trop généreuse.

Certaines substances, telles que les alcalis, potasse, soude, carbonate de soude, précipitent notablement la prise, tandis que les sulfates et le chlorure de calcium la ralentissent. C'est ce qui explique la lenteur de prise du ciment gâché à l'eau de mer ; le chlorure de magnésium donne naissance à des chlorures de calcium (3).

M. Candlot fait remarquer que l'on accorde aujourd'hui beaucoup moins d'importance qu'autrefois à la durée de la prise, laquelle, comme il a été dit, est un facteur assez variable avec les circonstances. Le fabricant peut d'ailleurs augmenter ou diminuer la durée de la prise en faisant varier dans le mélange les proportions d'alumine ou celles de la silice, ou en scarifiant plus ou moins le mélange des roches employées.

14. Élévation de température. *Influence de la température et du chlorure de calcium* — Pendant le phénomène de la prise, on observe une élévation notable de température ; quelques auteurs accusent une surélévation minimum de 18° pour des ciments à prise rapide. M. Hertzog (4) a même observé des augmentations de 16° à 32° sur des cubes de 0m,10 à 0m,20 de côté.

(1) Voir *Le Ciment*, février 1897.
(2) E. Candlot.
(3) Büsing et Schumann, p. 15.
(4) *Wagner's Jahresbericht der Chem. Technologie*, 1882, p. 647.

Le mortier de ciment, même lorsqu'il prend assez vite, n'arrive à présenter une dureté notable qu'après 24 heures ; au bout de 2 jours, il est déjà très dur ; à l'âge de 7 jours il a acquis les 2/3 et à celui de 28 jours les 4/5 de sa résistance finale. A partir de 6 à 8 mois sa résistance n'augmente plus que très lentement.

Le durcissement paraît résulter de l'hydratation du silicate de chaux et de la formation d'hydrate de chaux cristallisé.

La quantité d'eau nécessaire à l'hydratation totale est d'environ 20 à 25 % du poids du ciment.

Un abaissement de température retarde le durcissement du ciment ; une élévation jusqu'à 100° l'accélère ; de 100 à 300° la résistance acquise demeure stationnaire, au-delà elle diminue. Au rouge vif, 1000°, le ciment, d'après quelques auteurs devient très friable, mais les diverses expériences faites dans le but de déterminer le degré de résistance au feu des bétons, ont montré que leur résistance n'est pas compromise par les plus hautes températures.

On a dit plus haut que le froid retardait la prise ; la gelée l'arrête complètement, mais le phénomène reprend son cours, dès que la température se relève suffisamment. M. Descubes, Ingénieur en chef à la Compagnie des chemins de fer de l'Est, a employé avec succès de l'eau tiède contenant 1/12 de kilogramme de carbonate de soude anhydre par litre, pour maçonner par des températures de — 10° et de — 15° (1). Cette addition ne majore le prix de revient du blocage que de 2 fr. environ le mètre cube. Mais quelque bon qu'ait été le résultat, il ne convient de recourir à de tels procédés que tout à fait exceptionnellement.

M. Candlot a étudié de trés près l'influence du chlorure de calcium et du sulfate de chaux sur la prise et le durcissement des mortiers. Il a trouvé que le ciment Portland, gâché avec une solution contenant quelques grammes par litre de chlorure de calcium, fait prise plus lentement que s'il a été gâché à l'eau pure. Quand la solution de chlorure est concentrée (100 à 400 grammes par litre), la prise est au contraire très rapide. Cette propriété est utilisée dans les scellements.

(1) *Le Ciment*. Septembre 1901.

Voici le tableau des durées de prise de ciments purs pour diverses teneurs de chlorure de calcium, observées par M. Candlot.

CaCl en grammes par litre	Durée de prise en heures du ciment pur			
	N° 1	N° 2	N° 3	N° 4
2	0h 5	1h50	8h »	1h34
5	0 8	10 »	12 »	2 »
10	8 18	10 »	14 »	5 5
20	1 »	12 »	10 30	8 8
40	4 35	8 »	6 30	8 35
60	3 20	6 »	4 »	6 »
100	0 30	0 20	0 3	3 3
200	0 30	0 90	0 5	0 25
300	0 20	0 80	0 3	0 50

15. Rebattage. — Quand la prise a commencé, la pâte devient dure et peu malléable. Si on la retravaille (*rebattage*), on arrête la prise et le produit ainsi obtenu durcit lentement et paraît être de qualité sensiblement inférieure à celle qui résulte d'un gâchage normal du ciment.

Il ne faudrait pas cependant être intraitable à ce sujet, si l'on s'en rapporte aux conclusions de M. l'Ingénieur en chef Alexandre, déduites d'expériences ayant duré plusieurs années.

« L'addition d'une certaine quantité d'eau, pour ramener le mortier rebattu à la consistance normale, augmente la résistance finale; il y a un très sérieux danger à rebattre *sans addition d'eau*, car on constitue dans ce cas un mortier sec, poreux, qui résiste moins bien aux attaques de la mer.

« En somme le rabattage des mortiers, avec addition d'eau, n'a pas à beaucoup près les inconvénients qu'on est tenté de lui attribuer tout d'abord, et il y a lieu de s'en féliciter, car les maçons pratiquent cette opération couramment sur les chantiers privés et même sur les chantiers des travaux publics dès que la surveillance cesse d'être vigilante. »

Les expériences personnelles de M. E. Candlot (au livre duquel cette note est empruntée), faites sur des mortiers conservés dans l'eau douce, dans l'eau de mer et à l'air, confirment ces conclu-

sions en ce qui concerne la résistance à la traction et à la compression.

16. Action chimique de divers corps, d'après F. W. Büsing et C. Schumann. — Le ciment de Portland en poudre est assez sensible aux actions chimiques. De grandes quantités d'eau en mouvement suffisent pour le décomposer. Les acides énergiques le décomposent complètement. L'humidité et l'acide carbonique de l'air ont une influence sur le ciment. Quand l'humidité est absorbée, l'acide carbonique pénètre facilement dans la masse. Voici ce qui se passe dans les dépôts de ciment : L'humidité et l'acide carbonique se fixant à la surface, il se forme une sorte de croûte mince qui retarde l'action de ces agents. C'est ce qui explique la prise plus lente des ciments emmagasinés. Par la suite une plus grande finesse de mouture et une plus grande invariabilité de volume résultent de la réduction des grains plus gros, de sorte qu'avec un bon emmagasinage, on améliore la qualité du ciment. Mais par un dépôt trop long à l'air humide, le ciment se forme en grumeaux, fait prise en partie et devient finalement inutilisable. Il peut être conservé très longtemps en barils, sans perdre aucunement de l'intensité de sa prise. Même ensaché et déposé dans des locaux à l'abri de l'humidité, il peut être conservé des mois durant.

Durci, le ciment est bien moins sensible aux agents chimiques. Lorsque la transformation en mortier a nécessité très peu d'eau, ce dernier est bien compact et ses pores se ferment de plus en plus de sorte qu'il devient au bout de peu de temps impénétrable à l'eau qui n'a plus d'action sur lui. Cette grande résistance du ciment à l'eau est utilisée dans la construction pour l'établissement de mortiers étanches. On a observé par contre que les eaux courantes contenant de l'acide carbonique en liberté dissolvent peu à peu le ciment (ne serait-ce qu'au bout de quelques années), de sorte qu'il y a lieu de renouveler de temps en temps les enduits exposés à de telles eaux. Dans ce cas il convient de faire usage de solutions fluatées.

Quand le durcissement se fait à l'air, une grande partie de la chaux contenue dans le ciment est transformée en carbonate de chaux par l'acide carbonique de l'air, condition favorable à la résistance.

Le ciment durci ne résiste pas *aux acides énergiques*, qui agissant sur la chaux forment des sels de chaux solubles, chlorures, chlorates, acétates ; tandis que les acides donnant lieu à des sels insolubles ou difficilement solubles, tels que l'acide sulfurique, sulfureux, fluorhydrique, sont beaucoup moins à craindre. Dans ce cas il se forme une sorte de vernis qui protège le ciment contre l'action ultérieure de ces acides.

Les alcalis purs (potasse, soude, ammoniaque) sont sans influence sur le ciment durci.

Les sels en dissolution ont des actions très diverses.

Les carbonates alcalins ont une influence favorable sur le durcissement du ciment Portland ; ils forment des carbonates calcaires, par suite de la mise en liberté des alcalis, et ces carbonates concourent à la formation de l'agglomérant et à sa résistance.

Les sels haloïdes alcalins (chlorures de sodium, de potassium et d'ammonium), n'ont pas d'action nuisible sur le ciment durci.

Parmi *les sels présents dans l'eau de mer*, le sulfate de chaux et le chlorure de magnésium sont ceux qui ont l'influence la plus mauvaise. Le phénomène de durcissement du ciment Portland a pour effet la mise en liberté d'hydrate de chaux, et si ce dernier vient en contact avec les sels ci-dessus, il se forme du chlorure de calcium et du sulfate de chaux, solubles dans l'eau, et il se précipite de l'hydrate de magnésie insoluble. M. Candlot qui a le premier expliqué nettement ce phénomène a démontré que la présence du sulfate de chaux dans le ciment Portland en durcissement a pour résultat une double combinaison de l'acide sulfurique avec l'alumine et la chaux, sous forme de sulfo-aluminate de chaux ; ce sel cristallise en présence d'une grande quantité d'eau et subit une forte augmentation de volume. Si donc il y a formation abondante de ce sel, il peut en résulter un fendillement général et la désagrégation.

Ces deux phénomènes, enlèvement de l'hydrate de chaux et formation de sulfo-aluminate de chaux, en suivant leur cours, amoindriraient d'autant la résistance du ciment et les constructions à la mer seraient destinées à périr avec le temps. S'il n'en est pas ainsi, on le doit à la circonstance suivante : l'action de l'eau de mer cesse de se prolonger par suite de la texture exté-

rieure très compacte du ciment de Portland, (et de plus en plus compacte avec le temps) qui s'oppose à une action ultérieure. Et en effet, la pratique a démontré que des constructions en ciment de Portland bien établies (avec des mortiers assez gras et compacts, peuvent résister parfaitement de longues années à l'action de l'eau de mer.

Le goudron et les huiles minérales n'ont aucune action sur le ciment, comme l'ont montré les réservoirs construits en ciment de Portland dans les usines à gaz et à produits goudronneux.

Les huiles grasses et le tannin (même la bière sûrie) sont nuisibles au ciment, par suite de la production de savons calcaires avec la chaux du ciment, qui ramollissent ce dernier. On a observé cette action sur des mortiers de 3 de sable au plus pour 1 de ciment; avec les mortiers 1 : 1 ayant été exposés quelque temps à l'air, de manière à faciliter la formation de carbonate de chaux à la surface, cet effet est négligeable.

A moins qu'elles ne contiennent une forte proportion d'acides, *les eaux d'égouts* n'ont aucune influence nuisible sur le ciment. Cela provient de ce que, d'une part les actions des divers corps entraînés, se neutralisent partiellement, d'autre part, de ce que les corps gras ou autres matières organiques en suspension forment un dépôt contre les parois des égoûts qui les protège contre l'action d'acides dilués.

Si des canalisations donnent passage à des *eaux thermales sulfureuses*, elles doivent être l'objet d'une grande surveillance. Les tuyaux en ciment armé de faible épaisseur doivent être proscrits pour cet usage.

L'acide carbonique de l'air n'est à craindre qu'en fortes proportions, tel que cela peut se présenter dans des caves profondes où se trouvent des matières sujettes à la fermentation en présence de l'humidité. Un fort enduit est un bon préservatif, mais la fluatation de l'enduit ou du carrelage est encore plus efficace.

Le mortier de ciment n'est pas attaqué par les matières en fermentation comme le démontrent les germoirs de malterie, les cuves à mélasses et à vin. Les cuves à spiritueux et à lessives se comportent également bien, toujours à condition que l'on ait prévu un mortier suffisamment compact. Les acides orga-

niques, lactique, tannique, la bière surie, ont une mauvaise influence.

Quelques métaux se comportent mal avec le ciment; tel le plomb [1] qui, au contact des mortiers hydrauliques se transforme rapidement en oxyde pulvérulent; de là la nécessité de protéger avec des feuilles de papier, par exemple, les conduites de plomb qui traversent une construction en contact avec le ciment. Il en est souvent ainsi du zinc ; on le protège à l'aide d'une couche mince de chaux ou de plâtre.

Le ciment protège très bien le fer tant qu'il n'y a pas à craindre la pénétration de l'eau et de l'air; le mortier doit cependant avoir été confectionné avec de l'eau douce. Si l'on fait usage d'eau de mer, le fer est attaqué très énergiquement. Cette action résulte très probablement de la présence dans l'eau de mer de sulfates de magnésie et de chlorures de magnésium.

17. Coefficient d'élasticité. — D'après Durand-Claye, le coefficient d'élasticité du ciment à la compression mesuré pour des efforts de 14 à 18 kilogrammes par centimètre carré est compris entre $1,79 \times \overline{10}^9$ et $2,30 \times \overline{10}^9$ par mètre carré; elle est donc en moyenne de $2 \times \overline{10}^9$. La charge moyenne de rupture des blocs essayés était de 280 kilogrammes par centimètre carré.

Ce chiffre paraît encore trop élevé, on trouve dans la même note un certain nombre de résistances à l'extension, comprises entre $25^k,6$ et 33 kilogrammes par centimètre carré.

D'autre part, au Congrès International des procédés de construction (séance du 11 septembre 1889), M. Durand-Claye a déclaré que le rapport entre la résistance apparente à la traction calculée d'après des expériences de flexion et la résistance mesurée directement, a une valeur moyenne de 1,84 pour une section donnée d'éprouvette. En supposant que l'on soit ici dans les mêmes conditions, le taux de rupture serait de $\frac{68^k}{1,84}$ [2] $= 37$ kilogrammes par centimètre carré.

[1] Cette assertion semble être démentie par l'expérience des canalisations en ciment armé, enrobant des tôles plombées.

[2] Comme on le verra plus loin (§ **19**), 68^k est le chiffre trouvé par M. Durand-Claye pour la résistance apparente déterminée par flexion.

Il y a là quelque chose d'anormal ; l'auteur le reconnaît en admettant que la limite d'élasticité n'est pas la même dans le cas de tension et dans celui de compression. Il est en effet difficile d'admettre *a priori* l'identité des deux coefficients d'élasticité quand les résistances sont si différentes suivant qu'il s'agit d'un effort de compression ou d'extension. On verra d'ailleurs plus tard que cette hypothèse est inadmissible, (voir *ciment armé*) attendu qu'elle ne permet pas d'expliquer, dans le travail à l'extension, la solidarité du fer et du ciment, quand le métal travaille à raison de 35 kilogrammes par millimètre carré (Expériences de Lausanne du 30 août 1894) (voir aux annexes).

A défaut de résultats expérimentaux sur la limite d'élasticité à l'extension, il est permis de supposer que, comme celle à la compression, elle est comprise entre le 1/6 et le 1/7 de la charge de rupture, soit entre 5 et 7 kilogrammes. On pourra donc admettre que le calcul des pièces fléchies, basé sur les méthodes ordinaires est applicable tant que la résistance à l'extension ne dépasse pas 7 kilogrammes par centimètre carré ; au-delà, et notamment à la rupture, il faudra recourir à d'autres méthodes pour déterminer les déformations. Ces phénomènes seront étudiés plus loin dans un chapitre spécial.

M. Grut a trouvé un coefficient d'élasticité à l'extension de $2{,}58 \times 10^9$ pour un effort de 8 kilogrammes par centimètre carré. Les éprouvettes étaient au dosage de 1 de ciment pour 3 de gros sable ; elles mesuraient $0^m{,}50 \times 0^m{,}50$ en section et $0^m{,}97$ de hauteur; leur âge était de 2 mois.

18. Résistance à la compression et à l'extension. — Les différences dans la constitution des ciments et dans le mode de préparation des éprouvettes d'essai se répercutent sur les résultats obtenus dans les essais; ces derniers ne doivent donc être considérés que comme les limites entre lesquelles la résistance du ciment peut varier.

Quand on emploie un excès d'eau de gâchage cette résistance diminue plus rapidement encore pour la résistance à la compression que pour celle de l'extension.

Pour le même ciment, la résistance *croît avec le temps* au moins

durant les premières années. Le tableau suivant est emprunté à M. E. Candlot.

Nature de l'effort	Résistance par centimètre carré après un durcissement de							
	7 jours	28 jours	3 mois	6 mois	1 an	2 ans	3 ans	4 ans
Tension — Ciment de roches choisies	32k,5	43k,8	45k,9	47k,4	48k,0	50k,9	49k,9	47k,1
Tension — Ciment de fabrication courante . .	28, 5	38, 8	46, 1	48, 7	51, 5	51, 6	49, »	50, 4
Compression	230, »	355, »	460, »	556, »	573, »	613, »	640, »	»

Plusieurs auteurs allemands donnent des chiffres analogues.

D'après M. Quinette de Rochemont, la résistance à l'extension semblerait diminuer au contraire avec le temps, dans les conditions suivantes :

Résistance à la tension durant les 6 premières années .		29k à 30k (1)
»	» entre la 6e et 7e année . . .	12 à 13
»	» après la 7e année.	15 à 19

On peut admettre que la résistance à l'extension est le 1/10 environ de la résistance à la compression.

19. Flexion. — Il n'existe qu'un très petit nombre d'essais de résistance à la flexion des ciments purs. Les chiffres suivants donnant la moyenne de 6 observations faites sur des barres de ciment Portland âgées de 5 à 6 semaines ont été publiés par M. Durand-Claye dans les Annales des Ponts et Chaussées de 1888.

Portées	Dimensions des barres		Moment maximum sous lequel s'est produite la rupture	Flèche	Coefficient d'élasticité	Résistance apparente	Résistance réelle
	largeur	hauteur					
m.	cm.	cm.	kgm.	mm.		K	R
1	3,07	3,04	318	1,73	$2,37 \times 10^9$	68	58

(1) La résistance de 29 à 30 kilogrammes montre que ces ciments n'étaient pas de première qualité ou que les éprouvettes sur lesquelles on a opéré étaient de section ou de forme défectueuse.

M. Durand-Claye suppose que les coefficients d'élasticité à la tension et à la compression sont les mêmes, c'est-à-dire que l'axe neutre passe par le centre de gravité de la section. Un calcul préliminaire, fait dans l'hypothèse que les sections planes restent planes après déformation, lui donne la résistance apparente à l'extension, soit 68 kilogrammes. Ce chiffre est trop fort ; l'auteur le rectifie en supposant qu'à partir d'un certain point, la limite d'élasticité est dépassée dans les fibres les plus tendues et que les allongements cessent de croître proportionnellement aux efforts. Cette hypothèse le conduit à la résistance réelle de 58 kilogrammes.

20. Cisaillement. — Le cisaillement joue un rôle relativement d'autant plus important que les pièces sont plus fortement chargées par rapport à leur longueur.

Des considérations théoriques conduisent à prendre pour la résistance au cisaillement la moyenne géométrique des résistances, à la compression et à l'extension.

$$\text{R cisaillement} = \sqrt{\text{R compression} \times \text{R extension}}.$$

Pratiquement, ce résultat est trop fort. Bauschinger a trouvé expérimentalement les rapports suivants :

	1 semaine	4 semaines	104 à 113 semaines
$\frac{\text{Résistance cisaillement}}{\text{Résistance extension}} =$	1,25 à 1,27	1,24 à 1,25	1,45 à 1,55
$\frac{\text{Résistance cisaillement}}{\text{Résistance compression}} =$	0,15 à 0,16	0,13 à 0,17	0,09 à 0,12

21. Falsification des ciments. — On ajoute parfois aux ciments des matières étrangères, en poudre fine également et de même couleur que lui, mais que l'on se procure à meilleur compte, tel que l'argile en poudre, des résidus de laitiers de hauts-fourneaux, des pouzzolanes, de la chaux ou des calcaires pulvérisés. L'influence de ces additions n'est pas toujours très défavorable ; certains auteurs prétendent que la présence d'une poudre inerte très fine a pour effet de combler tous les vides, d'empêcher la formation de petits noyaux de ciment pur et de réduire par suite exclusivement le rôle du ciment à celui d'une matière agglutinante.

Le ciment se trouve ainsi complètement utilisé et ce sans inconvénient pour la résistance. D'autres pensent qu'il se produit, et tel serait le cas pour les pouzzolanes, certaines réactions dans la prise et le durcissement qui augmentent la résistance finale.

Il n'entre pas dans le cadre actuel de développer les discussions intervenues à ce sujet. D'après un vœu exprimé par l'Association des fabricants allemands, il est désirable qu'un ciment soit composé et vendu dans les conditions précédemment mentionnées et que toute modification dans la composition soit indiquée dans la vente.

22. Vérification de la qualité. — Il est difficile, quand on n'a pas de laboratoire à sa disposition, de vérifier la composition chimique et la pureté des ciments. Il faut alors s'en rapporter à la bonne foi des fabricants et ne s'adresser qu'à des marques de premier ordre, à celles qui, par exemple, font partie de la chambre syndicale des fabricants de ciment Portland, on a ainsi, avec les livraisons en sacs plombés, la garantie que le mélange est à peu près bien dosé et qu'il est exempt de toute addition étrangère. Cela ne suffit pas encore pour que le ciment soit bon ; il peut en effet avoir été mal préparé, mal moulu, ou contenir encore assez de magnésie ou de chaux libre pour permettre un foisonnement de la masse durcie, ayant pour résultat de compromettre sa résistance. De là l'utilité des essais suivants, proposés par M. H. Le Chatelier, dans une note présentée au Congrès de Budapest, 1901, sur les *essais accélérés et simplifiés*.

23. Essais accélérés et simplifiés. *Composition chimique.* — L'analyse d'un ciment peut être faite en huit jours et même moins il n'y a donc pas à chercher à l'accélérer; mais elle ne peut être faite que dans un laboratoire bien outillé et par de bons chimistes ; ce ne peut donc être un essai de chantier. Elle ne présente d'ailleurs pas grand intérêt pour la réception usuelle des ciments sur les travaux : les fournitures successives d'une même usine ne présentent jamais de différences importantes de composition. L'analyse ne devient utile que lorsque l'on se trouve en présence d'anomalies inexpliquables dans la qualité d'un ciment

et que l'on se propose d'en rechercher les causes. Il est beaucoup plus sûr de s'adresser pour de semblables études à un laboratoire proprement dit.

Finesse et densité. — Ces deux essais peuvent être faits en quelques minutes, il n'y a donc pas à chercher à les accélérer, mais on peut se proposer de les simplifier et même d'en supprimer une partie d'une utilité douteuse.

La mesure de la densité apparente n'a plus le même intérêt qu'autrefois, maintenant que l'on sait que cette densité dépend à peu près exclusivement de la finesse : le fabricant peut donc par une mouture moins prolongée des ciments peu cuits s'opposer à une trop grande finesse et par suite à une trop faible densité ; la garantie de bonne cuisson que cet essai est censé donner au consommateur est donc illusoire. Il peut d'ailleurs être remplacé par la détermination de la proportion de l'eau de gâchage dont il va être parlé tout à l'heure.

« L'essai de finesse comprend habituellement la séparation du ciment en quatre grosseurs au moyen des tamis de 300, de 900 et de 4900 mailles au centimètre carré. L'emploi du premier tamis est aujourd'hui sans intérêt parce que avec la fabrication actuelle des ciments il ne reste jamais de résidu sur ce tamis : c'est donc une opération à supprimer. Le tamisage à 900 mailles est intéressant, parce que son résidu est à peu près inerte : c'est donc un essai bon à conserver. J'ai montré en effet autrefois que les grains de 0,1 millimètre n'étaient pas encore complètement hydratés au bout d'un an, et la largeur de la maille du tamis en question est de 0,18 millimètres.

« Il n'y a pas de motifs pour conserver le tamis de 4900 mailles; c'est une erreur de croire qu'il permet de se faire une idée, même approchée, de la proportion de poussière impalpable renfermée dans un produit. La chaux et le ciment Portland donnent en moyenne le même résidu et pourtant les chaux renferment une proportion beaucoup plus grande de poussière impalpable.

« Un procédé très simple permet d'avoir une estimation comparative de ces poussières, si l'on croit utile de s'en préoccuper, c'est la détermination de la proportion d'eau nécessaire pour le gâ-

chage à consistance définie. Cette quantité varie nécessairement dans le même sens que la surface totale des grains, laquelle, pour un poids donné de ciment, est proportionnelle au carré des dimensions linéaires moyennes des grains. Cette quantité d'eau varie, des ciments Portlands aux chaux, du simple au double ; elle peut d'ailleurs être déterminée sans difficulté à 1/20 près de sa valeur. Cette détermination est du reste déjà faite à l'occasion d'autres essais, comme celui de la rapidité de prise ; ce n'est donc qu'une opération de plus à faire. »

En résumé l'essai *accéléré et simplifié de finesse* comprendra :

1° Un tamisage à 900 mailles.

2° Une détermination de la proportion d'eau de gâchage donnant la pâte à consistance normale.

L'essai de densité serait complètement supprimé. Je rappellerai ici que dans des expériences antérieures, j'ai établi l'existence d'une relation entre la densité apparente et la proportion d'eau de gâchage. Le poids P du litre de ciment non tassé peut être exprimé en fonction du poids d'eau p nécessaire pour gâcher 100 grammes par les relations suivantes :

Chaux hydraulique, ciment de laitier, ciment de Vassy

$$P = 2,4 - 54,5\,p$$

ciment artificiel, ciment lent naturel, ciment de grappier

$$P = 1,1 - 14,5\,p.$$

Les poids P et p sont exprimés en kilogrammes.

Rapidité de prise. — Cet essai est aussi rapide qu'on puisse le désirer, il n'y a donc pas à chercher à l'accélérer. Y a-t-il lieu de chercher à le simplifier ? Il est déjà assez simple pour que cela ne présente pas grand intérêt, on peut cependant remplacer l'aiguille Vicat par le pouce de la main appuyé fortement mais sans exagération, ce qui correspond à un effort d'environ 15 kilogrammes. Contrairement à ce que l'on supposerait *a priori*, ce procédé n'est guère moins précis que celui de Vicat, surtout si ce dernier n'est pas employé avec de très grandes précautions. Si l'on laisse la surface du ciment se dessécher ou se carbonater ou au contraire se délaver dans l'eau, l'observation de la fin de la

prise devient tout à fait incertaine : l'essai au pouce est moins affecté par les variations de l'état de la surface parce qu'il tend à déformer le ciment sur une certaine profondeur. Enfin si l'on ne prend pas des précautions spéciales pour assurer l'invariabilité de la température pendant l'essai de prise, l'influence des changements de température est si grande que toutes les causes d'erreur disparaissent devant celle-là. L'intérêt que présente l'emploi du pouce est qu'il peut servir à déterminer la durée de prise des mortiers qui, pour les emplois pratiques ont seuls de l'intérêt.

En résumé pour l'essai accéléré et simplifié de rapidité de prise on conservera l'aiguille Vicat ou l'on se servira du pouce. Dans les deux cas on considérera la prise comme achevée quand on cessera d'obtenir une empreinte visible à la surface du ciment. La durée de prise ainsi observée est la même par l'un et l'autre procédé.

Essai d'invariabilité de volume. — L'essai normal d'invariabilité est celui des galettes. Cet essai est très simple mais n'est pas accéléré, car ces galettes doivent être observées pendant un mois au moins et encore ce délai n'est-il pas suffisant pour les ciments magnésiens. Cet essai est un des plus importants pour le contrôle de la qualité du ciment parce que l'absence de stabilité due aux expansifs est un de leurs défauts les plus fréquents. On peut très facilement accélérer cet essai par l'action de la chaleur qui active toutes les réactions chimiques et en particulier l'extinction de la chaux. En trois heures, à cent degrés, la chaux est complètement éteinte et a produit tout son gonflement, il en est de même pour la magnésie, en six heures. En même temps, la grandeur des gonflements produits est considérablement exagérée, de telle sorte que la sensibilité du procédé d'essai se trouve considérablement augmentée, tellement que des quantités de chaux trop faibles pour se manifester à froid même à la suite d'essais indéfiniment prolongés, amènent des gonflements et des fentes très apparentes.

Les fabricants de ciments se plaignent avec quelques apparences de raison que cet essai est trop sévère, et soutiennent que tout ciment ayant satisfait à l'essai à froid pendant 28 jours, est bon, quelqu'aient été les résultats de l'essai à chaud. J'ai fait voir en effet que toutes les tensions internes produites dans un ciment

s'annulent à la longue par suite de l'accroissement de solubilité de tous les corps soumis à des efforts. Il doit en être ainsi de l'hydrate de chaux qui se redissout là où il exerce des efforts et va recristalliser à côté en cessant de produire aucun effort. Il est possible que des ciments renfermant au début de leur prise, une certaine quantité de chaux libre accusée par l'essai à chaud, se comportent bien dans les travaux. On ne peut donc se baser sur cet essai pour refuser un ciment, mais par contre, dans le cas où le ciment a satisfait à cet essai on peut le recevoir en toute sécurité, on a une certitude absolue de toute absence d'expansifs.

L'essai accéléré d'invariabilité de volume ne servira donc qu'à recevoir des ciments sans attendre l'achèvement des essais normaux, mais jamais à en refuser. Les ciments qui n'auront pas satisfait à cet essai accéléré devront être soumis aux essais normaux ; il sera prudent de les suivre avec une attention particulière en raison de la présence d'expansifs en quantité qui n'est peut-être pas dangereuse, mais dont l'existence est néanmoins certaine.

Pour faire l'essai accéléré d'invariabilité de volume, on emploie des briquettes de pâte normale que l'on laisse durcir sous l'eau. Après l'achèvement complet de la prise et au plus tard dans les vingt-quatre heures qui suivent cet achèvement on les immerge dans l'eau bouillante où on les laisse pendant trois heures et on observe après ce temps, le gonflement.

Plusieurs procédés peuvent être employés pour cette observation du gonflement. Le plus simple et ce dont on se contente souvent est la simple observation à la vue des fissures produites, mais l'estimation de sentiment de l'importance de ces fissures est nécessairement arbitraire et ne convient guère pour un essai de réception ; il est préférable de faire une mesure réelle du gonflement. Différents procédés ont été proposés dans ce but, on va rapidement les passer en revue. Les trois principaux sont :

1° L'emploi du moule fendu à aiguille dont j'ai proposé l'emploi et dont l'usage a été introduit dans un certain nombre de cahiers des charges en France.

2° L'emploi du procédé des aiguilles de M. Klebe, dans lequel on mesure la variation de distance de deux épingles implantées dans le ciment en se servant d'un coin en métal.

3° L'emploi d'un pied à coulisse pour mesurer les changements de dimensions extérieurs des briquettes d'épreuve. Dans la majeure partie des cas, ce procédé très simple paraît être suffisant.

La grandeur du gonflement mesuré sur une même briquette par chacun de ces trois procédés n'est pas tout à fait identique comme le montrent les comparaisons qui ont été faites par M. Deval et par moi et dont voici un résumé sommaire : on laissera de côté les ciments donnant des gonflements trop faibles, inférieurs à 1 °/₀ parce que dans ce cas, les déformations accidentelles des moules introduisent des perturbations de l'ordre de grandeur des quantités que l'on veut mesurer; on laissera également de côté les gonflements supérieurs à 5 °/₀ parce que dans ce cas, les dislocations et torsions des briquettes rendent les mesures impossibles.

Les moules à aiguilles employés avaient une épaisseur de 0,5 millimètres et la longueur des aiguilles était de 150 millimètres. Un déplacement de 7 millimètres correspondait à une augmentation de 1 °/₀. Les mesures avec les épingles et avec le pied à coulisse ont été faites sur les briquettes ordinaires en 8, servant pour les essais de rupture ; la distance des épingles était de 50 millimètres et la longueur des briquettes, de 76 millimètres. Tous les allongements sont donnés en centièmes de la longueur primitive.

Désignation	Moules à aiguilles	Epingles	Pied à coulisse
Portland.	2,0	1,1	»
»	1,1	1,1	»
»	3,3	3,6	»
»	4,7	3,8	»
Ciment naturel	5,1	3,0	2,5
»	3,3	1,3	1,5
Chaux	2,0	2,7	2,9
Ciment rapide.	4,6	8,9	9,5
Chaux.	1,7	0,1	1,9
»	1,4	5,8	3,4
Ciment grappier	4,3	2,1	6,7

Les écarts sont tantôt dans un sens tantôt dans l'autre ; ils représentent donc des irrégularités et l'on peut admettre qu'en moyenne

ces trois procédés donnent des résultats équivalents. C'est le procédé des moules fendus qui donne les indications les plus régulières, mais c'est le procédé du pied à coulisse qui demande les manipulations les plus simples : on peut choisir suivant ses convenances personnelles.

La limite maxima du gonflement que l'on peut accepter est comprise entre 1 et 2 %. Toutes les fabrications de ciment portland bien conduites, peuvent livrer des produits satisfaisant à cette condition ; cela est plus difficile pour les ciments naturels et les chaux, mais cela est encore possible.

En résumé on peut proposer pour l'essai accéléré d'invariabilité de volume le moule avec aiguille en limitant le gonflement soit à 1, soit à 2 %, c'est-à-dire à un écartement des aiguilles de 7 ou 15 millimètres ; étant entendu que cet essai est seulement destiné à permettre de recevoir de suite les ciments qui y satisfont, mais à refuser ceux qui n'y satisfont pas.

Essais de résistance mécanique. — Les essais normaux de résistance se font à l'arrachement sur des briquettes de pâte pure et de mortier 1/3, après des périodes de durcissement de sept jours, de vingt-huit jours et 84 jours.

Les ruptures sont faites à 7, 28, 84 jours, ce qui exige la confection d'un nombre considérable de briquettes, c'est-à-dire beaucoup de main-d'œuvre. La durée de cet essai est trop longue, car elle est au minimum d'un mois et le plus souvent les ciments sont employés avant l'achèvement de l'essai dont l'utilité est alors un peu illusoire. Il semble possible d'apporter à cet essai des simplifications et accélérations considérables.

1° On peut supprimer complètement un des deux essais à la traction ou à la compression. Les deux essais donnent en effet des indications qui varient en gros dans le même sens. Les petits écarts que l'on observe quand on veut entrer dans les détails sont de l'ordre des écarts que présente un même essai quand on le recommence.

2° L'essai sur pâte pure peut sans inconvénient être supprimé, les chaux et ciments ne sont jamais employés qu'avec du sable et c'est dans ces conditions seulement que le consommateur a intérêt à connaître les propriétés des matières qu'il achète.

Si l'on a conservé l'essai sur pâte pure c'est en raison des influences dont disposent les fabricants de ciments Portlands. Cet essai donne en effet un avantage apparent considérable à ce produit en raison de la moindre proportion de produits impalpables qu'il renferme.

3° La durée de l'essai peut être réduite considérablement dans la plupart des cas. On pourrait se contenter d'une casse à 7 jours. Les ciments Portlands, les ciments de laitiers, les ciments à prise rapide ont déjà pris la majeure partie de leur résistance. Il n'y a que pour les chaux que l'essai à 7 jours ne peut rien apprendre sur la résistance finale du produit. Or précisément, par une inconséquence assez bizarre, on se contente souvent pour ces produits de l'essai à 7 jours.

On peut dans tous les cas, se contenter de la rupture à 7 jours, sous la réserve bien entendu que le produit a satisfait à l'essai d'invariabilité de volume à chaud. Etant entendu, comme cela a été dit plus haut, que cet essai accéléré a pour seul but de permettre une réception accélérée et dans aucun cas de faire refuser le produit, les essais normaux seuls pouvant avoir cet effet. Il y aurait lieu, au moins dans le cas des chaux, d'autoriser, sur la demande des fabricants, le durcissement à l'eau chaude pendant les 7 jours.

4° Le choix du mode de rupture est plus délicat. Si l'on envisage seulement la précision des résultats, la préférence devrait être donnée à l'essai par écrasement. Mais il a le grave défaut d'exiger des machines puissantes, coûteuses, d'un réglage souvent difficile. Ce motif suffit pour les faire exclure des essais simplifiés. L'essai de traction d'un usage aujourd'hui général, exige encore des machines un peu coûteuses sans présenter aucun avantage ni théorique ni pratique sur l'essai par flexion. Cet essai préconisé par Vicat a été abandonné pour des motifs d'ordre théorique, absolument inexacts. On lui reprochait d'intéresser surtout la surface des éprouvettes, ce qui est exact, et l'on s'est figuré *a priori*, ce qui est inexact, comme l'a montré M. Durand-Claye, que l'essai de traction ne méritait pas le même reproche. C'est là le motif non justifié de la préférence donnée aujourd'hui à ce dernier mode d'essai. Pour les essais simplifiés, on doit sans hési-

tation revenir à l'essai de flexion. On pourrait adopter des éprouvettes carrées de 20 millimètres de côté portées sur des appuis distants de 100 millimètres. Ce sont les dimensions adoptées par M. Durand-Claye et plus récemment par M. Mercier.

3° Il ne reste plus qu'à définir le mortier employé pour la confection des briquettes. L'usage s'est répandu de plus en plus de faire les briquettes en mortier fortement battu. Cette pratique regrettable a été acceptée sous la pression des fabricants de ciments qui voulaient inscrire dans leur prospectus des résultats d'essais tous les jours plus considérables. Il n'y a là qu'un trompe l'œil qui ne trompe plus personne, aujourd'hui que la question est mieux connue. En tous cas, pour les essais de réception, cette compression ne présente aucun avantage et elle présente de très graves inconvénients pour les essais simplifiés qu'elle rend impossibles. Cette compression énergique exige en effet des machines puissantes que l'on ne peut avoir que dans les laboratoires richement dotés. C'est l'interdiction de faire des essais sur les chantiers même de travaux très importants comme ceux des grands ports maritimes. Pour les essais accélérés, on doit sans aucune hésitation adopter les mortiers plastiques, qui pourraient d'ailleurs être aussi employés avec avantage pour les essais normaux. Pour la confection des mortiers plastiques, on est obligé d'employer un sable composé, soit un sable composé, de trois grosseurs consécutives comme celui qu'à adopté la commission française des méthodes d'essai, soit un sable composé de 1 partie de sable normal ordinaire et de 2 parties de sable fin. Le mémoire présenté au congrès par M. Mercier montre que l'on peut ainsi avoir des résultats aussi réguliers qu'en employant l'essai à la traction sur des mortiers battus.

Conclusion. — En résumé on pourrait adopter pour les essais accélérés et simplifiés les règles suivantes, étant bien entendu que les essais suffisants pour la réception anticipée d'un ciment ne seront jamais invoqués pour le faire refuser. Pour ce refus les essais normaux à longue échéance auront seuls à intervenir.

Les essais accélérés et simplifiés seront au nombre de quatre :

1° Essai de finesse.

2° Essai de rapidité de prise.

3° Essai accéléré d'invariabilité de volume à chaud.

4° Essai à la flexion sur mortier sableux plastique.

Essai de finesse. — On déterminera le résidu sur le tamis de 900 mailles au centimètre carré. Il devra toujours être très faible par exemple inférieur à 5 °/₀.

Essai de rapidité de prise. — On déterminera la rapidité de prise soit par le procédé habituel, c'est-à-dire avec l'aiguille *Vicat* sur la pâte pure normale, soit avec le pouce sur le mortier plastique servant à l'essai de flexion.

Essai d'invariabilité de volume. — On employera le procédé des moules fendus à aiguilles avec cylindres de 30 millimètres de diamètre, épaisseur de 1 millimètre, et aiguilles de 150 millimètres de longueur. Le ciment sera maintenu immergé 3 heures dans l'eau bouillante. Cette immersion aura lieu après l'achèvement du durcissement sous l'eau et au plus tard dans les 24 heures qui suivent l'achèvement de la prise. L'écartement des aiguilles ne devra pas dépasser 10 millimètres.

Essai de flexion. — L'essai de flexion se fera sur des prismes carrés de 120 millimètres de longueur, 20 millimètres de côté. Ils seront confectionnés avec un mortier plastique et rompus 7 jours après l'achèvement de la prise. Le durcissement pourra être effectué à la demande des fabricants soit dans l'eau froide soit dans l'eau à 100°. »

24. Rendement. — Le rendement du ciment est le volume de ciment durci que l'on peut obtenir avec un poids donné de ciment en poudre.

Comme le ciment ne se dissout pas dans l'eau, qu'il ne fait que s'y tasser, *le volume de la pâte est égal à la somme des volumes du ciment et de l'eau employée au gâchage.* On a vu d'autre part que le volume du ciment *durci* est très sensiblement égal à celui de la pâte.

Le volume d'1 kilogramme de ciment en poudre est de 0,32 décimètre cube, pour une densité moyenne de 3,125.

La quantité d'eau à employer au gâchage est très variable. Dans la confection des éprouvettes on ajoute d'habitude une

quantité d'eau s'élevant à 20 % du poids du ciment en poudre ; mais cette quantité est insuffisante en pratique, et il convient de la porter à 27 et même 30 %, soit à $0^k,270$ ou $0^k,300$ par kilogramme de ciment.

Il résulte donc des considérations précédentes que le volume de la pâte et par suite que le volume du ciment durci varie dans les conditions normales de :

$$0,320 + 0,270 = 0,590 \quad \text{à} \quad 0,320 + 0,300 = 0,620 \text{ décimètre cube.}$$

Si l'on avait employé une plus grande quantité d'eau de gâchage, $0^k,500$ par exemple, le volume de la pâte et du ciment durci aurait été de :

$$0,320 + 0,500 = 0,820 \text{ décimètre cube.}$$

Le rendement varie donc avec le volume d'eau employé ; mais comme dans tous les cas sus-mentionnés le volume d'eau, nécessaire aux phénomènes produisant la prise et le durcissement, est à peu près constant, l'excès d'eau doit forcément rester emprisonné entre les particules du corps durci. En réalité l'on constate que la masse est d'autant plus poreuse, et par suite d'autant moins résistante que le ciment a été gâché avec une plus grande quantité d'eau.

25. Mortiers et bétons. — Le ciment pur est assez coûteux : son usage est par suite assez restreint. D'autre part, se dilatant ou se contractant suivant son état hygroscopique, il est difficile et peu prudent de l'employer en grosse masse.

Mais, comme on a vu qu'il adhère très fortement aux corps pierreux, aux cailloux, au sable fin, on ajoute à la pâte de ciment pur, l'une ou l'autre de ces substances qui augmentent considérablement son volume et diminuent d'autant son prix de revient.

Pour se rendre compte de l'influence des corps pierreux additionnés au ciment sur la résistance du mélange durci, sollicité par un effort de compression ou d'extension, il suffit de se figurer la succession de particules de ciment et de sable rencontrées par l'effort et de considérer ce qui se passe suivant que la force com-

prime ou distend ces particules. S'il y a compression, la résistance rencontrée se compose uniquement des résistances opposées à la compression, à la fois par le ciment et le sable ; mais s'il y a extension, il y a lieu de tenir compte en dehors des résistances propres à l'extension des particules « ciment et sable », de l'adhérence des particules pierreuses avec le ciment.

Il ne faut pas oublier en outre, qu'en pratique, la direction de l'effort peut rencontrer des vides provenant soit d'air emprisonné entre les grains de sable, soit de l'évaporation d'un excès d'eau de gâchage. Il peut arriver aussi que le ciment n'enveloppe pas d'une façon parfaite les particules pierreuses ou les armatures, lesquelles étant mal soudées peuvent alors être séparées sans effort. Pratiquement la résistance du mélange est donc inférieure à celle du ciment pur.

Quand on ajoute du sable et de l'eau au ciment, on obtient une pâte, le *mortier de ciment pur*, qui peut être employée comme le ciment pur. Quand on ajoute encore du gravillon, des cailloux ou des pierres cassées, la masse prend le nom de *béton de ciment* : elle ne peut plus être moulée en de faibles épaisseurs ni servir aux mêmes usages que le mortier.

Le mortier et le béton sont donc des corps absolument semblables, qui ne diffèrent que par la grosseur des grains de matière dure ajoutés au ciment.

Il y a lieu de spécifier comment il convient d'effectuer et de doser ces mélanges, en vue d'obtenir le maximum de résistance pour une dépense déterminée.

26. Fabrication. — La fabrication du mortier se fait par les opérations suivantes qui sont très nettement distinctes.

1° *Mélange à sec du ciment et du sable* dans les proportions prévues. — La mesure du ciment est facile, attendu que le sac contient uniformément 50 kilogrammes net de matière ; celle du sable s'obtient soit en comptant le nombre de brouettes jaugées, soit, mieux encore, à l'aide d'une caisse en bois sans fond, à grande section et de peu de hauteur, d'un volume déterminé. Le mélange doit se faire sur une aire bien propre, généralement en planches.

2° *Brassage du mélange.* — Cette opération a pour but d'obtenir un mélange intime du ciment et du sable, de manière que chaque grain de ce dernier ait été roulé dans le ciment. Quand le mélange est bien fait, la masse a pris une teinte uniforme ; on n'y distingue plus le ciment généralement d'une couleur plus claire que le sable.

3° *Eau de gâchage.* — L'addition d'eau a pour but de former la pâte de ciment, et d'agglutiner ainsi entre eux tous les grains de sable. Si l'on verse l'eau nécessaire en une seule fois, on risque de perdre une partie notable du ciment entraînée avec l'eau qui s'écoule de tous côtés, ou tout au moins de perdre le bénéfice du premier malaxage. Il vaut donc mieux ajouter l'eau par petites quantités, à la pomme d'arrosoir par exemple, en déplaçant la masse d'une manière continue à la pelle, de façon à ce que toutes les parties du mélange soient humectées successivement.

La quantité d'eau de gâchage ne se mesure pas ; elle est généralement déterminée, au jugé, par le surveillant des travaux, en raison de l'emploi spécial auquel le mortier est destiné, et en tenant compte de l'état hygrométrique de l'air. Une pâte semi-fluide telle que la pression de la pelle fasse remonter un peu d'eau à la surface, indique que l'addition d'eau a été normale.

4° *Malaxage de la masse.* — Le malaxage a pour but de parfaire le mélange intime et d'expulser complètement l'air emprisonné entre les particules de sable.

Ces deux opérations doivent être exécutées très activement, c'est-à-dire sans perdre un seul instant, afin que le mortier puisse être employé avant la prise.

Elles se font soit à la main à l'aide de pelles, soit avec des bétonnières mue mécaniquement, à axe vertical, soit avec des appareils spéciaux plus complets de divers systèmes.

Le béton peut se faire comme le mortier, soit en pratiquant les différentes opérations sus-mentionnées, soit en opérant comme suit, quand le sable et les cailloux, ne sont pas mélangés naturellement dans les proportions voulues, ou ne l'ont pas été d'une façon artificielle.

Le mortier étant préparé de la façon décrite ci-dessus, on y ajoute les cailloux préalablement dosés. Quand les cailloux sont

poreux, ce qui est souvent le cas, il convient de les mouiller avant d'effectuer le mélange, pour éviter qu'ils absorbent l'eau du mortier, et que la pâte moins fluide ne rencontre de la difficulté à remplir tous les vides.

Ces deux modes d'opérer ont chacun leurs partisans et leurs détracteurs.

Le béton se fait à la main, comme le mortier, à l'aide de pelles, ou dans des bétonnières à petits rendements, soit dans des appareils à grands rendements, où le mélange se fait automatiquement et dont la production peut atteintre 30 à 40 mètres cubes par heure.

27. Pilonnage. — Quelle que soit la nature du mélange, mortier ou béton, il doit être fortement pilonné une fois en place. Cette opération a pour but de comprimer la masse et d'obliger le ciment entraîné par un léger excès d'eau de gâchage à s'introduire dans les vides qui peuvent encore exister, comme aussi de faire dégager les dernières bulles d'air emprisonnées entre les grains de sable. Il est de la plus haute importance que cette opération soit exécutée avec beaucoup de soin, surtout quand la proportion de ciment prévue dans le mélange est faible, et quand la masse est travaillée avec peu d'eau. Le pilonnage doit être arrêté quand l'eau remonte à la surface, car elle entraîne avec elle du ciment et appauvrit d'autant la richesse du mélange.

Un mortier ou béton bien composé et bien préparé, mais mal pilonné, peut n'acquérir qu'une très faible résistance. Si l'on veut diminuer la main-d'œuvre et disposer d'une pâte assez fluide pour remplir facilement des coffrages étroits et encombrés d'armatures par exemple, un léger excès d'eau est tout indiqué ; si la résistance est plus faible que celle d'un mortier sec, l'adhérence est mieux assurée.

28. Le sable. — Le sable doit être une matière *inerte*, ajoutée au ciment pour augmenter économiquement son volume. Il ne doit exercer aucune action chimique sur la masse, car cette action serait plutôt défavorable, la composition du ciment Portland étant prévue de manière à réaliser le maximum de résistance. Il faut

donc éliminer les sables contenant des quantités notables de sulfates, sulfures ou sels de magnésie. Les sables siliceux ceux dans lesquels la silice prédomine, donnent d'excellents résultats.

Il en est de même des sables d'origine calcaire, ou provenant de roches au moins aussi résistantes que la pâte de ciment ayant acquis son maximum de durcissement.

Il y a lieu de proscrire aussi les sables enveloppés d'une gangue terreuse, qui empêche le ciment d'adhérer aux grains et de les agglutiner les uns aux autres; comme aussi d'éviter l'introduction dans la masse de débris organiques généralement peu résistants et de nature à se décomposer, d'où la formation de vides nuisibles à la résistance.

La forme des grains n'est pas indifférente. Les grains sphériques ont l'avantage de présenter le minimum de surface à volume égal, mais cette forme résultant de l'usure des grains les uns contre les autres, le poli produit par cette usure est défavorable à l'intensité de l'adhérence. Les grains anguleux, à arêtes vives, tels que ceux que l'on obtient en broyant des roches calcaires donnent de bien meilleurs résultats (1).

La grosseur des grains a une très grande importance au point de vue de la réduction des vides. Si les grains étaient géométriquement sphériques, on sait que le vide serait le même quel que soit le diamètre de ces grains. Comme il n'en est pas ainsi, il convient de connaître la proportion des vides obtenus en triant à la machine du sable de rivière (2).

Grains de plus de 1 millimètre de diamètre,	volume du vide.	40 %
» de 0,5 à 1 millimètre	»	»	42 »
» de moins de 0mm,5	»	»	55 »

M. E. Candlot donne les valeurs suivantes pour des sables de même origine.

Poids d'un litre de sable très fin.	1 230 gr.;	Volume du vide.	526 cm³
» » moyen.	1 418 »	»	455 »
» » grossier.	1 585 »	»	390 »

Donc, pour obtenir la même résistance avec le sable fin qu'avec

(1) Souleyre et Anglade. — *Expériences sur les matériaux des maçonneries*
(2) *Le Ciment*, avril 1897, d'après la Thonzeitung.

le sable grossier qui a servi aux expériences de M. Candlot, il faudra employer approximativement $\frac{526}{390} = 1,35$ fois plus de pâte de ciment.

Il est clair qu'un mélange intime de ces différentes sortes de sable diminuera les vides, attendu que les petits grains se logent dans les interstices laissés par les gros, mais pour que ce mélange intime soit réalisable, il faut qu'il soit fait dans de certaines proportions à trouver dans chaque cas particulier.

Pour déterminer le volume des vides sur un chantier, on recommande de faire usage de deux récipients, l'un d'un litre, l'autre de deux litres. *Dans le plus petit*, on verse lentement le sable à essayer, en le secouant légèrement, de manière à le tasser ; *dans le plus grand* on verse d'abord un litre d'eau, puis le sable qu'on a jaugé précédemment, comme il a été dit. Il est manifeste que le vide du sable sera mesuré par la différence entre le niveau final de l'eau et la marque « deux litres ».

Cette méthode accuse généralement un volume de vide plus grand qu'il n'est en réalité ; parce que les matériaux les plus gros sont les premiers à tomber au fond, et le sable fin restant à la surface, ne se mélange pas intimement à la masse. On compense cette erreur par excès en prévoyant la quantité de ciment strictement correspondante au vide ainsi trouvé, c'est-à-dire sans y ajouter l'excédent pratique usuel [1].

29. Gravier. — Ce qui vient d'être dit pour le sable, peut se répéter pour le gravier. *La composition chimique* du gravier est indifférente pourvu qu'elle ne contienne pas de sulfates ou de sels magnésiens capables de réagir sur le ciment Portland.

La dureté de chaque pierre doit être au moins égale à celle de la pâte de ciment durcie.

Les cailloux roulés présentent le minimum de surface à volume égal ; ils seraient donc à préférer, si l'état de leur surface n'excluait pas les irrégularités capables d'augmenter l'adhérence du ciment avec la pierre. Les pierres cassées donnent par suite de meilleurs résultats.

[1] *Le Ciment*, avril 1897, d'après la Thonzeitung.

M. Candlot a trouvé qu'un hectolitre de pierres cassées à la dimension ordinaire des matériaux d'empierrement (soit 40 à 55 millimètres, pèse 144 kilogrammes. La densité de ces pierres (quartz) étant de 2,63, le volume est de 46,4 litres. Pour des cailloux roulés de mêmes dimensions, le poids de l'hectolitre s'est élevé à 162 kilogrammes : la densité des pierres étant de 2,60, le volume des vides est de 37,7. On peut admettre pratiquement que dans un mètre cube de pierres cassées il y a 0,50 de vide, et 0,40 dans un mètre cube de galets.

La grosseur des pierres employées dans un béton doit être proportionnée aux dimensions du massif. Il n'y aucun inconvénient à se servir de pierres de 2 à 3 décimètres cubes dans un gros massif.

30. Eau de gâchage. — La qualité de l'eau est très importante. L'eau douce est préférable à l'eau dure.

L'eau marécageuse qui contient des débris organiques acides, doit être rejetée. L'eau un peu trouble peut être employée sans inconvénient.

La quantité d'eau varie avec la nature de l'ouvrage en vue, et celle du gravier employé pour la fabrication du béton.

Quand le dosage est de 250 kilogrammes à 300 kilogrammes par mètre cube de sable, la quantité d'eau de gâchage peut atteindre 100 % du poids du ciment ; quand le dosage est de 500 à 600 kilogrammes par mètre cube de sable, la quantité d'eau peut varier de 60 à 80 % du poids de ciment pour les sables fins et de 30 à 40 % pour les gros sables. Ces proportions doivent être déterminées par des expériences directes. A cet effet, on prend un litre de sable ; on y ajoute d'abord la quantité de ciment prévue, puis l'eau par petites quantités jusqu'à ce que le mélange acquière la consistance désirable. La quantité d'eau qui a donné ce résultat, a été mesurée avec soin ; c'est celle qu'il y a lieu d'employer pour l'exécution du travail.

31. Dosages normaux. — *a) Mortiers.* — Pour doser un mortier il suffit de connaître le volume des vides d'un litre de sable. Ce volume se détermine d'après le procédé indiqué au § **29** ou mieux en divisant le poids d'un litre de sable par son poids spécifique.

Le volume des vides est la différence entre le volume du sable et le quotient ainsi obtenu [1].

Connaissant ce volume, il suffit d'ajouter au sable un volume égal de pâte de ciment. Comme une partie de l'eau de gâchage est absorbée par le sable, on ne prendra pas pour volume de la pâte celui du ciment augmenté du volume de l'eau, mais un volume un peu moindre.

Théoriquement, comme on recherche un produit compact, obtenu en ajoutant le minimum d'eau de gâchage possible, et qu'il convient d'avoir un léger excès de pâte, on pourra admettre que la quantité d'eau varie de 28 à 43 % du poids de ciment, en d'autres termes, quel que soit le volume d'eau employé, le rendement de la pâte variera de $0,32 + 0,28 = 0,50$ à $0,32 + 0,43 = 0,75$, le chiffre moyen se rapprochant beaucoup plus de cette dernière expression que de la première.

Application. — *Quelle est la quantité de ciment à ajouter à un litre de sable pesant* 1 300 *grammes pour remplir exactement tous les vides du mortier ?*

La densité moyenne du sable étant de 2,63, le volume des vides sera en centimètres cubes

$$1\,000 - \frac{1\,300}{2,63} = 1\,000 - 424 = 506 \text{ centimètres cubes.}$$

Comme dans un mélange très compact, un kilogramme de ciment donne 600 centimètres cubes de pâte, il faudra : $\frac{1\,000 \times 506}{600} = 843$ grammes de ciment pour obtenir un mortier très dense, tandis que pour un mélange courant, il en faudra seulement : $\frac{1\,000 \times 506}{750} = 675$ grammes.

Ces proportions correspondent, en admettant que le ciment pèse 1 400 grammes par litre, à des mélanges en volume de :

1° Pour un mortier très dense : $1 : \frac{1\,400}{843} = 1 : 1,66$.

2° Pour un bon mortier courant : $1 : \frac{1\,400}{675} = 1 : 2,07$.

[1] Ce poids spécifique mesuré sur 13 échantillons assez différents n'a varié que de $2^k,60$ à $2^k,68$.

b) Dosage du béton. — Supposons que le gravier soit remplacé par des pierres cassées dont le volume des vides est de 0,50 (voir § 30). Arrosons-les pour les saturer d'eau. La quantité de mortier nécessaire sera au moins égale à celle des vides, soit à $0^{m^3},50$. Prenons le mortier défini ci-dessus comme mélange courant.

Nous aurons besoin en résumé pour fabriquer un mètre cube de béton :

1° D'un demi-mètre cube de mortier :

Soit de $\frac{675}{2} = 337,5$ kilogrammes de ciment ;

de $\frac{1\,000}{2} = 500$ litres de sable ;

2° D'un mètre cube de pierres cassées.

La proportion en volume, pour une densité du ciment de 1,40 est :

$$\text{Mortier } \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2,1} : 1\right) \qquad \text{Cailloux : } 1.$$

Soit :

$$\frac{1}{4,2} : \frac{1}{2} : 1 \quad \text{ou} \quad 1 : 2,1 : 4,2.$$

La première proportion représente respectivement, et dans leur ordre, les quantités de ciment, de sable et de cailloux nécessaires pour produire un mètre cube de béton ; la deuxième représente les volumes de sable et de cailloux correspondant à une partie de ciment et le troisième terme de cette proportion est le volume du béton obtenu.

c) Deuxième méthode. — La compacité d'un mortier étant le rapport du volume du mortier au volume des vides présentés par le sable qui le constitue, la compacité parfaite a lieu quand ce rapport est égal à l'unité.

On peut se demander quel est le dosage des mortiers qui rendent la compacité parfaite avec le minimum de ciment, pour des matériaux donnés.

Le foisonnement du ciment employé a été trouvé de 0,48 à l'aide de nombreux essais sur des cubes de 50 centimètres carrés de section, pour des mortiers de divers dosages. On a déterminé pratiquement le foisonnement du mortier et la quantité d'eau

nécessaire dans l'hypothèse que les vides du sable complètement remplis étaient de 40 % [1].

Si on appelle s le nombre de litres de sable qu'on ajoute au litre de ciment versé librement, la quantité d'eau peut être prise égale à 0,175 $(1 + s)$, sort à 17,5 % de la somme de ces deux volumes.

Si le vide du sable est de 40 %, le vide correspondant à la quantité de sable employée est de 0,40 s et par suite, la compacité est exprimée par

$$\frac{\text{ciment} + \text{eau}}{\text{vide du sable}} = \frac{0{,}48 + 0{,}175\,(1 + s)}{0{,}40\,s}.$$

Pour que ce rapport soit égal à l'unité, on doit avoir :

$$s = \frac{0{,}48 + 0{,}175}{0{,}40 - 0{,}175} = \frac{0{,}655}{0{,}225} = 2{,}91.$$

Autrement dit, le dosage minimum qui donne la compacité dans ces conditions est de 1 : 2,91, ce qui représente un dosage en poids de $\frac{1\,300}{2{,}91} = 445$ kilogrammes par mètre cube de sable, pour un ciment de 1 300 kilogrammes de poids spécifique.

Ce dosage répond à l'extrême limite : si l'on veut plus de sécurité, il faut poser

$$\frac{0{,}48 + 0{,}175\,(1 + s)}{0{,}40\,s} = 1{,}1,$$

d'où $s = 2{,}48$ ou environ 2,5.

Le dosage en volume 1 : 2,5, répond en poids à $\frac{1\,300}{2{,}5} = 520$ kilogrammes par mètre cube de sable, ou à 511 kilogrammes d'après une interpolation, par mètre cube de mortier mis en place.

S'il s'agit d'établir un béton compact, il y a encore lieu de remplir les vides du gravier avec 10 % d'excès, à l'aide d'un mortier compact.

On recherche dans le gravier les mêmes propriétés que dans le sable. Ses grains auront autant que possible des grosseurs différentes pour ménager le minimum de vide. Le vide d'un bon gravier pour cet usage est de 0,40.

(1) *Le Ciment* de février 1899, d'après la Thon-Industrie Zeitung.

On vient de voir que le mortier compact doit avoir pour dosage au minimum 1 : 2,5, dont le volume est :

Pour le ciment.	0,48
Pour l'eau 0,175 (1 + 2,50)	0,62
Pour le sable 0,60 × 2,50.	1,50
Total.	2,60

Or si l'on doit prévoir un volume de mortier égal à 0,40 du volume du gravier + 10 %, ou 0,44, inversement à un volume de mortier de 2,60 correspond un volume de gravier de $\frac{2,60}{0,44} = 5,9$, soit 6 en nombre rond, et le dosage type d'un béton compact sera au moins de : 1 : 2,5 : 6, contenant par conséquent 520 kilogrammes de ciment pour 6 mètres cubes, ou 90 kilogrammes environ par mètre cube de béton mis en place.

De même, il y a lieu de doser les bétons pour les divers autres usages, en vue des circonstances spéciales qui se présentent : résistance presque immédiate ou au bout d'un nombre de jours déterminés.

d) Tableau de calculs tout faits. — Le tableau suivant relevé dans l'ouvrage de M. Candlot [1] est d'un emploi très pratique pour la détermination des dosages appropriés à divers cas.

Le sable mentionné, le même pour tous les dosages, avait été passé au tamis n° 12. Il pesait 1300 kilogrammes le mètre cube ; les cailloux pesaient 1550 kilogrammes au mètre cube, et les pierres cassées, 1370 kilogrammes ; les uns et les autres avaient été passés à l'anneau de 0,04. Le ciment, le sable et les pierres ont été d'abord mélangés à sec, puis on a ajouté l'eau en triturant la masse avec soin ; le béton a été ensuite tassé dans des moules cubiques de 0m,10 de côté.

Les résultats constatés au bout de 7 jours et de 28 jours montrent tout d'abord qu'avec les pierres cassées on obtient de plus grandes résistances qu'avec les cailloux roulés ; on voit ensuite qu'il y a avantage à augmenter la quantité de ciment dans le mortier, mais à ne pas mélanger celui-ci avec les pierres dans une proportion trop élevée ; il est préférable d'employer la quantité de mortier suffisante pour remplir les vides des pierres.

[1] E. Candlot. — *Ciments et chaux hydrauliques*

Tableau I

Pour 1 de mortier en volume et 1 de sable pesant 1300 kilogrammes			Dosage du béton par mètre cube de cailloux — 1,5 cailloux ou pierres cassées			
Poids de Ciment			250k	450k	650k	1 000k
Volume de mortier			0m3,850	0m3,880	0m3,960	1m3,170
			m3	m3	m3	m3
1	Volume des cailloux		1,275	1,320	1,440	1,755
2a	Série a. — Bétons confectionnés avec des cailloux roulés	Quantité d'eau de gâchage .	0,180	0,210	0,242	0,305
3a		Volume du béton obtenu .	1,650	1,730	1,840	2,210
			k.	k.	k.	k.
4a		Poids de ciment dans un mètre cube de béton . .	151,5	260,0	353,0	448,0
5a		Densité du béton après la prise	2,32	2.36	2,41	2,40
			k.	k.	k.	k.
6a		Résistance à la compression par centim. carré — au bout de 7 jours.	72,5	102,5	162,5	185,0
7a		» 28 »	82,5	172,5	217,5	240,0
8a		» 6 mois.	90,0	181,6	245,0	251,6
9a		» 1 an .	90,8	226,7	308,3	386,6
			m3	m3	m3	m3
2b	Série b. — Bétons confectionnés avec des pierres cassées	Quantité d'eau de gâchage .	0,180	0,210	0,242	0,305
3b		Volume du béton obtenu .	1,550	1,610	1,730	2,040
			k.	k.	k.	k.
4b		Poids de ciment dans un mètre cube de béton . .	161,0	279,0	375,0	490,0
5b		Densité du béton après la prise	2,28	2,37	2,40	2,43
			k.	k.	k.	k.
6b		Résistance à la compression par centim. carré — au bout de 7 jours.	92,5	157,5	200,0	280,0
7b		» 28 »	112,5	200,0	245,0	302,5
8b		» 6 mois.	115,0	233,3	343,3	325,0
9b		» 1 an .	136,5	246,6	353,3	420,0
	Prix de revient :					
10a	Sable. . . . 5fr	Par mètre cube de béton	a20,50	25,73	30,33	34,69
10b	Cailloux . . 6fr		b22,28	28,05	32,73	38,22
11a	Pierre cassée 7fr	Par 100kg de résistance au bout de 28 jours et par centimètre carré.	a23,40	14,9	14,0	14,45
11b	Ciment . . 50fr		b19,70	14,0	13,40	12,60
	Main-d'œuvre : 5fr,25					

Tableau I

Dosage de béton par mètre cube de cailloux							
2,0 cailloux ou pierres cassées				2,5 cailloux ou pierres cassées			
250k 0m3,850	450k 0m3,880	650k 0m3960	1 000k 1m3,170	250k 0m3,850	450k 0,m3,880	650k 0m3,960	1 000k 1m3,170
m3 1,700	m3 1,760	m3 1,920	m3 2,340	m3 2,125	m3 2,200	m3 2,270	m3 2,295
0,180 1,920	0,210 2,000	0,254 2,090	0,305 2,580	0,180 2,250	0,210 2,400	0,254 2,560	0,320 3,020
k. 130,0	k. 225,0	k. 311,0	k. 388,0	k. 111,0	k. 187,5	k. 254,0	k. 331,0
2,28	2,33	2,39	2,41	2,26	2,28	2,33	2,39
k. 52,5 65,0 72,5 120,0	k. 122,5 140,0 178,3 208,3	k. 152,5 215,0 248,3 316,7	k. 207,5 252,5 285,0 355,0	k. 47,5 65,0 75,8 96,7	k. 72,5 105,0 106,7 183,3	k. 87,5 140,0 186,6 228.3	k. 172,5 180,0 233,3 316,6
m3 0,180 1,800	m3 0,210 1,900	m3 0,242 2,000	m3 0,305 2,440	m3 0,180 2,000	m3 0,210 2,230	m3 0,254 2,420	m3 0,305 2,920
k. 139,0	k. 236,0	k. 325,0	k. 409,0	k. 125,0	k. 202,0	k. 268,0	k. 364,0
2,28	2,35	2,38	2,42	2,30	2,28	2,34	2,35
k. 92,5 97,5 105,0 118,3	k. 147,5 157,5 200,0 225,0	k. 160,0 240,0 255,0 370,0	k. 250,0 280,0 305,0 391,7	k. 90,0 92,5 80,0 125,0	k. 103,0 125,0 165,0 198,3	k. 155,0 177,5 208,3 225,0	k. 180,0 225,0 248,3 276,7
19,67 21,60	24,28 26,15	28,72 30,72	32,03 34,45	18,70 21,44	22,21 24,49	25,22 27,29	28,00 30,66
30,20 22,20	17,40 16,60	13,35 12,80	12,65 12,30	28,80 23,20	21,20 19,60	18,0 15,4	16,1 13,6

N. B. — Les colonnes relatives aux prix de revient n'ont pas été données par M. Candlot. Ces prix sont en effet très variables suivant les localités. Il est toutefois d'un certain intérêt de disposer d'indications même approximatives, à la valeur absolue desquelles on attachera moins d'importance qu'à la valeur relative.

e) *Tableau II.* — Le tableau II a été obtenu avec des sables de moyenne grosseur, pesant 1400 kilogrammes au mètre cube et un ciment Portland pesant 1 300 kilogrammes au mètre cube. Avec un sable fin, les rendements seraient un peu plus élevés; ils le seraient un peu moins avec un sable à gros grains. Les mortiers ont été gâchés jusqu'à consistance plastique.

Tableau II

Dosage en volume	Dosage en poids. Poids de ciment par m. c. de sable	Destination usuelle	Résistances correspondantes sur lesquelles on peut compter		Quantité d'eau de gachage	Volume de mortier mis en place	Quantité de ciment entrant dans un m. c. de ciment.
			à la compression	à la traction			
	kilogr.		kilogr.	kilogr.	litres	litres	kilogr.
1 : 13	100	Grosse maçonnerie.			210	880	113
1 : 6,5	200				240	900	220
1 : 4,3	300	Maçonnerie d'épaisseur moyenne.			260	960	312
1 : 3	400				275	1 000	400
1 : 2,6	500	Enduits à l'air	200 à 300	20 à 30	290	1 050	476
1 : 2,1	600				300	1 090	550
1 : 1,6	800	Enduits à l'eau.	400 à 500	40	350	1 200	666
1 : 1,3	1 000				400	1 300	769
1 : 1	1 300	Dallages.			470	1 550	838

f) *Dosages recommandés pour diverses applications.*

Béton. 1 : 6 : 12 — Bétons très maigres pour remplissage, fondations de pavage (100 kilogrammes de ciment environ par mètre cube de béton).

» 1 : 5 : 10 — Bétons maigres pour fondations, murs ordinaires, etc. (130 kilogrammes de ciment environ par mètre cube de béton).

» 1 : 3 : 6 — Bétons ordinaires pour massifs de machines, murs de de soutènement, murs de quai, etc. (200 kilogrammes de ciment environ par m. cube de béton).

» 1 : 2 : 3 — Bétons riches pour ouvrages qui demandent une résistance exceptionnelle (400 kilogrammes de ciment environ par mètre cube de béton.)

32. Poids spécifique des bétons. — Le poids spécifique du béton varie avec celui du gravier qui le compose

Béton de machefer.	1 200 kilogrammes en moyenne (peut descendre jusqu'à 1 000 kilogrammes.
» briques .	1 500 à 1 800 kilogrammes).
» cailloux .	2 200 kilogrammes (allant jusqu'à 2 500 kilogrammes pour les cailloux lourds).
» armé . .	2 500 kilogrammes en moyenne.

(1) *Le Ciment*. Janvier 1897.

CHAPITRE II

—

MORTIERS ET BÉTONS
LEURS PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

Considérations générales. — Comme il a été dit précédemment, les mortiers et bétons doivent jouir des mêmes propriétés que les corps qui les composent, ciment, sable et cailloux; il en serait complètement ainsi sans les vides laissés dans ces corps par la présence de l'air qui n'a pu s'échapper pendant le gâchage ou bien encore par un excès d'eau, par une insuffisance de ciment dans le mortier ou de mortier dans le béton.

33. Variations de volume sous l'eau et à l'air. — Meier estime que le mortier de ciment pur peut s'allonger de 0,1 % sous l'eau et se contracter de 0,2 % à l'air.

M. le Dr Schumann donne les chiffres suivants pour les allongements sous l'eau de prismes de 100 millimètres de long et de 500 millimètres carrés de section, à la suite d'immersions de durées diverses.

Désignation		Durée de l'immersion en semaines					
		1	4	13	26	39	52
Dilatations en mm.	mortier pur . .	0,048	0,082	0,104	0,125	0,139	0,146
	mortier 1 : 3 de sable normal .	0,015	0,021	0,024	0,028	0,030	0,033

Ces chiffres résultent de moyennes calculées sur 10 échantillons divers dont le ciment avait des durées de prise variant de 20′ à 660′.

Le même auteur a trouvé pour des prismes de dimensions identiques en matériaux différents.

Au bout de 2 semaines :	briques	grès	calcaires	basaltes	granits
	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.
D'immersion dans l'eau . . .	+ 0,013	+ 0,065	+ 0,012	+ 0,034	+ 0,006
D'exposition à l'air.	— 0,011	— 0,065	— 0,013	— 0,038	— 0,015

Il est à remarquer que les allongements des mortiers de ciment au dosage de 1 : 3 sont sensiblement les mêmes que ceux des briques (dont le chiffre est une moyenne entre 4 variétés bien différentes de couleur et de cuisson) et environ 4 fois plus faibles que ceux des mortiers de ciment pur, ce qui parait assez naturel, puisque le sable, dont l'allongement peut être assimilé à celui du granit prédomine dans le mélange.

Les variations de volume des constructions en béton résultant de l'état hygrométrique sont donc inévitables ; ils exigent les mêmes précautions que pour les constructions en maçonnerie. On atténue les effets de ces variations par le choix des formes et la division de la construction en massifs restreints.

34. Variations de volume sous l'influence de la température. — On a vu au § **10** que les ciments, mortiers et bétons se dilataient à peu près dans les mêmes proportions que le fer sous l'influence d'une élévation de température. Toutefois il n'y a pas lieu de s'inquiéter outre mesure de l'importance de ce coefficient de dilatation, car la conductibilité des ciments, mortiers et bétons est très faible.

La propagation de la chaleur se faisant mal, et par suite très lentement, la dilatation est très faible, en dépit du coefficient élevé de dilatation. C'est ce qui explique que des conduites en ciment, armé ou non, de plusieurs kilomètres de longueur, se passent, sans aucun inconvénient de joints de dilatation, fait qui ne se produit pas avec les conduites métalliques.

35. Adhérence au fer. — Les mortiers et bétons jouissent à peu près de la même force d'adhérence que le ciment qui les agglo-

mètre carré de surface adhérente, montre le bien fondé de cette hypothèse. Pour mesurer l'adhérence par le procédé indiqué ci-dessus, il faudrait donc opérer avec des aciers extra-durs, ne présentant presque pas d'allongement.

D'après une note de M. Feret, au Congrès de Budapest de l'Association Internationale pour l'essai des matériaux, on peut déduire les conclusions suivantes des nombreuses expériences qu'il a effectuées dans le but d'étudier l'adhérence du ciment avec divers corps :

Avec les pierres, l'adhérence dépend beaucoup de leur grain ; elle est d'autant plus forte que les pierres sont plus poreuses ; elle parait indépendante des dimensions et des aspérités de surface.

Avec le fer, l'adhérence est plus forte au contraire, quand la surface de ce dernier est rugueuse au lieu d'être lisse. Cette constatation n'est pas en contradiction avec une observation précédente.

Avec un même corps quelconque, l'adhérence des mortiers est peu influencée par les qualités du ciment employé ; elle est même quelquefois plus forte avec les mauvais ciments qu'avec les bons.

Avec une même nature de ciment, elle est d'autant plus forte que celui-ci a été moulu plus fin.

En ce qui concerne la grosseur du sable, l'adhérence est plus grande avec le sable à gros grains qu'avec le sable fin.

Relativement à l'eau de gâchage, le maximum d'adhérence est donné par les mortiers plastiques à consistance un peu molle ; elle diminue considérablement quand le mortier est gâché trop sec.

Les mortiers maintenus à l'air humide ou dans l'eau, présentent une adhérence satisfaisante ; il n'en est pas de même si le mortier est maintenu à l'air sec.

Le froid ne parait avoir aucune influence fâcheuse sur l'adhérence.

36. Adhérence à d'autres substances. — Le ciment tient très bien sur le bois sec au début ; mais il s'en détache bientôt sous

l'influence des extensions et contractions du bois. Il en est de même du zinc dont le coefficient de dilatation est très élevé.

Le ciment s'attache parfaitement et d'une façon durable au verre protégé contre des variations de température trop importantes. Il en est de même de l'adhérence du ciment pour les surfaces glacées d'argiles cuites.

37. Résistance à l'usure. — La résistance du ciment à l'usure est intéressante pour les dallages, les tuiles, les chaussées, les tuyaux et égoûts dans lesquels circulent, entrainées par l'eau, des matières solides de toutes natures, et pour les murs de quai, exposés au mouvement de l'eau et aux frottements du matériel de navigation.

Le professeur D. Böhme s'est livré au laboratoire impérial d'essai des matériaux à l'examen de 28 échantillons de diverses marques allemandes de ciments. A cet effet il s'est servi de cubes de 50 centimètres carrés de section, présentés à une meule en fonte enduite d'émeri. Il notait avec soin, d'une part la force de pression exercée par le cube de béton sur la meule, de l'autre la durée de l'opération. L'usure était déterminée par la diminution des dimensions et contrôlée par la perte de poids. Il est ressorti de ces expériences que, pour obtenir des résultats satisfaisants, au point de vue de la résistance à l'usure, il ne faut pas employer de mortiers d'un dosage inférieur à 1 : 3. Les mortiers les plus convenables sont ceux au dosage de 1 : 1 et 1 : 2. La résistance à l'usure croît en même temps que celle à l'extension, toutefois cette augmentation n'est pas uniforme dans toute la masse. Mais comme d'autre part des ciments très résistants à l'extension l'ont été très peu à l'usure, la première résistance ne saurait donner qu'une idée générale de la seconde [1].

Les résultats de l'enquête de M. Gary sur les tuyaux en béton [2] sont très rassurants au sujet de l'usure des tuyaux. Il cite plus de 26 canalisations de 1 000 mètres de longueur en moyenne, quelques unes en service depuis 20 ans, pour lesquelles on n'a jamais

[1] Böxing et Schumann.
[2] *Le Ciment* de juillet 1896 et des mois suivants.

eu à faire de réparations importantes ; et parmi celles-ci la canalisation de Mayence, construite à ce moment là, depuis 18 ans, et comportant 40.000 mètres.

M. Gary recommande cependant, quand on a à craindre des entraînements de sable et de pierres, dans les conduites à forte déclivité, de disposer des résistances de manière à diminuer la vitesse des eaux, et à éviter une corrosion des parois par le dépôt des matières solides.

38. Propriétés mécaniques. — Les propriétés mécaniques des mortiers et bétons ne peuvent êtres définies d'une manière aussi rigoureuse que celles des métaux ; elles varient, comme on l'a vu, avec les proportions du mélange, suivant les procédés employés pour effectuer ce mélange et avec le *temps* pour des mortiers de même dosage et de même consistance. C'est ce qui explique les divergences constatées entre les résultats des divers expérimentateurs.

39. Résistance à l'extension. — *Influence du dosage.*

On a vu au début que la résistance d'un mortier à dosage normal, confectionné avec du sable dont les grains ont une résistance au moins équivalente à celle du ciment durci, doit être à peu de chose près égale à celle du ciment pur. Voici quelques chiffres obtenus par M. Souleyre, Ingénieur et Anglade, Conducteur des Ponts et Chaussées, et consignés dans un mémoire publié à Constantine.

Désignation	Résistance à l'extension de mélanges âgés	
	de 3 mois	d'un an
	kilogr.	kilogr.
Mortier à 300 kilogr. de ciment par mètre cube. .	13	17,3
» 400 » » »	14,6	17,8
» 500 » » »	21,2	26,2
» de ciment pur	»	25,6

Le maximum de résistance ne correspond pas toujours au ciment pur, puisque le mortier à 500 kilogrammes a présenté une résistance qui lui était supérieure.

MM. Souleyre et Anglade sont d'ailleurs arrivés aux mêmes conclusions pour les mortiers de chaux.

40. Influence du temps. — Voici quelques résultats trouvés par M. Candlot sur des mortiers formés d'une partie de ciment pour 3 de sable. Ils semblent montrer que les résistances croissent avec le temps.

Nature des ciments	Résistance à l'extension après un durcissement de							
	7 jours	28 jours	3 mois	6 mois	1 an	2 ans	3 ans	4 ans
	kilog.	kilog.	kilog.	kilog.	kilog.	kilog.	kilog	kilog.
Ciments de roches choisies . .	12,3	17,5	18,6	20,4	21,5	22,4	23,1	23,6
» de fabrication courante.	10,1	12,4	13,2	15,0	16,8	18,2	18,8	18,8

Il en est de même des résultats suivants extraits des « *Kalender für Eisenbahntechniker* », pour des mortiers de même dosage 1 : 3, durcis à l'air.

Résistance à l'extension après un durcissement de					
1 semaine	4 semaines	13 semaines	26 semaines	1 an	1 an et demi à 2 ans
kilogr.	kilogr.	kilogr.	kilogr.	kilogr.	kilogr.
16,3	20,5	28,5	37,2	43,9	46,8 — 51,9

D'autres expérimentateurs estiment que la résistance croît jusqu'à un certain moment (2 ou 3 ans), puis qu'elle diminue un peu.

Voici les résultats obtenus par MM. Souleyre et Anglade.

1° *Mortier à* 500 *kilogrammes de ciment par mètre cube de sable artificiel.*

Résistance à l'extension au bout de					
22 jours	3 mois	6 mois	1 an	2 ans	3 ans et demi
kilogr.	kilogr.	kilogr.	kilogr.	kilogr.	kilogr.
13,7	20,2	26,3	26,2	30,2	31,2

2° *Béton fait avec du mortier au dosage de* 500 *kilogrammes.*

Résistance à l'extension au bout de			
35 jours	6 mois	3 ans et demi	4 ans et demi
kilogr. 7,4	kg. Supérieure à . 14,1 Résistance probable 15,6	kilogr. 18,2	kilogr. 18,1

MM. Souleyre et Anglade arrivent aux conclusions suivantes pour la résistance à l'extension des mortiers de chaux hydrauliques.

« Pour les briquettes conservées à l'air libre, les courbes de « résistance tracées en prenant les temps pour abscisses peuvent « offrir des sinuosités dues à l'influence de la sécheresse ; les étés « correspondent à des minima de résistance.

« Pour les mortiers conservés *dans l'eau douce* à Constantine, « nous n'avons trouvé que des courbes paraboliques : les résis- « tances croissent d'une manière continue avec le temps (à part « des anomalies très rares, aux écarts très faibles). A deux ans « les mortiers ont atteint à peu de chose près leur résistance « limite dont la courbe se rapproche asymptotiquement.

Et chose curieuse : « Les mortiers fabriqués au manège de Phi- « lippeville et conservés *dans l'eau de mer* se rapprochent de « leur valeur limite par une série d'oscillations. De même les « courbes des mortiers conservés dans l'eau de mer à Bougie, « n'ont pas la même régularité que celles des mortiers conservés « dans l'eau douce. »

Il est probable que ces quelques règles s'appliquent aussi aux mortiers de ciment et aux bétons, et qu'à partir d'un certain âge leur résistance cesse de croître régulièrement et varie dans une faible mesure en plus ou en moins de la valeur limite.

41. Résistance à la compression. — La résistance à la compression est très difficile à mesurer. Quand on opère sur des prismes d'une certaine hauteur, la matière tend à se déjeter laté-

ralement et le phénomène de compression simple est accompagné d'une flexion latérale (flambage) qui amène une rupture prématurée ; si par contre, on réduit la hauteur des prismes essayés de façon à éviter ce phénomène, les résultats des essais varient avec cette hauteur, comme aussi avec la forme de la section et la nature des surfaces qui transmettent les compressions.

M. A. Fœppel, professeur à Munich [1] a montré que ces variations n'avaient pas l'importance admise, et qu'elles provenaient d'un phénomène secondaire auquel il a donné le nom de *résistance à l'enlacement*.

La résistance à l'enlacement n'est pas autre chose que l'effort de frottement que la surface comprimante exerce sur la surface comprimée ; cet effort enserre, *enlace* la seconde surface et semble, en l'empêchant de se dilater librement dans le sens transversal, augmenter sa résistance dans le sens longitudinal. On la supprime, ou on la réduit tout au moins, en graissant les surfaces avec de la cire ou de la stéarine. La rupture à la compression se produit alors suivant des tranches parallèles à l'axe de la pièce et non plus par gonflement de la partie centrale ou par séparation en prismes, comme on a coutume de l'indiquer. On remarque aussi que la séparation des tranches (rupture des prismes) se fait sans bruit ni choc et pour des compressions bien inférieures à celles qui occasionnent la rupture dans les conditions ordinaires. La résistance vraie des corps pierreux serait par suite deux fois plus faible que celles qui vont être indiquées. On peut objecter, il est vrai, à cette théorie, que la substance étrangère introduite entre les deux surfaces comprimées, peut pénétrer dans le prisme et y exercer des pressions latérales, à la façon des liquides, de nature à provoquer la séparation en lamelles longitudinales.

D'ailleurs l'auteur même de cette théorie, sent qu'elle est difficile à défendre, et s'il ne trouve pas des raisons péremptoires permettant de l'éliminer complètement, il apporte des arguments suffisants pour la mettre en doute.

Quoi qu'il en soit, la théorie de l'enlacement, combinée avec l'hypothèse d'un accroissement de résistance à la compression

[1] Voir *le Ciment* de Mars et Avril 1900.

fourni par cet effort, explique bien toute une série de phénomènes bizarres en apparence, parmi lesquels il ne sera mentionné que les suivants :

1° M. Tourtay, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, a montré que la résistance des joints en mortier croissait quand leur épaisseur diminuait, qu'un coulis de ciment ne se désagrégeait pas avant les pierres qui lui transmettaient les pressions, et qu'il pouvait supporter ainsi des pressions de 700 à 800 kilogrammes par centimètre carré [1].

On peut donc dire, en se basant sur la théorie ci-dessus, que l'effet de la résistance à l'enlacement est d'autant plus grand que la hauteur du prisme essayé est plus faible.

2° MM. Souleyre et Anglade ont constaté comme M. Tourtay, que « le mortier se désagrège d'abord « sur les angles de l'éprouvette, puis « sur les bords des joints et tombe en « poussière sur une certaine profon- « deur; il se creuse une rainure à sec- « tion demi-cylindrique sur tout le « pourtour du joint (fig. 1). On peut « ensuite dépasser cette pression en ne désagrégeant le mortier « que peu à peu sur son pourtour.

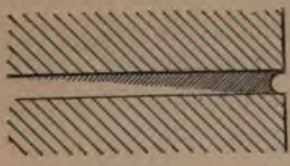


Fig. 1

« La pression qui produit la désagrégation le long des joints « parait aller en croissant avec les dimensions des blocs. Ainsi un « mortier de 10 mois conservé dans l'eau a donné avec des demi- « cubes de 0m,06 une résistance à la désagrégation de 220 kilo- « grammes par centimètre carré (170 kilogrammes, désagrégation « sur les angles, 220 kilogrammes désagrégation sur le pourtour.) « Le même mortier à 5 mois (donc probablement moins résistant) « conservé dans l'eau, n'a pas souffert d'une pression de 300 kilo- « grammes avec des blocs de 0m,10 de côté : la pierre s'est rompue « avant que le joint se soit désagrégé. »

Enfin, dans d'autres expériences faites sur des demi-cubes de 0m,006, de mortier âgé de 10 mois, les mêmes auteurs ont trouvé que l'altération des angles commençait à 85 kilogrammes et que

[1] *Annales des Ponts et Chaussées*, 2e Semestre 1885, p. 582.

la désagrégation en grand se produirait pour une compression de 170 kilogrammes par centimètre carré.

D'où cette conclusion : *l'effort d'enlacement est d'autant plus intense que les surfaces comprimées sont plus grandes*, ce qui est logique, puisque le frottement croit avec les surfaces en contact.

On admettra donc que : *dans les prismes de faible hauteur la rupture peut se produire de deux manières, suivant que les surfaces comprimées frottent ou ne frottent pas l'une sur l'autre, et que les valeurs à prendre dans le deuxième cas sont approximativement la moitié de celles relatives au premier cas.*

42. Compression des prismes d'une certaine hauteur. — Quand un prisme chargé debout, n'est pas appuyé latéralement et que sa hauteur est suffisamment grande par rapport à sa base, la compression est souvent accompagnée d'une flexion latérale qu'on nomme flexion par compression, ou *flambage*.

Faute d'observations faites sur les ciments au sujet de ce phénomène, on pourra admettre avec une certaine approximation les lois suivantes observées pour les pièces métalliques.

L'effort F que peut supporter une barre comprimée, articulée à ses deux extrémités est donné par la formule d'Euler :

$$F = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

où $\pi = 3.1416$,

E = coefficient d'élasticité de la matière comprimée,

I = moment d'inertie,

l = longueur libre de la barre mesurée entre les articulations.

On peut poser :

$$I = SK^2.$$

expression dans laquelle S représente la section de la barre,

K son rayon de giration.

L'effort par unité de section devient par suite :

$$R = \frac{F}{S} = \pi^2 \frac{ESK^2}{Sl^2} = \pi^2 \frac{EK^2}{l^2}.$$

Cette dernière forme est très usitée.

Quand la pièce n'est pas articulée à ses extrémités, la longueur l à introduire dans la formule est une fraction ou un multiple de la longueur réelle L de la pièce. Ces fractions ou multiples sont indiquées (fig. 2) en regard des modes d'appui correspondants.

L'appui sur une large base peut être assimilé à un encastrement. Un pilier maintenu en son milieu, ou en deux points situés au tiers de sa hauteur, rentrera dans les cas définis par les diagrammes 3 et 4 de la figure 2.

Le coefficient d'élasticité E est très variable, on verra au paragraphe suivant les valeurs à lui donner dans la pratique. On peut remarquer toutefois que constant au début de la compression, il diminue à partir d'une certaine limite, et d'autant plus rapidement que l'effort est plus voisin de la résistance à la rupture par compression simple. On ne doit donc pas lui attribuer une valeur fixe, mais celle qu'il aura au moment de la rupture et que l'on peut déterminer par une série d'approximations à l'aide des tableaux établis au § 54.

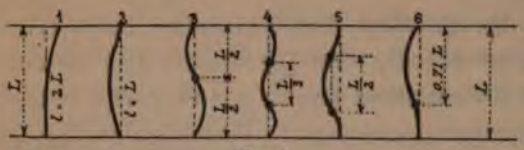


Fig. 2

Comme l'effet de l'enlacement au milieu de la barre, diminue avec sa hauteur, il sera prudent pour les pièces de grande hauteur, par rapport à leur base, de prendre comme résistance maxima la résistance réelle à la compression, soit la moitié à peu près de celle qui est indiquée sans tenir compte de cet effet de l'enlacement.

43. Influences diverses sur la résistance à la compression. — La résistance à la compression des mortiers et bétons de ciment croît avec le dosage et à dosage égal, avec la dureté des matières inertes qui entrent dans le mélange. Quand ces matières sont elles-mêmes plus dures que le ciment durci, il est probable que, comme pour la résistance à l'extension, il y a certains dosages pour lesquels la résistance est supérieure à celle de la pâte de ciment pur durcie. On ne possède malheureusement aucune donnée à ce sujet.

Influence de l'âge sur la résistance à la compression. — La résistance à la compression des mortiers et bétons de ciment croît avec l'âge et tend vers un maximum dont elle se rapproche très rapidement pendant la première année.

Les valeurs suivantes, généralement admises, sont extraites d'un tableau dressé par M. Candlot.

Désignation	Résistance à la compression après une durée de						
	7 jours	28 jours	3 mois	6 mois	1 an	2 ans	3 ans
	kilogr.	kilogr.	kilogr.	kilogr.	kilogr.	kilogr.	kilogr.
Mortier 1 : 3	90	133	166	201	208	238	250

Voici quelques résistances obtenues par divers expérimentateurs dans des conditions différentes.

Pour se rapprocher des conditions pratiques, R. Dyckerhoff a fait exécuter des parallélipipèdes en béton de 1 mètre de hauteur 0m,40 de largeur et de longueur. Après un durcissement à l'air de 7 mois, on a découpé dans ces blocs des cubes de 0m, 20 de côté et on les a essayés à la compression. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant.

Ciment	Sable	Gravier	Résistance par cmq.	Ciment	Sable et gravier mélangés	Pierres cassées	Résistance par cmq.
			kilogr.				kilogr.
1	3	6	140	1	5	8 basalte	147,9
1	4	8	121,2	1	6	10 calcaire	121,0
1	3	10	94,1	1	7	11 grès	83,0

Ces mélanges sont, comme on le voit, très pauvres en ciment.

Les chiffres suivants ont été obtenus par M. Von Monk sur des mélanges âgés de 30 jours, mal préparés (n'ont pas été comprimés et ont été mal exposés pendant leur durcissement). Le ciment employé était de bonne qualité.

On peut admettre que la résistance d'un béton simplement

coulé dans l'eau atteint à peu près le 1/6 de celle d'un même mélange exécuté dans les conditions normales.

Ciment	Sable	Pierres cassées	Résistance par cmq.	Ciment	Sable	Pierres cassées	Résistance par cmq.
			kilogr.				kilogr.
1	»	»	305	1	3	»	180
1	1	»	260	1	3	2	110
1	2	»	225	1	3	3	100
1	2	2	145	1	3	4	65
1	2	3	110	1	4	»	115
»	»	»	»	1	4	3	60

44. Coefficients d'élasticité. — La connaissance des déformations est comme on le verra par la suite, d'une importance extrême pour l'étude des résistances à la flexion simple, à la flexion par compression et au cisaillement, des mortiers de béton de ciment, armés ou non. Il y a donc lieu de résumer les principales expériences effectuées à ce sujet.

Les premières expériences dont on dispose, ont porté sur deux mortiers âgés de 6 mois et durcis à l'air ; elles ont donné pour une compression de $7^{kg},1$ par centimètre carré.

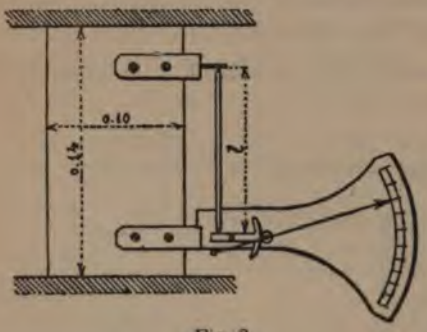


Fig. 3

(1) $E = 0,54 \times \overline{10}^{9}$

(2) $E = 0,97 \times \overline{10}^{9}$.

Les taux de 38 et 40 kilogrammes par centimètre carré signalés pour la rupture semblent indiquer des éprouvettes très défectueuses.

Les expériences de MM. Coignet et de Tedesco, citées dans leur communication de mars 1894 à la Société des Ingénieurs civils de France, ont été effectuées sur des blocs à base carrée de $0^{m},10 \times 0^{m},10$ et $0^{m},14$ de hauteur, à l'aide d'un élasticimètre (fig. 3) dont chaque division répondait à $\frac{1}{100}$ de millimètre, les allongements étaient mesurés sur des longueurs de 125 et 120 millimètres.

Spécification des bloc d'essai	Pression par centimètre carré	Déformation	Coefficients d'élasticité $E_s = \frac{10000\,R}{a}$	Coefficients d'élasticité instantanée entre les diverses compressions	Rapport n ou $\frac{20 \times 10^9}{E_s}$
	kilogr.	mètres			
I	31,77	0,00004	$7,94 \times 10^9$	$7,94 \times 10^9$	
	38,83	0,00008	4,85 »	1,77 »	
	52,95	0,00056	0,94 »	0,29 »	
Dosage : 400 kilogrammes. — Age : 53 jours. — Durci à l'air. — Gâché à la main.	60,01	0,00072	0,83 »	0,44 »	
	61,77	0,00096	0,64 »	0,73 »	21,20
	63,54	0,00136	0,46 »	0,44 »	
$l = 0,125$.	65,30	0,00176	0,37 »	0,44 »	
	67,07	0,00200	0,33 »	0,73 »	
	70,60	0,00216	0,32 »	0,23 »	
II	19,41	0,00008	2,43 »	2,43 »	
	24,71	0,00016	1,54 »	0,66 »	
	30,00	0,00020	1,50 »	1,32 »	
Dosage : 400 kilogrammes. — Age : 53 jours. — Durci à l'air. — Gâché à la main.	35,30	0,00028	1,26 »	0,66 »	
	44,12	0,00036	1,22 »	1,10 »	
	49,42	0,00044	1,12 »	0,66 »	15,80
$l = 0,125$.	52,95	0,00052	1,02 »	0,44 »	
	58,24	0,00060	0,97 »	0,66 »	
	63,30	0,00068	0,96 »	0,63 »	
	67,07	0,00076	0,88 »	0,47 »	
	93,54	0,000300	0,31 »	0,12 »	
III	52,95	0,000417	1,27 »	1,27 »	
	60,01	0,000500	1,20 »	0,85 »	
Dosage : 500 kilogr. — Age : 40 jours. — Durci à l'eau chaude. — Gâché à la main.	67,07	0,000583	1,15 »	0,85 »	
	74,13	0,000666	1,11 »	0,85 »	
	81,19	0,000733	1,10 »	1,05 »	15,75
$l = 0,120$.	88,25	0,000833	1,06 »	0,11 »	
	91,78	0,000917	1,00 »	0,12 »	
	95,31	»	»	»	
IV	34,53	0,00008	4,19 »	4,19 »	
	44,12	0,00016	2,76 »	1,20 »	
Dosage : 700 : kilogr. — Age : 50 jours. — Durci à l'eau chaude. — Gâché à la machine.	56,48	0,00024	2,36 »	1,55 »	
	68,83	0,00032	2,15 »	1,55 »	7,24
	81,19	0,00040	2,03 »	1,55 »	
$l = 0,125$.	93,54	0,00048	2,05 »	2,21 »	
	107,66	0,00056	1,93 »	1,20 »	

Ces résultats ont été représentés graphiquement dans la figure 4 en prenant les déformations comme abscisses et les efforts comme ordonnées.

Il ressort de l'examen de ces courbes et de la colonne IV du tableau ci-dessus que la déformation se compose de deux parties bien distinctes.

1° *La période d'élasticité parfaite* pendant laquelle la matière ne se raccourcit que très faiblement.

2° *La période de ductilité*, pendant laquelle les déformations deviennent subitement très sensibles.

Par analogie avec ce qui se passe pour les autres matériaux, on appelle *limite de proportionnalité*, la limite de la première période ; la limite de la deuxième est la rupture.

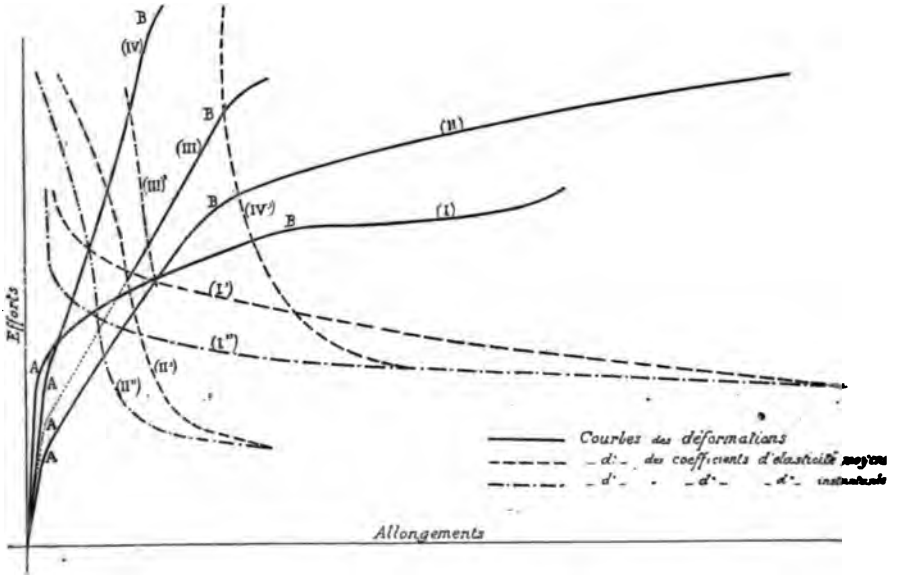


Fig. 4

Les expériences suivantes, dont *Le Ciment* de juin 1896 a rendu compte ont été exécutées par le lieutenant de Génie, M. Grut. Elles donnent les allongements d'éprouvettes de mortier au dosage de 1 : 3, de deux mois d'âge, sous des tractions de 1 à 19 kilogrammes par centimètre carré. Ces éprouvettes mesuraient

$0^m,50 \times 0^m,50$ et $0^m,97$ de hauteur utile. Les chiffres du tableau sont exprimés en centimètres.

Nos d'ordre des éprouvettes	Kilogrammes par centimètre carré									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I . . .	0,05	0.09	0,13	0,16	0,20	0,24	0,27	0,30	0,41	0,44
II . . .	0,05	0,08	0,11	0,12	0,17	0,20	0,33	0,41	0,47	0,53
III . . .	0,05	0,09	0,13	0,16	0,21	0,25	0,27	0,30	0,34	0,38
IV . . .	0,03	0,07	0,15	0,22	0,27	0,35	0,42	0,49	0,55	0,57
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I . . .	0,51	0,76	0,88	1,09	2,38	»	»	»	»	Rupture.
II . . .	0,59	0,65	0.81	0,95	rupture	»	»	»	»	
III . . .	0,43	0,46	0,49	0,54	0,72	1,05	1,31	1,37	1,55	
IV . . .	0,65	0,72	0,78	0,85	1,45	1,68	1,80	2;38	»	

Les numéros I et III qui ont donné des résultats à peu près identiques jusqu'à 8 kilogrammes par centimètre carré, donnent pour $1\ K : E = \frac{1 \times 97}{0,0005} = 194000$ kilogrammes et successivement pour les diverses tractions.

Nos	1	2	3	4	5	6	7	8	12	15	19
	kilogr.	kilogr.	kilogr.	kilogr.	kilogr.	kilogr.	kilogr.	kilogr.	kilogr.	kilogr.	kilogr.
I.	194000	215555	224000	242500	242500	242500	251000	258000	153000	61400	»
III.	194000	215555	224000	242500	230000	232800	251000	258000	253000	203000	119000

45. Expériences d'élasticité à la traction de l'Inspecteur général Bourdelles (service des phares et balises). — Rapporteur de Joly, Ingénieur en chef. — Les éprouvettes étaient des prismes de $1^m,04 \times 0^m,025 \times 0^m,04$ (10 centimètres carrés) et de $1^m,20 \times 0^m,12 \times 0^m,167$ (200 centimètres carrés). Les têtes de ces éprouvettes étaient disposées de manière à pouvoir être saisies entre les griffes d'une machine de traction, système Falcot.

Les déformations étaient enregistrées à l'aide de l'élasticimètre Klein. Les éprouvettes étaient confectionnées, soit en pâte pure à

consistance normale, soit en mortier plastique au dosage de 600 kilogrammes par mètre cube de sable normal, soit en béton au dosage de 500 kilogrammes par 1/2 mètre cube de sable et 1/2 mètre cube de gravier. Les éprouvettes de 10 centimètres carrés ont été conservées sous l'eau ; les éprouvettes de 200 centimètres carrés, l'ont été à l'air humide.

Contrairement aux expériences de compression de M. L. Durand-Claye et de MM. Souleyre et Anglade, aucun des essais n'a accusé de limite d'élasticité précise. Cette limite semble être très voisine de la rupture pour le ciment, et ne jamais descendre jusqu'aux 3/4 de la limite de rupture pour les mortiers et bétons de ciment.

Le coefficient d'élasticité paraît être indépendant des charges ; il augmente avec l'âge des éprouvettes pour les ciments purs. C'est ainsi que pour les éprouvettes de 10 centimètres carrés en ciment de la marque E. Candlot et Cie, on a relevé les coefficients suivants :

28 jours E = 188 300 kilogr. 50 jours E = 237 000 kilogr.
40 jours E = 222 800 kilogr. 100 jours E = 315 900 kilogr.

Le coefficient d'élasticité à la traction a été trouvé sensiblement constant pour les diverses marques de ciment.

A 61 jours. Demarle et Lonquety E = 252 000 kilogr.
A 60 jours. Darcy Lefebvre et Lavocat E = 258 700 kilogr.
A 60 jours. Vicat de Marseille E = 255 300 kilogr.

On a plus spécialement :

Désignation	Résistance moyenne à la rupture	Coefficient moyen d'élasticité
	kilogr.	kilogr.
Pour la pâte pure	23,8	180 000
600 kilogr. par mètre cube de sable.	9,9	210 900
500 kilogr. par demi-mètre cube de sable et demi mètre cube de gravier	9.5	213 400

Les conclusions de M. de Joly sont les suivantes :

On peut donc admettre que le coefficient d'élasticité du ciment

est compris entre 1/3 et 1/7 de celui du fer et que celui des mortiers et des bétons est compris entre 1/5 et 1/12 de celui du fer.

Le coefficient d'élasticité à la traction est égal ou peu supérieur à celui à la compression.

46. Expériences de Bach. — Le professeur Bach a fait une série d'expériences sur des éprouvettes cylindriques de 1 mètre de longueur et de $0^m,25$ de diamètre (de 500 centimètres carrés de section environ). Les résultats obtenus se rapprochent donc plus des conditions pratiques que ceux obtenus sur des prismes de dimensions beaucoup moindres. Les allongements ont été mesurés après l'application d'une série de forces égales donnant les mêmes résultats. Les charges étaient graduées de 0 à 4000 kilogrammes, et de 4000 à 8000 kilogrammes etc., jusqu'à 20000 kilogrammes.

Le résumé de ces expériences est indiqué au tableau suivant.

On a représenté par *a* l'allongement qui s'annule lors de l'enlèvement des charges, c'est l'allongement élastique et par *b l'allongement total*, comprenant la somme de l'allongement élastique et de l'allongement *permanent* (qui subsiste après l'enlèvement de l'effort).

Les essais n'ont été faits que sur 2 marques de ciment A et B, mais avec des dosages divers. Comme caractéristique de ces deux ciments, le ciment A a laissé 1,9 %, le ciment B, 3,3 % de résidu au tamis de 900 mailles et les épreuves normales ont donné au bout de 28 jours (1 jour à l'air et 27 jours sous l'eau) $25^k,5$ pour le ciment A et $21^{ks},2$ pour le ciment B.

L'âge des éprouvettes était de 76 à 97 jours. Tous les résultats précédents, à une exception près, sont des moyennes de 3 expériences et il y a lieu de noter que ces 3 expériences ont donné des différences relativement faibles et que même, pour certains mélanges, la concordance a été tout à fait inattendue.

Bach a fait de nouvelles expériences en 1896 sur le ciment A. Ces expériences très nombreuses et très variées ont été effectuées sur des mortiers à différents dosages.

Marque des ciments	Dosages	Résistance à la compression en kilogrammes par centimètre carré	a, allongement élastique / b, allongement total par mètre de longueur et pour 1 kil. par cmq. pour des charges de : 0 à 4000k	4000k à 8000k	8000k à 12000k	12000k à 16000k	16000k à 20000k
A	1 : 2 1/2 : 5 sable et cailloux roulés	96,3	a $\frac{1}{306000}$	$\frac{1}{255000}$	$\frac{1}{226000}$	$\frac{1}{211000}$	$\frac{1}{194000}$
			b $\frac{1}{267000}$	$\frac{1}{224000}$	$\frac{1}{200000}$	$\frac{1}{182000}$	$\frac{1}{164000}$
B	1 : 2 1/2 : 5 sable et cailloux roulés	62,0	a $\frac{1}{240000}$	$\frac{1}{190000}$	$\frac{1}{167000}$	$\frac{1}{154000}$	$\frac{1}{142000}$
			—	$\frac{1}{174000}$	$\frac{1}{144000}$	$\frac{1}{121000}$	$\frac{1}{106000}$
A	1 : 2 1/2 : 5 sable et muschelkalk cassé	130,7	a $\frac{1}{349000}$	$\frac{1}{291000}$	$\frac{1}{258000}$	$\frac{1}{241000}$	$\frac{1}{227000}$
			b $\frac{1}{288000}$	$\frac{1}{257000}$	$\frac{1}{223000}$	$\frac{1}{210000}$	$\frac{1}{198000}$
B	1 : 2 1/2 : 5 sable et muschelkalk cassé	110,5	a $\frac{1}{349000}$	$\frac{1}{276000}$	$\frac{1}{242000}$	$\frac{1}{224000}$	$\frac{1}{206000}$
			b $\frac{1}{306000}$	$\frac{1}{251000}$	$\frac{1}{211000}$	$\frac{1}{200000}$	$\frac{1}{174000}$
A	1 : 7 1/2 gravillon	139,9	a $\frac{1}{336000}$	$\frac{1}{280000}$	$\frac{1}{249000}$	$\frac{1}{242000}$	$\frac{1}{214000}$
			b $\frac{1}{296000}$	$\frac{1}{247000}$	$\frac{1}{221000}$	$\frac{1}{214000}$	$\frac{1}{190000}$
B	1 : 7 1/2 gravillon	86,9	a $\frac{1}{252000}$	$\frac{1}{200000}$	$\frac{1}{175000}$	$\frac{1}{162000}$	$\frac{1}{149000}$
			b $\frac{1}{215000}$	$\frac{1}{171000}$	$\frac{1}{149000}$	$\frac{1}{135000}$	$\frac{1}{121000}$
A	1 : 3 + 6 sable et cailloux roulés	115,0	a $\frac{1}{302000}$	$\frac{1}{252000}$	$\frac{1}{223000}$	$\frac{1}{208000}$	$\frac{1}{192000}$
			b $\frac{1}{265000}$	$\frac{1}{219000}$	$\frac{1}{196000}$	$\frac{1}{186000}$	$\frac{1}{169000}$
B	1 : 3 + 6 sable et cailloux roulés	74,4	a $\frac{1}{270000}$	$\frac{1}{213000}$	$\frac{1}{188000}$	$\frac{1}{173000}$	$\frac{1}{159000}$
			b $\frac{1}{233000}$	$\frac{1}{185000}$	$\frac{1}{161000}$	$\frac{1}{148000}$	$\frac{1}{130000}$
A	1 : 3 + 6 sable et muschelkalk cassé	118,7	a $\frac{1}{329000}$	$\frac{1}{275000}$	$\frac{1}{244000}$	$\frac{1}{227000}$	$\frac{1}{209000}$
			b $\frac{1}{305000}$	$\frac{1}{249000}$	$\frac{1}{220000}$	$\frac{1}{203000}$	$\frac{1}{186000}$
B	1 : 3 + 6 sable et muschelkalk cassé	90,2	a $\frac{1}{294000}$	$\frac{1}{233000}$	$\frac{1}{204000}$	$\frac{1}{188000}$	$\frac{1}{173000}$
			b $\frac{1}{254000}$	$\frac{1}{198000}$	$\frac{1}{172000}$	$\frac{1}{152000}$	$\frac{1}{137000}$
A	1 : 9 gravillon.	120,5	a $\frac{1}{328000}$	$\frac{1}{273000}$	$\frac{1}{242000}$	$\frac{1}{226000}$	$\frac{1}{208000}$
			b $\frac{1}{305000}$	$\frac{1}{250000}$	$\frac{1}{221000}$	$\frac{1}{205000}$	$\frac{1}{188000}$
B	1 : 9 gravillon.	65,3	a $\frac{1}{236000}$	$\frac{1}{187000}$	$\frac{1}{164000}$	$\frac{1}{152000}$	$\frac{1}{139000}$
			b $\frac{1}{205000}$	$\frac{1}{158000}$	$\frac{1}{135000}$	$\frac{1}{122000}$	$\frac{1}{109000}$

Voici la moyenne des résultats obtenus pour des prismes comprimés de 0 à 4000 kilogrammes.

Béton. Ciment 1, sable 5, cailloux roulés 5.	Allongements	$\frac{1}{156000}$
» 1, » 2 1/2, pierres cassées 5.	»	$\frac{1}{329000}$
Mortier. Ciment pur.	»	$\frac{1}{211000}$
»	»	$\frac{1}{190000}$
Ciment 1, sable 1 1/2.	»	$\frac{1}{281000}$
» 1, » 3.	»	$\frac{1}{232000}$
» 1, » 4 1/2.	»	$\frac{1}{159000}$

L'auteur conclut de ces expériences que le mortier de ciment Portland pur possède : 1° une élasticité plus grande à la compression que le mortier de ciment et de sable, mais qu'aux environs du dosage 1 : 3 1/2 ce rapport varie en sens inverse. Le mortier maigre jouit donc d'une élasticité à la compression plus grande que le mortier gras et que le mortier très maigre ;

2° Que le rapport de l'allongement total et l'allongement élastique varient de 1,10 et 1,20 et que sa valeur moyenne est 1,20 ;

3° Les deux sortes d'allongements augmentent avec la charge et même plus vite que ne le font les charges. Les charges extrêmes employées ci-dessus ont occasionné des allongements de 1,6 à 1,8 fois ceux qui se sont produits pour les charges initiales ;

4° L'élasticité du béton à la compression ne paraît pas différer beaucoup de celle des mortiers gras ou maigres, ce qui montre que les matières ajoutées au ciment, sable ou pierres cassées, possèdent la même élasticité que ce dernier ; elles seraient plutôt un peu plus élastiques.

La conclusion (3) ne s'applique pas au seul ciment ; elle est absolument générale. En effet, la période de *proportionnalité* pendant laquelle les allongements croissent proportionnellement aux efforts, doit être considérée comme une simple hypothèse d'après les dires les plus récents des expérimentateurs. En réalité, elle ne se réaliserait jamais. On peut l'expliquer en supposant que la première partie du mouvement élastique qui a lieu quand la cohésion du corps possède encore toute la résistance, exige un effort

plus grand que la partie subséquente pendant laquelle cette cohésion s'est relachée peu à peu.

Bach a cherché à exprimer cette loi avec la formule suivante :

$$S^m = \frac{a}{\alpha}$$

dans laquelle S représente la loi de variation par unité, α est l'allongement positif ou négatif ; m, une constante qui varie avec chaque corps et qui est toujours plus grande que l'unité ; et a, une constante qui dépend des propriétés du corps. Pour le ciment pur, Bach donne à m des valeurs comprises entre 1,090 et 1,093 ; pour les mortiers, quel que soit leur dosage des valeurs comprises entre 1,110 et 1,117 ; pour les bétons m varie de 1,145 à 1,207.

47. Formule d'Hartig. — Dans un autre ordre d'idées, Hartig a proposé la formule suivante pour déterminer le coefficient du ciment pur E, en fonction de l'âge du mortier exprimé en jours t

$$(1) \qquad E = 100\,000 \left(4{,}556 - \frac{183{,}5}{79 + t}\right).$$

E est exprimé en kilogrammes par centimètre carré.

Et pour les mortiers au dosage de 1 : 3 (sable normal)

$$E = 100\,000 \left(5{,}35 - \frac{421}{200 + t}\right).$$

Si l'on fait $t = 7$ jours, 28 jours, 100 jours, 180 jours, 360 jours, on trouve les chiffres résumés dans le tableau suivant :

Valeurs de E Coefficient d'élasticité à la compression	Age en jours				
	7	28	100	180	360
Mortier de ciment pur	242000	284000	353000	385000	415000
Mortier { 1 ciment . . . . . . 3 sable normal.	332000	350000	395000	425000	460000

Le tableau ci-après résume les résultats d'expériences à la traction et à la compression de bétons de différents dosages, prismes

de 9 × 9 de section et 25 centimètres de longueur, faites par les soins de la commission des voutes de l'Association des Ingénieurs et Architectes autrichiens en 1891-1892 (¹).

Dosage	Compression						Extension					
	Age en jours	Rupture	Moyenne	Coefficient d'élasticité	Moyenne		N°	Age en jours	Rupture	Moyenne	Coefficient d'élasticité	Moyenne
		kg.	kg.	kg.	kg.				kg.	kg.	kg.	kg.
1 : 3 (1 de ciment 3 de sable)	99	185		461000		D'après la formule d'Hartig	243	285	26,6		301000	
	101	216	215	300000	385000	395000	244	291	21,8	24,4	454000	359000
	103	243		405000		(100 jours)	245	292	24,9		323000	
	103	153		216000			246	293	22,9		258000	
	101	117	143	225000	237000		247	294	24,0	22,4	240000	246000
	111	159		270000			248	295	20,4		240000	
	112	206		318000			240	295	23,0		279000	
	112	167	192	330000	333000		250	300	25,4	21,8	330000	314000
	112	203		347000			251	300	17,0		332000	
1 : 2 : 3							419	194	27,1	24,9	236000	280000
							420	197	22,6		325000	
1 : 1 : 1	89	194	201	264000			422	198	16,7	18,1	238000	250000
	95	208					423	199	19,5		261000	
	95	241					424	200	29,8		357000	
1 : 3	99	141		322000		D'après la formule d'Hartig	425	144	16,8		450000	
	101	195	200	405000	364000	395000	426	149	20,5	17,1	400000	403000
	101	215		»		(100 jours)	427	149	14,3		359000	
	101	249		»			428	149	16,9		400000	
	96	266		329000	328000		429	150	16,7		399000	
	99	168	223	327000			430	151	19,2	17,9	400000	437000
	99	234					431	151	17,9		512000	

48. Expériences de MM. Souleyre et Anglade. — Les études de MM. Souleyre et Anglade, ont porté sur des mortiers au dosage

(¹) Voir les essais comparatifs de voutes de matériaux divers. Rapport de la Commission des voutes de l'Association des Ingénieurs et Architectes Autrichiens, extrait de la *Revue Technique*. — Traduction de Tedesco, Zschokke et Candlot.

de 500 kilogrammes de ciment Portland par mètre cube de sable.

Compression. — A l'âge de trois mois, les *lignes de compression* obtenues en portant en abscisses les affaissements, et en ordonnées, les efforts correspondants, affectaient sensiblement la forme de lignes droites jusqu'à la limite d'élasticité. Cette limite répondait à l'effort de 90 kilogrammes, soit aux 62 centièmes environ de la charge de rupture : 146 kilogrammes. Les coefficients d'élasticité moyens trouvés varient entre 12,8, 16,8 et 20,8 $\times 10^{8}$.

A l'âge de 2 ans 1/2, la limite d'élasticité atteignait 110 kilogrammes, soit environ 61 % de la charge de rupture 180 kilogrammes, le coefficient d'élasticité moyen ressort à 12 $\times 10^{8}$.

Ces ingénieurs ont remarqué que les coefficients d'élasticité trouvés variaient suivant l'état hygrométrique de l'air ambiant au moment de l'expérience.

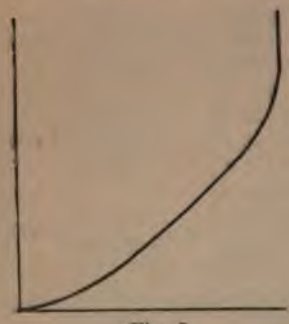


Fig. 5

La courbe de compression de la matière, alors qu'elle est éprouvée pour la première fois, présente à l'origine une partie légèrement courbée, tournant sa concavité vers le haut (fig. 5) ; et cette partie se rectifie à la suite d'efforts répétés, mais inférieurs à ceux répondant à la limite d'élasticité. Cette limite atteinte, la répétition des efforts donne lieu à des courbes tournant au contraire leur concavité vers le bas.

Lors de la rupture, la déformation totale est 10 à 20 fois plus grande que celle qui a été constatée au moment où la limite d'élasticité a été atteinte.

Extension. — Les expériences à l'extension sont beaucoup plus délicates, par suite de la petitesse des allongements répondant aux faibles efforts en jeu. Les déformations suivent probablement des lois analogues à celles qui ont été observées pour la compression. Il y a lieu de remarquer toutefois que la rupture est précédée de déformations se succédant par saccades, rappelant celles que M. Le Chatelier, Ingénieur des Constructions Navales a observées sur les métaux surchauffés. Les allongements locaux mesurés lors

de la rupture sur des éprouvettes soumises à une rupture brutale, ont été trouvés 10 à 20 fois plus grands que les allongements moyens; cette observation explique la résistance considérable au choc des corps à base de ciment.

L'observation montre que la répétition des efforts a pour effet une tendance à l'augmentation des coefficients d'élasticité et à la diminution des allongements.

49. Lois générales de la déformation des mortiers et bétons. — Il résulte des observations précédentes qu'il n'est pas aisé d'établir des lois très précises sur la déformation du béton, dont les propriétés dépendent de nombreux facteurs, tels que la proportion des matières inertes mélangées au ciment, la nature de ces dernières, la quantité d'eau employée au gâchage, l'intensité du pilonnage, l'âge du mortier, les conditions atmosphériques dans lesquelles son durcissement est effectué, etc., etc. Il semble cependant possible d'affirmer qu'un corps à base de ciment, bien constitué, doit suivre assez fidèlement les lois générales de la résistance des matériaux établies pour les métaux et pour le fer en particulier.

Rappelons donc quelques-unes de ces lois générales.

Les corps dont la construction fait usage, ne sont ni des corps *parfaitement élastiques*, ni des corps *mous*, tels que la mécanique les définit. D'une façon générale, ils participent successivement de la nature de ces deux genres de corps ; ils restent parfaitement élastiques tant que les déformations n'ont pas dépassé une certaine limite, pour se déformer alors d'une manière permanente.

Lorsque l'on fait croître graduellement les forces appliquées aux corps, on rencontre tout d'abord une période d'élasticité presque parfaite, puis une période de ductilité pendant laquelle une partie de la déformation subsiste après l'enlèvement des charges. Cette seconde période précède la rupture. Il n'y a pas de délimitation bien tranchée entre ces deux périodes, cependant si distinctes ; on passe insensiblement de l'une à l'autre.

Soit un corps prismatique à section constante, sollicité par une force P, dirigée suivant son axe. Faisons varier cette force P et portons en ordonnées ses valeurs croissantes, en abscisses, les

déformations correspondantes, nous obtiendrons une courbe du genre de celle de la figure 6 et pour laquelle la période d'élasticité est représentée par le tronçon ON et la période de ductilité, par le tronçon NC. Comme au début, la courbe ne s'écarte guère d'une droite OA, qu'elle s'infléchit ensuite graduellement vers l'axe des x, on peut encore diviser la déformation comme suit : Une première partie OA, dite *période de proportionnalité*, ayant pour limite celle de la proportionnalité. Une seconde partie dite *période de grande extension*, ayant pour limite la rupture.

On admettait autrefois que, pendant la période de proportionnalité les déformations étaient rigoureusement proportionnelles aux efforts qui les produisaient. Bach, le premier, croyons-nous, a démontré que cette période mathématique n'existait pas pour la fonte, puis plus récemment J. O. Thomson [1], à Strasbourg, sous la direction de Kohlrauch a prouvé par des essais sur des fils d'acier, d'argent, de cuivre et de laiton de très grande longueur, que « *même pour des charges faibles, la loi de proportionnalité n'était qu'une approximation de la loi d'élasticité.*

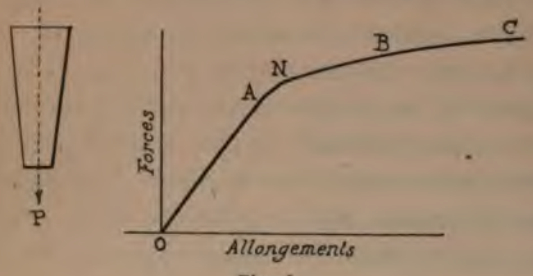


Fig. 6

Divers auteurs ont proposé des formules, pour représenter complètement la déformation. On a donné plus haut les équations de M. Hartig et celles de M. Bach pour le ciment ; Voici encore celles de M. Mehmke de Stuttgard.

Ciment pur comprimé

$$\text{allongement} = \frac{1}{45\,000}\left[\frac{1,700}{8}\,R + \frac{0,052}{8,0^2}\right] \text{ formule parabolique}$$

$$\text{»} \quad = \frac{75\,600}{45\,000 \times 250\,000}\,R^{1,093} \text{ formule potentielle.}$$

[1] J. O. Thomson. — « Sur la loi des allongements élastiques » *Annales Wiedmann de la physique et de la chimie*, t. XLIX, p. 555 et 576, année 1891.

Mortier de Ciment

Formules potentielles.

$$\text{allongement} = \frac{75\,600}{45\,000 \times 355\,942} R^{1,10984} \text{ (1 ciment, 1 1/2 sable)}$$

$$= \frac{75\,600}{45\,000 \times 315\,239} R^{1,14732} \text{ (1 ciment, 3 sable)}$$

$$= \frac{75\,600}{41\,000 \times 229\,026} R^{1,16871} \text{ (1 ciment, 4 1/2 sable)}$$

Formules paraboliques

$$\text{allongement} = \frac{1}{450\,000}\left[\frac{1,3025}{8,1}R + \frac{0,04779}{8,1^2} R^2\right] \text{(1 ciment, 1 1/2 sable)}$$

$$= \frac{1}{45\,000}\left[\frac{1,5769}{8,0} R + \frac{0,07640}{8,0^2} R^2\right] \text{ (1 ciment, 3 sable)}$$

$$= \frac{1}{45\,000}\left[\frac{1,6351}{8,1} R + \frac{0,08239}{8,1^2} R^2\right] \text{(1 ciment, 4 1/2 sable)}$$

Béton comprimé

Formule potentielle

$$\text{allongement} = \frac{75\,600}{45\,000 \times 217\,260} R^{1,13662}.$$

Formule parabolique

$$\text{allongement} = \frac{1}{45\,000}\left[\frac{2,2237}{7,9} R + \frac{0,1433}{7,9^2} R^2\right].$$

Ces diverses formules ne s'appliquent qu'au cas simple d'une barre prismatique, soumise à un effort dirigé suivant son axe. Pour les autres cas, leur complexité devient un sérieux obstacle à leur emploi, fait très regrettable, car plus exactes que les formules usuelles, elles permettraient d'expliquer parfois bien des anomalies. Il faut donc se résigner à ne pas sortir des conceptions primitives et à remplacer les *courbes réelles* par des *éléments droits théoriques*.

Il résulte de ce qui précède que l'on ne pourra plus dans *les essais* parler de limite de proportionnalité et que le point le plus intéressant dans la courbe des déformations deviendra alors celui

qui séparera les lignes représentant la période de proportionnalité et celle de grande extension. Comme ce point est assez difficile à déterminer pratiquement, M. Considère a proposé de le définir de l'une des manières suivantes : Le point limite est celui « *pour lequel l'effort de traction donne un allongement double de celui qui devrait être constaté si la proportionnalité rigoureuse existait encore* », ou : *le point limite est celui pour lequel l'allongement permanent serait la moitié de l'allongement total observé* ». Comme dans la première période de la déformation les efforts ne produisent pas d'allongement permanent ou ne produisent que des allongements permanents insignifiants, le point limite défini ci-dessus a reçu le nom de *limite d'élasticité* (1). Ce point correspondrait d'après M. Résal, pour les métaux, au début de la période de grande extension et serait par suite assez facile à déterminer exactement. Il est probable que l'on peut appliquer les mêmes règles et les mêmes définitions aux périodes de la déformation des agglomérés à base de ciment.

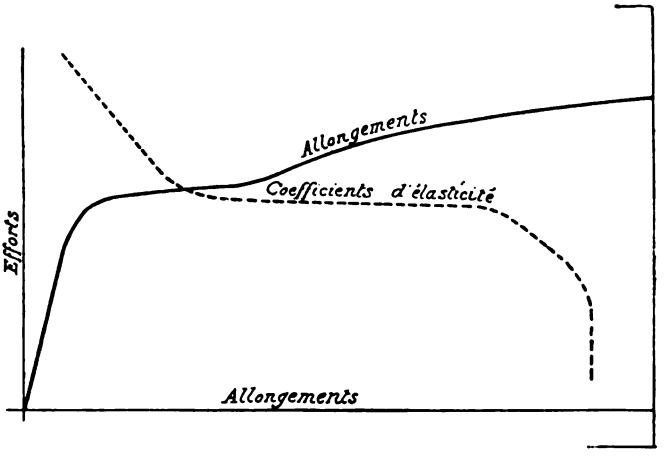


Fig. 7

Courbes de tension et de compression. — La limite d'élasticité correspond assez bien au point A dans les courbes de la figure 4, représentant les expériences n° I de MM. Coignet et de Tedesco et

(1) Théoriquement la limite d'élasticité est le point à partir duquel les charges produisent une déformation permanente. Mais comme ce point est très difficile à déterminer, il ne présente qu'un intérêt relatif.

aux points B dans les expériences II, III et IV. Dans ces 3 derniers cas les courbes présentent un point anguleux A, dans la première période ; ce point a également été signalé par MM. Souleyre et Anglade ; il ne saurait donc être mis en doute ; on a indiqué sur les mêmes dessins les courbes représentant les coefficients *d'élasticité moyens* et les coefficients *d'élasticité instantanés* en portant ces coefficients en abscisses et les efforts qui les produisent en ordonnées.

La figure 7 représente des courbes analogues pour des barres de fer de 16 millimètres de diamètre, de 200 millimètres de longueur, soumises à des efforts d'extension. Elles sont déduites du tableau suivant résumant des expériences de M. Considère [1].

Essais de tension sur une barre de 16 *millimètres* (*de M. Considère*).

Efforts totaux P	Allongements entre repères par mètre de longueur	Diamètres de la striction	Aire de la section la plus contractée	Tension par millimètre carré de la section minimum	Allongements par mètre dans la section minimum	Coefficients d'élasticité		Observations
						Moyens	Instantanés	
kilogr.	centim.	millim.	millim. carrés	kilogr.	centim.	kg. par cm2	kg. par cm2	
400	0,010	»	200,97	1,99	0,010	19 900	19 900	
800	0,020	»	200,95	3,98	0,020	19 900	19 900	
1 200	0,030	»	200,93	5,97	0,030	19 900	19 900	
1 600	0,040	»	200,91	7,96	0,040	19 900	19 900	
2 000	0,050	»	200,89	9,95	0,050	19 900	19 900	
2 400	0,060	»	200,87	11,94	0,060	19 900	19 900	
2 800	0,075	»	200,84	13,94	0,075	18 600	13 300	
3 200	0,090	»	200,81	15,93	0,090	17 700	13 300	
3 600	0,110	»	200,77	17,93	0,110	16 300	10 000	
4 000	3,800	»	193,64	20,64	3,800	5 240	740	Limite d'élasticité
4 400	4,800	»	191,79	22,94	4,800	4 560	2 300	
4 800	6,250	»	189,17	25,37	6,250	3 820	1 670	
5 200	8,250	»	185,68	28, »	8,250	3 130	1 315	
5 600	11,120	»	180,88	30,95	11,120	2 510	1 030	
6 000	16,600	»	172,38	34,80	16,600	1 800	700	
6 100	23,250	14,2	158,36	38,51	27,000	1 440	36	Commencement de la striction
5 900	27,600	13,3	138,92	42,47	44,000	1 640	24	
5 700	30,250	12,5	122,71	46,41	63,000	940	21	
6 500	32,000	11,8	109,45	50,25	84,000	860	18	
7 300	33,000	11,2	98,52	53,79	104,000	800	18	

[1] Voir FLAMAND. — *Résistance des matériaux*, p. 208.

Les coefficients d'élasticité ont été déterminés par la formule :

$$E = \frac{P}{S\left(\frac{\Delta l}{l}\right)} = \frac{R}{\frac{\Delta l}{l}}$$

où P représente l'effort total, colonne I,

S représente la section de la barre (en millimètres carrés),

R représente l'effort par millimètre carré,

$\frac{\Delta l}{l}$ représente l'allongement par millimètre de longueur.

Le coefficient d'élasticité moyen a été déterminé en prenant pour P l'effort total, pour S la section primitive de la barre $= 200^{mm^2},97$, et par $\frac{\Delta l}{l}$, l'allongement total entre repères.

Le coefficient d'élasticité instantané a été calculé en prenant pour R et $\frac{\Delta l}{l}$ les variations d'efforts et d'allongements pour deux charges successives, qui se sont produites dans la section minimum.

On voit par le tableau ci-dessus que, si au début de la déformation ces deux genres de coefficients d'élasticité sont égaux, il n'en est pas de même pour des déformations plus importantes.

En faisant croître suffisamment l'effort, il arrive qu'après que la limite d'élasticité a été dépassée, une section se rétrécisse et donne lieu par suite à des allongements plus grands que dans les sections voisines. Ce phénomène caractéristique a reçu le nom de *striction*. L'effort par unité de surface peut continuer à croître dans cette section, même si l'effort total P supporté par la barre vient à diminuer. L'étude de la déformation totale donne donc uniquement des valeurs moyennes résultant d'efforts différents subis par diverses parties de la barre, tandis que l'examen des phénomènes dont la section rétrécie est le siège, étant relatif à une partie plus homogène, est plus apte à caractériser les propriétés de la matière, et l'on peut considérer les allongements par mètre dans la section minimum (colonne 6), les coefficients d'élasticité instantanés (colonne 8) et les tensions relatives à la section minimum (colonne 5), comme les seules quantités capables de définir l'élasticité du corps.

Il est donc probable que si l'on pouvait empêcher le phénomène de la striction de se localiser dans une section et l'obliger à s'étendre sur toute la longueur de la barre, l'allongement total pris par celle-ci, dépasserait de beaucoup les 33 % de l'exemple ci-dessus et atteindrait probablement 104 % comme dans la section rétrécie.

Il y a lieu d'insister sur ces faits, car l'expérience sus-mentionnée peut être considérée comme caractérisant d'une façon typique les diverses phases de la déformation. Si l'on étudie ce qui se passe dans la fonte, l'acier, le laiton, le cuivre, etc.. on retrouve des courbes analogues, et à peu près les mêmes phénomènes dans la déformation. Il est par suite logique d'admettre que la déformation du ciment à la *traction* suit les mêmes lois que celles qui viennent d'être exposées pour le fer.

Cette déformation sera par suite caractérisée par deux périodes. Dans la première les déformations sont à peu près proportionnelles aux efforts, dans la deuxième elles croîtront beaucoup plus rapidement. Il est probable que la rupture du ciment sera précédée d'un phénomène de striction locale et que les mesures d'allongement sur des éprouvettes d'une certaine longueur ne donneront que des valeurs approchées incapables de définir complètement la matière, les capacités de résistance et surtout celles d'allongement pouvant être de *beaucoup supérieures à celles indiquées par une expérience de traction simple.* On verra d'ailleurs que l'on peut, en empêchant la striction locale de se produire, par l'addition de fer dans la masse, accroître l'allongement du mortier dans la proportion de 1 à 20, sans lui faire perdre aucune de ses qualités. (Expériences de M. Considère.)

Les essais de résistance à la compression sont, comme on l'a vu, beaucoup plus délicats à exécuter ; les lois qui régissent cette déformation sont par suite beaucoup moins connues. On se contente généralement de supposer que la compression comporte également deux périodes ; pendant la première desquelles les déformations sont proportionnelles aux efforts qui les produisent et que le coefficient d'élasticité est pour le même corps, le même à la compression et à l'extension. Il est assez logique de faire les mêmes hypothèses pour les agglomérés à base de ciment [illegible] pen-

dant il y a lieu de faire provisoirement toutes ses réserves au sujet des limites.

Répétition des efforts. — L'assimilation que nous avons faite entre les mortiers et les corps ferreux n'a d'ailleurs rien d'anormal. Le *ciment* joue dans le mortier le même rôle que la *cémentite* dans le fer ; « *il lie les grains de sables entre eux*, on peut donc étendre cette comparaison à la constitution intime de la matière.

La résistance de l'aggloméré peut être considérée (voir p. 27), comme résultant de celle de plusieurs facteurs, dont les principaux sont :

1° Le frottement des molécules entre elles.

2° La force d'adhérence du ciment sur les grains de sable.

3° La résistance du ciment à l'extension.

Il résulte de la diversité de ces facteurs et de leur manière d'être, qu'au début, les allongements pourront être très faibles, tant que tous ces facteurs concourront simultanément à la résistance ; puis l'un d'eux venant à céder, les allongements croitront rapidement sous les efforts croissants, et augmenteront plus vite encore au fur et à mesure que d'autres facteurs cesseront leur action, et ce jusqu'à rupture.

Il en résulte aussi qu'une partie de la résistance vaincue par l'influence d'une première charge, devienne incapable de se reformer, au moins immédiatement et que les autres actions n'aient plus la puissance nécessaire pour remettre le corps dans son état primitif.

Représentons par OAMM'C (fig. 8) la courbe des déformations du ciment. Examinons ce qui doit se passer lorsque les efforts croissent de O à C, en supposant que les charges soient enlevées et appliquées de nouveau après chaque épreuve.

1° *L'effort est compris entre* O *et* A. — Il ne reste aucune déformation après l'enlèvement de la charge : la matière n'a probablement subi aucune altération.

2° *L'effort est compris entre* A *et* M. — On suppose que l'action de cet effort a été assez prolongée pour produire tout son effet. Il reste un allongement permanent O*m* après l'enlèvement des charges. Si l'on applique les mêmes charges à nouveau la nouvelle ligne de déformation se rapprochera de la droite *m*M. On n'obser-

vera aucune déformation permanente nouvelle après déchargement et il en sera de même pour une répétition d'efforts.

L'action des forces ne paraît pas être instantanée. MM. Souleyre et Anglade ont trouvé que pour qu'elle se manifeste intégralement, il faut produire un certain nombre de répétitions ou laisser agir les charges pendant un certain temps, variant de 20 à 30 minutes.

Si l'action des forces est poursuivie jusqu'en M', en deçà de M, il se produit un nouvel allongement permanent et tout se passera ensuite comme il a été dit ci-dessus, ce qui tendrait à prouver que la période correspondant à l'intervalle compris entre A et B, est relative à l'épuisement graduel d'un même facteur.

3° *L'effort est compris entre* M' *et* C. — On observe les mêmes phénomènes que dans la période précédente ; ceux-ci seront mis d'ailleurs en évidence dans le tableau suivant de M. Bauschinger, extrait de l'ouvrage de M. Résal « fer, fonte et acier ». Mais on n'est plus parfaitement d'accord sur l'influence de la répétition des efforts. Après avoir d'abord admis sans réserve les lois de Woehler, tendant à faire considérer toute répétition dépassant la limite d'élasticité comme capable d'amener la rupture, on est revenu ensuite à une opinion moins pessimiste, surtout après les observations de M. Résal, qui a fait remarquer que pour des alternances de 72 charges par minute (durée d'application de la force 1/10 et 1/12 de seconde), il était permis de supposer « que chaque action nouvelle imprimait à la pièce un mouvement vibratoire qui n'était pas complètement éteint quand l'action suivante entrait en jeu ». La rupture pouvait dès lors être produite non pas par la répétition des efforts, mais par un accroissement réel de la tension moléculaire allant jusqu'à l'extrême limite de la résistance de la pièce. Il y a là un point intéressant à éclaircir.

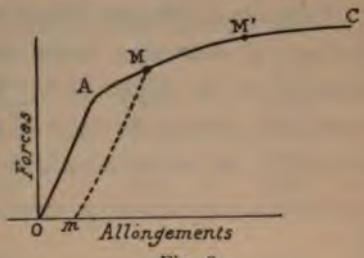


Fig. 8

Quoi qu'il en soit, un effort dépassant le point M' (limite de grande extension), a produit des modifications profondes dans l'état d'équilibre de la pièce et il faut un certain temps que

celui-ci soit complètement rétabli. Voici à ce sujet les conclusions de M. Bauschinger, sur l'étude des pièces métalliques : (1)

« La limite de grande extension s'élève immédiatement jusqu'à la valeur maximum de l'effort auquel la pièce a été soumise. Si après avoir enlevé la charge, on laisse la pièce en repos, cette limite de grande extension croît avec le temps, arrive à dépasser l'effort maximum et continue à augmenter pendant des semaines, des mois et peut-être des années.

« La limite d'élasticité mesurée immédiatement après l'enlèvement de la charge, se trouve abaissée et souvent réduite à zéro. Si la pièce est laissée en repos, cette limite se relève, dépasse sa valeur primitive et finit au bout d'un temps suffisant (plusieurs années) par se rapprocher de la limite de grande extension, qui ne le surpasse plus que de très peu de chose.

« Enfin, le coefficient d'élasticité du métal se trouve également abaissé, la réduction subie du fait de l'écrouissage pouvant atteindre 10 et même 15 %. Mais ce coefficient se relève aussi pendant la période de repos et peut arriver finalement à dépasser de 4 à 5 %, sa valeur primitive constatée avant l'écrouissage.

Désignation	Effort total correspondant à la limite d'élasticite théorique	Effort total correspondant à la limite de grande extension
	kilogrammes	kilogrammes
Fer (*soudé*). Valeurs primitives	1 410	1 920
» Charge de 3 480 kilogrammes. Repos de 3 ans 1 mois	3 670	3 880
Acier (*fondu*). Valeurs primitives.	2 660	2 960
» Charge de 4 260 kilogrammes. Repos de 3 ans 2 mois	> 4 260	> 4 260
Acier (*fondu*). Valeurs primitives.	2 480	2 580
» Charge de 3 330 kilogrammes. Repos de 30 minutes	930	3 300
» Charge de 3 710 kilogrammes. Repos de 30 minutes	630	3 790
» Charge de 4 430 kilogrammes. Repos de 3 ans	> 4 330	4 330

(1) Résal. — *Fer, fonte et acier*, p. 393.

Le tableau précédent, résumant des expériences de M. Bauschinger, est extrait du même ouvrage.

Le tableau suivant résume les principales expériences de Bauschinger sur la répétition des charges dépassant la limite d'élasticité: il est extrait de l'ouvrage de M. Föppl sur la résistance des matériaux.

Désignation	Résistance à la rupture, produite par un effort croissant régulièrement à partir de 0	Effort que peut supporter sans se rompre un corps soumis à un nombre quelconque de charges répétées	
		Variant de 0 à une valeur constante	Variant entre un maximum et un minimum d'égale intensité mais de signes contraires
	kilogr. par centimètre carré	kilogr. par centimètre carré	kilogr. par centimètre carré
Fer (obtenu par pudlage) . . .	3 480	2 000	1 770
Acier doux.	4 360	2 400	1 980
» »	4 050	2 200	1 980
» »	4 020	2 400	2 260
Acier Thomas.	6 120	3 000	3 000
Acier pour rails	5 940	2 800	2 800
Tôles d'acier pour chaudière . .	4 050	2 400	1 900
Tôles d'acier (sans désignation spéciale	3 350	2 200	1 600

50. Conclusions — *Les mortiers bien constitués suivent les grandes lois de la résistance des matériaux.* — Les courbes de déformation, tant à l'extension qu'à la compression sont formées de deux parties, l'une relative à la période de proportionnalité ou de quasi-proportionnalité, l'autre à celle de grande extension.

Les limites de ces deux périodes ne sont pas les mêmes pour les efforts de compression et pour ceux d'extension, mais il est probable que les coefficients d'élasticité correspondants sont égaux pendant la première période, ou tendent à le devenir après un certain nombre d'applications de charges. En réalité, il semble résulter de ce qui précède, et notamment des expériences de MM. Souleyre et Anglade que les courbes correspondant aux premières déformations, présentent un point d'inflexion à l'origine.

La figure 9 donne deux courbes extraites de l'ouvrage de M. Föppl qui confirment ce fait (1).

Les coefficients d'élasticité sont variables pendant la seconde période et peuvent s'abaisser considérablement ; il en résulte qu'à partir d'un certain moment, l'allongement d'une barre peut croître sans que l'effort augmente considérablement.

L'allongement observé sur une éprouvette donne des indications erronées sur la capacité d'allongement de la matière essayée, puisqu'elles sont attachées par l'inertie de la majeure partie voisine de la rection de rupture où se produit la striction (2).

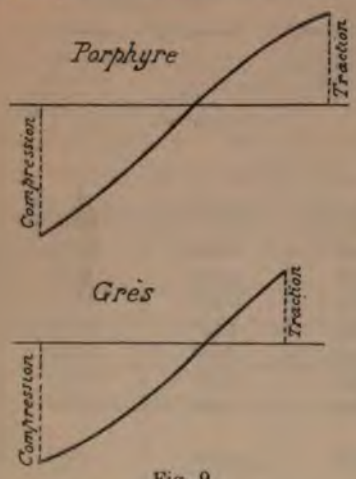


Fig. 9

La répétition d'efforts inférieurs à ceux qui répondent à la limite d'élasticité, ne produit aucune altération dans la matière.

Il est probable que la répétition même d'efforts supérieurs à cette limite n'est à craindre que si les alternances sont suffisamment rapides pour empêcher l'équilibre moléculaire de se rétablir (partiellement du moins) dans la barre. Il n'est malheureusement pas possible d'indiquer le temps nécessaire au rétablissement partiel de l'équilibre.

Le coefficient d'élasticité est un facteur essentiellement variable ; l'application sur une barre d'une charge dépassant la limite d'élasticité a pour effet d'abaisser ce coefficient (de redresser la courbe des déformations), d'autant plus que la charge a été poussée plus loin et aussi, dans une certaine mesure, qu'elle a été répétée plus souvent et qu'elle a été appliquée plus longtemps.

(1) Aug. Föppl. — *Résistance des Matériaux*, traduction de E. Hahn, p. 43 et 44.

(2) Les allongements des mortiers étant relativement faibles, il est possible que les mesures ainsi exécutées ne donnent pas de résultats bien précis ; il vaudra donc mieux dans ce cas particulier, chercher à étendre la striction sur une certaine longueur par un artifice quelconque, en introduisant par exemple du fer dans le prisme essayé.

51. Données pratiques. — Quand les efforts *ne dépassent pas la limite d'élasticité*, on peut admettre que le coefficient d'élasticité du mortier ou du béton est compris entre 5000 et 2500 kilogrammes par millimètre carré.

A défaut de chiffres plus précis, la résistance maximum des mortiers ou bétons à la traction peut être évaluée au dixième environ de la résistance à la compression qui est mieux connue. On peut admettre également, à titre de première approximation que les limites d'élasticité tant à la compression qu'à l'extension des mortiers ou bétons répondent à la moitié des valeurs relatives à la rupture.

Quand l'effort reste inférieur à la limite d'élasticité naturelle ou relevée artificiellement, les allongements ou raccourcissements sont donnés par la formule

$$\Delta l = \frac{Pl}{SE} = \frac{Rl}{E},$$

où l représente la longueur de la barre, P l'effort total qu'elle supporte, S, sa section, R l'effort par unité de section et E le coefficient d'élasticité rapporté de l'unité de section.

52. Flexion. — On dispose d'un très petit nombre d'expériences faites en vue de l'étude du béton à la flexion. Une d'elles citée par Büsing et Schumann est relative à la rupture de deux marches d'escalier, de même section, l'une en porphyre, l'autre en béton au dosage de 1 : 4. La première a rompu sous une charge de 570 kilogrammes, la deuxième, celle en béton sous une charge 702 kilogrammes.

Ciment	Sable de rivière	Gravier	Charge de rupture	Ciment	Sable de rivière	Gravier	Charge de rupture
			kilogr.				kilogr.
1	4	5	1205	1	1	8	1948
1	3	6	1948	1	1	5	3498
1	3	5	1370	1	»	9	1943
1	2	7	1532	1	»	5	4350
1	2	5	2215	»	»	»	»

Hutton a fait un certain nombre d'expériences de rupture par flexion sur des blocs de béton de $0^m,30$ de hauteur, $0^m,30$ de largeur et $1^m,20$ de longueur. La distance entre les appuis était de $0^m,90$. Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant :

Ces chiffres confirment ce qui a été dit précédemment sur l'influence des mélanges ; mais comme ils ne sont accompagnés d'aucun renseignement sur la résistance de rupture à l'extension ou à la compression, ils n'apportent aucune lumière sur la résistance à la flexion.

On a vu que les agglomérés à base de ciment suivaient les lois générales de la résistance des matériaux, pour les efforts de traction et de compression ; par suite il doit en être de même à la flexion, phénomène qui peut toujours se décomposer en une compression et en une extension. On aura donc à étudier la flexion dans un certain nombre d'hypothèses analogues à celles envisagées dans les cas précédents.

I

L'effort subi par les fibres extrêmes, comprimées ou tendues, est inférieur à celui qui répond à la limite d'élasticité.

Dans ce cas, il a été montré que l'on pouvait admettre sans grande erreur que les allongements étaient proportionnels aux efforts. L'effort R, dans les fibres extrêmes, est donné par suite par la formule :

$$R = \frac{M}{\frac{I}{v}}$$

dans laquelle M représente le moment fléchissant, I le moment d'inertie de la section, v la distance de la fibre extrême considérée à la fibre neutre ; ces diverses quantités sont à calculer par les procédés usuels. De même les flèches seront données par les formules courantes de la résistance des matériaux.

II

L'effort subi par les fibres tendues dépasse celui qui répond à la limite d'élasticité, tandis que celui qui sollicite les fibres comprimées lui est inférieur.

On admettra que les sections planes restent planes après les déformations ; c'est-à-dire que les fibres s'allongent proportionnellement à leur distance à la fibre neutre, comme du reste semblent le confirmer les principales expériences faites à ce sujet.

Soit AB (fig. 10) un élément de poutre de section B quelconque ; la droite *bb'* représente la position de cette section après sa déformation et la courbe CODE est le diagramme des efforts subis par cette section, ces derniers étant portés en ordonnées et les déformations l'étant en abscisses. L'effort en M représente la limite d'élasticité à l'extension, et l'effort en B' la limite de résistance à l'extension également.

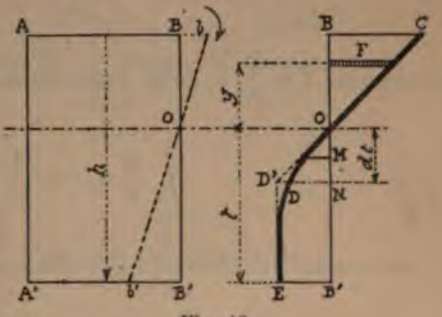


Fig. 10

On trouvera dans un chapitre suivant une méthode tout à fait générale permettant de déterminer le moment résistant d'une section d'une forme absolument quelconque. Dans le cas présent, la courbe CDE se rapprochant beaucoup de la ligne brisée CD'E, cette dernière peut être substituée à la première sans grave erreur ; il résulte de cette hypothèse, que nous considérerons l'effort comme variant suivant les ordonnées de la droite CD' entre B et N et comme *constant* et égal à la valeur de rupture entre N et B'.

Soit h la hauteur de la section, t et αt les distances respectives à la fibre neutre, de la fibre extrême tendue et du point D'. On supposera que la section B n'est soumise qu'à l'action d'un moment M, s'exerçant suivant un des axes principaux de l'ellipse

d'inertie [1]. Ce moment développe des efforts de compression dans les fibres situées au-dessus de l'axe neutre et d'extension dans celles qui se trouvent au-dessous.

L'équilibre exige :

1° *Que la somme des forces horizontales*, F, *soit nulle* ou que la somme des forces de compression soit égale à celle des forces d'extension.

Si l'on désigne par R l'effort qui se produit en D, point déterminé par son ordonnée αt, effort qui est constant entre D et B', la somme des compressions (au-dessus de 00') a pour expression :

$$\int_0^{h-t} F\Delta s;$$

et comme $F = \frac{R}{\alpha t} y$, cette expression peut être mise sous la forme :

$$\int_0^{h-t} \frac{R}{\alpha t} y\Delta s = \frac{R}{\alpha t} \int_0^{h-t} y\Delta s.$$

La somme des tensions (au-dessous de 00'), a pour mesure :

$$\int_{-\alpha t}^{0} F\Delta s + \int_{-t}^{-\alpha t} R\Delta s = \int_{-\alpha t}^{0} \frac{R}{\alpha t} y\Delta s + \int_{-t}^{-\alpha t} R ds$$

ou :

$$\frac{R}{\alpha t} \int_{-\alpha t}^{0} y\Delta s + R \int_{-t}^{-\alpha t} \Delta s$$

ou :

$$(1) \qquad \int_0^{h-t} y\Delta s = \int_{-\alpha t}^{0} y\Delta s + \alpha t \int_{-t}^{-\alpha t} \Delta s$$

[1] Cette restriction a pour but de simplifier un peu le problème ; si la direction du moment était quelconque, l'axe neutre serait le diamètre conjugué par rapport à cette direction, et la solution ne comporterait d'autre modification que celle relative à la direction des axes de coordonnées qui seraient parallèles aux diamètres conjugués.

Cette équation permet de déterminer la valeur t pour une section et un rapport α donnés, et par suite la position de la fibre neutre.

L'équilibre exige également, *que la somme des moments des forces intérieures par rapport à l'axe neutre* 00′ *soit égale à la somme des moments des forces extérieures relatifs à la même section.*

Le moment des forces au-dessus de 00′ a pour valeur :

$$\int_0^{h-t} yF\Delta s = \int_0^{h-t} y\frac{R}{\alpha t}y\Delta s = \frac{R}{\alpha t}\int_0^{h-t} y^2\Delta s.$$

Le moment des forces au-dessous de 00′ a pour valeur :

$$\int_{-\alpha t}^{0} yF\Delta s + \int_{-t}^{-\alpha t} Ry\Delta s = \frac{R}{\alpha t}\int_{-\alpha t}^{0} y^2\Delta s + R\int_{-t}^{-\alpha t} y\Delta s.$$

Il faut donc que l'on ait :

$$(2) \qquad \frac{R}{\alpha t}\int_0^{h-t} y^2\Delta s + \frac{R}{\alpha t}\int_{-\alpha t}^{0} y^2\Delta s + R\int_{-t}^{-\alpha t} y\Delta s = M.$$

Comme les poutres en béton ont une section généralement rectangulaire, on a dans ce cas particulier :

$$\Delta s = bdy$$

D'où :

$$\int_0^{h-t} y\Delta s = b\int_0^{h-t} ydy = \frac{b(h-t)^2}{2}$$

$$\int_{-\alpha t}^{0} y\Delta s = b\frac{\alpha^2 t^2}{2}$$

$$\int_{-t}^{-\alpha t} \Delta s = b(t - \alpha t).$$

L'équation (1) devient :

$$\frac{b(h-t)^2}{2} = \frac{b\alpha^2 t^2}{2} + \alpha t b(t - \alpha t)$$

$$(h-t)^2 = t^2(2-\alpha)\alpha$$

D'où

$$t = \frac{h}{1 + \sqrt{(2-\alpha)\alpha}} \tag{3}$$

et l'équation (1) devient :

$$\frac{R}{\alpha t}\int_0^{h-t} y^2 b dy + \frac{R}{\alpha t}\int_{-\alpha t}^{0} y^2 b dy + R\int_{-t}^{-\alpha t} y b dy = M$$

ou :

$$\frac{Rb}{\alpha t}\left[\frac{(h-t)^3}{3} + \frac{\alpha^3 t^3}{3}(1-\alpha^2)\right] = M. \tag{4}$$

Le travail de compression maximum est donné par la formule :

$$R_{\text{comp. max.}} = (h-t)\frac{R}{\alpha t} = \beta R. \tag{5}$$

Si à l'aide de ces formules 3, 4 et 5, relatives à une section rectangulaire, on calcule les valeurs de t et de $\frac{M}{R}$ pour diverses valeurs de α, on obtient le tableau suivant. On peut donner à ce rapport $\frac{M}{R}$ analogue au quotient $\frac{I}{v}$ le nom de *module de résistance*.

On voit par l'examen de ces valeurs, qu'au fur et à mesure que le rapport α diminue :

1° Le centre de gravité de la section se déplace vers le haut ;

2° Le module de résistance augmente, mais lentement ;

3° Le travail maximum de compression augmente très rapidement.

α	Distance du centre de gravité t	αt	Module de résistance $\frac{M}{R} = \gamma b h^2$ Coefficient γ	Effort de compression βR Coefficient β
$1 = 1,000$	$0,500\ h$	$0,500\ h$	0,1667	1,000
$\frac{4}{5} = 0,800$	0,505 »	0,404 »	0,2004	1,225
$\frac{3}{5} = 0,600$	0,522 »	0,313 »	0,2361	1,530
$\frac{1}{2} = 0,500$	0,536 »	0,268 »	0,2560	1,731
$\frac{2}{5} = 0,400$	0,555 »	0,222 »	0,2871	2,004
$\frac{1}{3} = 0,333$	0,573 »	0,191 »	0,2940	2,235
$\frac{1}{4} = 0,250$	0,602 »	0,151 »	0,3166	2,635
$\frac{1}{5} = 0,200$	0,625 »	0,125 »	0,3333	3,000
$\frac{1}{8} = 0,125$	0,674 »	0,084 »	0,3634	3,881
$\frac{1}{10} = 0,100$	0,697 »	0,070 »	0,3746	4,328
$\frac{1}{11} = 0,0903$	0,700 »	0,063 »	0,3869	4,762
$\frac{4}{50} = 0,0800$	0,718 »	0,057 »	0,3883	4,948
$\frac{1}{15} = 0,0666$	0,736 »	0,049 »	0,3955	5,387
$\frac{1}{20} = 0,0500$	0,762 »	0,038 »	0,4083	6,263
$\frac{1}{30} = 0,0333$	0,796 »	0,026 »	0,4259	7,846
$\frac{1}{40} = 0,0250$	0,818 »	0,020 »	0,4341	9,100
$\frac{1}{50} = 0,0200$	0,834 »	0,017 »	0,4375	9,765
$\frac{1}{60} = 0,0167$	0,846 »	0,014 »	0,4449	11,000
$\frac{1}{75} = 0,0133$	0,860 »	0,011 »	0,4530	12,727
$\frac{1}{100} = 0,0100$	0,876 »	0,009 »	0,4543	13,777

Le module de résistance de la section peut aussi se calculer comme suit :

On se donne un centre de gravité arbitraire ; on trace approximativement la courbe des déformations et on réduit la section

proprotionnellement au rapport du coefficient d'élasticité vrai au coefficient d'élasticité de la fraction comprimée ; on obtient ainsi des courbes du genre de celle de la figure 11, pour lesquelles on vérifie si le centre de gravité a été bien choisi. Si c'est le cas, on calcule le module de résistance et l'effort de compression d'après les procédés ordinaires.

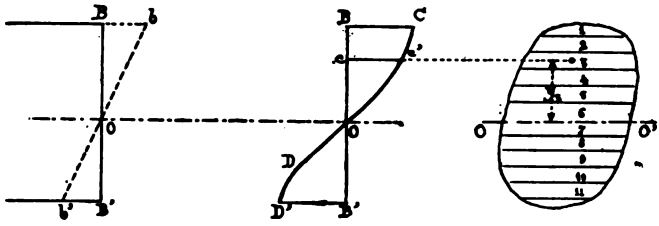


Fig. 11

On peut aussi réduire la section proportionnellement à sa résistance, et calculer les moments d'inertie comme si la section devenait homogène.

On verra dans la suite de nombreuses applications de cette méthode qui est représentée graphiquement aux figures 12 et 13.

L'effort d'extension maximum est égal à l'effort dans les fibres extrêmes M calculé comme si la section était homogène, une fois réduit dans le rapport $\frac{MM'}{MM''}$.

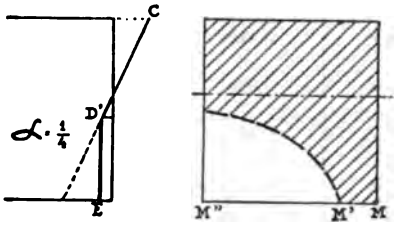


Fig. 12

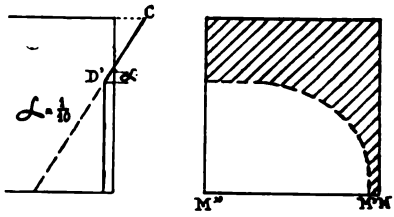


Fig. 13

53. Calculs des déplacements. Flèches. — Rappelons quelques principes généraux :

L'allongement Δdl de la fibre o est pour un élément de longueur dl

$$\Delta dl = \frac{Rdl}{E},$$

R est l'effort qui sollicite la fibre ;

E est le coefficient d'élasticité en ce point : celui qui est relatif à la partie comprimée et qui a été supposé constant.

La distance angulaire de o à la fibre neutre étant αt, le déplacement angulaire $\Delta(\delta)$ de la section sera :

$$\Delta(\delta) = \frac{R dl}{E \alpha t}. \tag{1}$$

Supposons maintenant que l'élément dl fasse partie d'une poutre quelconque, mais dont la section A'A'' puisse être considérée comme invariable (fig. 14). On remarquera que, par suite

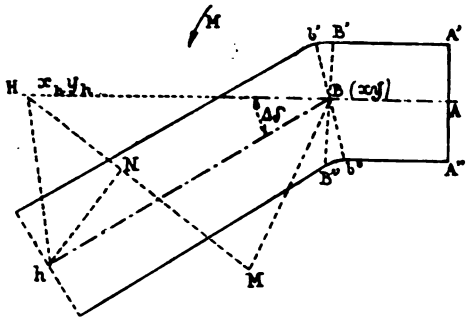


Fig. 14

de la déformation angulaire $\Delta(\delta)$, le point H décrira un arc de cercle Hh, qui, vu la faible valeur de l'angle $\Delta(\delta)$ peut être assimilé à une droite. Pour déterminer la nouvelle position du point H, rapportons la poutre à deux axes de coordonnées rectangulaires X et Y et désignons respectivement par x et y, par x_h et y_h les coordonnées des points B et h et par $\Delta(dx_h)$ et $\Delta(dy_h)$, les variations des coordonnées du point H. On a par suite de la similitude des triangles BMH et HhN,

$$\frac{HN}{Hh} = \frac{BM}{HB} \quad \text{et} \quad \frac{hN}{Hh} = \frac{HM}{HB},$$

et comme

$$HN = \Delta(dx_h) : \quad hN = \Delta(dy_h) ; \quad BM = y_h - y ;$$
$$HM = x_h - x ; \quad Hh = HB\Delta(\delta).$$

On a, en tenant compte des signes

$$+\Delta(dy_h) = (x_h - x)\,\Delta(\delta)$$
$$-\Delta(dx_h) = (y_h - y)\,\Delta(\delta),$$

et en remplaçant $\Delta(\delta)$ par sa valeur tirée de l'équation (1)

$$(2)\quad \begin{cases} +\Delta(dy_h) = (x_h - x)\dfrac{Rdl}{Ext} \\ -\Delta(dx_h) = (y_h - y)\dfrac{Rdl}{Ext}. \end{cases}$$

Pour déterminer ces déplacements, il a fallu supposer la section A'A'' absolument fixe : on supposera de même la section B'B'' à son tour invariable après sa rotation angulaire $\Delta(\delta)$, et l'on appliquera à l'élément qui vient immédiatement après les formules indiquées ci-dessus. En suivant la même marche pour les autres parties de la poutre, on obtient une série de valeurs correspondant aux déformations de chaque élément. La déformation totale étant évidemment égale à la somme des déformations partielles, on a :

Pour le déplacement angulaire total :

$$\delta = \sum_x^{x_h} \frac{Rdl}{Ext} = \int_x^{x_h} \frac{Rdl}{Ext}.$$

Pour le déplacement horizontal total :

$$\Delta x_h = \sum_x^{x_h} (y_h - y)\frac{Rdl}{Ext} = \int_x^{x_h} (y_h - y)\frac{Rdl}{Ext}.$$

Pour le déplacement vertical total :

$$\Delta y_h = \sum_y^{y_h} (x_h - x)\frac{Rdl}{Ext} = \int_x^{x_h} (x_h - x)\frac{Rdl}{Ext}.$$

On a coutume, pour calculer ces expressions de considérer les quantités $\frac{Rdl}{Ext}$ comme des forces appliquées aux centres de gravité des éléments. Les formules ci-dessus montrent donc que :

1° Le déplacement angulaire du point H est égal à la somme algébrique de ces forces.

2° Les produits $(y_h - y)\frac{Rdl}{Ext}$ et $(x_h - x)\frac{Rdl}{Ext}$ représentent les

moments statiques des forces $\frac{Rdl}{E\alpha t}$ par rapport au point $x_h y_h$ dont on recherche les déplacements : les déplacements totaux ne sont par suite pas autre chose que les sommes des moments de ces forces.

Ces lois ne sont vraies, comme il a été dit, que si la section A'A' est absolument fixe, comme c'est le cas par exemple d'une section d'encastrement. Quand, au contraire, cette section n'est pas absolument fixe, quand elle peut tourner sur elle-même, il y a lieu de tenir compte de cette circonstance. Nous avons démontré [1] qu'il suffit pour cela de déterminer *les réactions sur appuis des forces fictives* $\frac{Rdl}{E\alpha t}$, *comme si la poutre reposait sur deux appuis, et de calculer les moments des forces fictives en ajoutant à ces forces les réactions sur les appuis.*

Autrement dit, tout se passe comme dans la déformation ordinaire à la condition toutefois de remplacer les poids fictifs $\frac{Mdl}{EI}$ par $\frac{Rdl}{E\alpha t}$; mais, tandis que, dans le premier cas, les deux variables changent suivant des lois déterminées, dans le second cas la quantité α est une fonction complexe de M, de I, et de la nature de la matière. Il ne sera donc généralement plus possible de déterminer les déformations (les flèches en particulier) par une intégration simple ; il faudra procéder par sommations successives en divisant la pièce en une série d'éléments courts et en déterminant pour chacun d'eux, les quantités E et α, comme il a été indiqué ci-dessus.

Il est bon cependant de remarquer que pour les mortiers et bétons purs, les flèches et déformations que nous proposons de déterminer sont celles qui précèdent la rupture ; et par suite de la difficulté du problème on pourra se contenter d'une approximation dans les calculs. On admettra par exemple que le produit αt est constant tout le long de la pièce et que sa valeur est celle qu'il possède, au point où le moment atteint les 2/3 de son maximum, où l'on divisera la pièce en 3 ou 5 tronçons, par chacun desquels on admettra une valeur moyenne de αt.

[1] *Revue Technique* du 25 juillet 1900. Note sur les déformations. M. et T.

II

Les efforts dans les fibres tendues et comprimées dépassent la limite d'élasticité.

On supposera comme dans le cas précédent que les sections planes restent planes après la déformation, soit : que la section BB′ vienne en *bb′* ; que les efforts en chaque point sont représentés par les ordonnées correspondantes de la courbe *cc′o*D′ (voir fig. 11) ; qu'enfin les efforts s'exercent suivant la direction d'un des axes principaux de l'ellipse d'inertie [1].

On divisera la section en un certain nombre de petits éléments par des droites parallèles à l'axe *oo′*. On admettra que l'effort qui s'exerce dans chacun de ces éléments est constant. L'effort dans l'élément 3, par exemple, sera donné par $cc' = F_3$. On aura donc :

Moment résistant de l'élément 3

$$F_3 S_3 y_3.$$

s_3 représente la section de l'élément et y_3 la distance à l'axe neutre *oo′* de son centre de gravité. On aura évidemment :

$$\text{Moment résistant total} = \sum_1^{12} Fsy.$$

Ce calcul suppose que le centre de gravité est connu *a priori*. En réalité, il n'en est pas ainsi ; on se le donne approximativement et l'on vérifie si les deux conditions fondamentales de la résistance à la flexion sont remplies, savoir :

1° Si la somme algébrique des forces horizontales est nulle,

$$\Sigma sy = 0.$$

2° Si le moment résistant total est égal au moment des forces extérieures

$$M = \Sigma Fsy.$$

Après un certain nombre de tâtonnements, on parviendra à satisfaire à ces deux équations.

[1] Même ouvrage que dans l'alinéa précédent.

54. Flexion par compression ou flambage. — Il a été mentionné plus haut que le coefficient de rupture des barres comprimées variait avec la longueur de ces dernières, et que ce coefficient était donné par la formule d'Euler.

$$P = \pi^2 \frac{EI}{l^2},$$

pour une barre articulée à ses deux extrémités.

Dans cette formule :

P est la plus petite force capable de produire le flambage $\pi = 3,1416$;

I est le moment d'inertie de la section de la barre supposée à section constante ;

l est la longueur libre mesurée d'axe en axe des articulations ;

E est le coefficient d'élasticité de la matière à la compression.

On a vu que l'on pouvait admettre sans grande erreur que le coefficient d'élasticité était constant pendant la première partie de la déformation, et qu'il s'abaissait très rapidement ensuite. Cette partie s'étend jusqu'au commencement de la grande extension ; on peut admettre approximativement la constance des coefficients d'élasticité pour des charges ne dépassant pas la moitié de celle qui amène la rupture. Il en résulte que *la formule d'Euler pourra être employée sans réserve tant que l'effort* P *divisé par la section de la barre sera inférieure à la limite d'élasticité, et qu'elle devra être modifiée quand l'effort par unité de section dépassera cette limite.*

Pour rapporter à la section unitaire l'effort de flambage, on divisera par la section s de la barre, les deux termes de l'équation (1), et l'on aura :

$$\frac{P}{s} = R = \frac{\pi^2 EI}{l^2 s}.$$

Soit en posant $I = sK^2$, K étant le rayon de gyration de la section pris dans la direction considérée :

$$R = \frac{\pi^2 EK^2}{l^2} = \overline{3,1416}^2\, E \left(\frac{K}{l}\right)^2 = 9,87\, E \left(\frac{K}{l}\right)^2 \neq 10\, E \left(\frac{K}{l}\right)^2.$$

Rapportons les efforts au centimètre carré et posons :

$$E = 202\,700.$$

On aura :

$$K = 3{,}\overline{1416}^2 \times 202\,700 \times \left(\frac{K}{l}\right)^2 = 2\,000\,000\left(\frac{K}{l}\right)^2.$$

Si l'on admet, comme il a été dit plus haut, que la formule est vraie tant que K est plus petit que la moitié de la résistance σ à la rupture, il faudra que l'on ait :

$$\frac{l}{K} > \sqrt{\frac{2\,000\,000}{\frac{\sigma}{2}}}$$

ou

$$\frac{l}{K} > \frac{2\,000}{\sqrt{\sigma}}.$$

Soit pour des valeurs de σ de : 400^k, 350^k, 300^k, 250^k, 200^k, 150^k, 100^k

$$\frac{l}{K} > 100,\ 107,\ 116,\ 126,\ 141,\ 163,\ 200.$$

Quand $\frac{l}{K}$ est inférieur à ces limites, la formule d'Euler n'est plus applicable. La formule scientifique, comme il a été dit, devrait tenir compte des variations de E, mais comme la loi de ces variations n'est pas bien connue, il faut se contenter (comme on le fait d'ailleurs pour les métaux) d'une formule empirique du genre

$$R = \sigma - \beta \frac{l}{K}$$

où β serait déterminé par la condition

$$\frac{l}{K} = \frac{2\,000}{\sqrt{\sigma}}; \qquad R = \frac{\sigma}{2}$$

On aura donc :

$$\frac{\sigma}{2} = \sigma - \beta \frac{2\,000}{\sqrt{\sigma}},$$

d'où

$$\beta = \frac{\sigma^{\frac{3}{2}}}{4000}.$$

Soit pour des valeurs de $\sigma = 400^k, 350^k, 300^k, 250^k, 200^k, 150^k, 100^k$

$$\beta = 2,\ 1{,}64,\ 1{,}3,\ 0{,}99,\ 0{,}71,\ 0{,}46,\ 0{,}25.$$

On aura en résumé, comme formule générale, supposant $E = 200000$: 1° pour

$$\frac{l}{K} < \frac{2000}{\sqrt{\sigma}}; \qquad R = \sigma - \beta \frac{l}{K};$$

2° pour

$$\frac{l}{K} > \frac{2000}{\sqrt{\sigma}}; \qquad R = \frac{2000000}{\left(\frac{l}{K}\right)^2}$$

et pour les dosages les plus usuels après un durcissement de 28 jours et avec les coefficients d'élasticité convenables on a d'après ce qui a été dit ci-dessus :

$$\frac{l}{K} > 3{,}14\sqrt{\frac{2E}{\sigma}} \qquad \text{et} \qquad \beta^2 = \frac{\sigma^3}{79E}.$$

et en-dessous de la limite d'élasticité

$$R = 10E\left(\frac{K}{l}\right)^2.$$

Les coefficients R donnent l'effort de rupture par centimètre carré

200 kilogr. ciment = 1 partie 565 litres sable = 4 » 710 litres gravier = 6 » $\sigma = 90$; $E = 80000$	250 kilogr. ciment = 1 partie 360 litres sable = 2 » 910 litres gravier = 5 » $\sigma = 170$; $E = 100000$
Pour $\frac{l}{K} < 132$; $R = 90 - 0{,}34\frac{l}{K}$ Pour $\frac{l}{K} > 132$; $R = 800000\left(\frac{K}{l}\right)^2$	Pour $\frac{l}{K} < 108$; $R = 170 - 0{,}78\frac{l}{K}$ Pour $\frac{l}{K} < 108$; $R = 1000000\left(\frac{K}{l}\right)^2$
300 kilogr. ciment 480 litres sable 720 litres gravier $\sigma = 120$; $E = 100000$	333 kilogr. ciment, 1 476 litres sable, 2 714 litres gravier 3 $\sigma = 200$; $E = 120000$
Pour $\frac{l}{K} < 102$; $R = 190 - 0{,}93\frac{l}{K}$ Pour $\frac{l}{K} > 102$; $R = 1000000\left(\frac{K}{l}\right)^2$	Pour $\frac{l}{K} < 109$; $R = 200 - 0{,}92\frac{l}{K}$ Pour $\frac{l}{K} > 109$; $R = 1200000\left(\frac{K}{l}\right)^2$

55. Cisaillement (constitution moléculaire). — Le cisaillement a été l'objet d'études remarquables de la part du Commandant Hartmann en France, et de M. Rejtö en Hongrie, dont les conclusions relativement à la constitution moléculaire même de la matière et à son mode de résistance, ont une grande analogie.

Le point de départ de la théorie de M. Rejtö est le suivant : Les forces extérieures ne peuvent déformer un corps qu'en opérant un glissement des molécules les unes sur les autres ; mais ce glissement n'est pas limité aux molécules directement sollicitées par les forces extérieures, il est transmis aux molécules voisines par une force intérieure, que l'on nomme cohésion ou expansion. Par suite des frottements qui tendent à s'opposer à ce glissement il se produit donc une série d'actions moléculaires internes que l'on peut déterminer si l'on se donne la forme des molécules ou celle de leur groupement, et la direction des forces qui les réunissent. M. Rejtö suppose que ces forces sont dirigées suivant les droites qui joignent les centres de gravité des corpuscules considérés.

Il résulte de ces hypothèses que la répartition des efforts se fait suivant des directions formant avec les forces extérieures un angle déterminé et constant pour chaque matière, et caractérisé par la constitution spéciale de celui-ci.

Les composantes intérieures montrent les efforts auxquels les corpuscules sont soumis. M. Rejtö fait remarquer, par exemple, que dans la traction d'une barre, il n'y a que certaines parties formant une série arithmétique qui soient étirées dans la direction des forces extérieures ; les autres sont également étirées, mais dans une direction oblique par rapport à l'axe longitudinal ; cette obliquité peut expliquer le phénomène de striction.

Dans la compression, il n'y a que quelques parties soumises réellement à des efforts de compression ; les autres sont sollicitées au contraire par des efforts de cisaillement, dirigés vers l'extérieur, normalement à l'effort de compression [1].

L'étude de M. le Commandant Hartmann est basée sur des

[1] *Sur le frottement intérieur des Corps solides*, par M. Alexandre Rejtö, professeur à Budapest, traduction en allemand par K. Gaul. A. Félix, éditeur à Leipzig.

expériences de la section technique de l'artillerie, dans lesquelles on est parvenu : « à obtenir et à relever sur les surfaces des « éprouvettes les traces des déformations intérieures. Ces traces « deviennent apparentes sitôt que la limite d'élasticité est dépas- « sée ; elles se composent de lignes continues, résultant de stric- « tions élémentaires tracées, soit en saillie, soit en creux, suivant « que l'effort principal est une compression ou une tension. Ces « lignes se multiplient quand l'effort augmente, la striction géné- « rale se produit dans la région où les strictions élémentaires « sont les plus serrées, et son contour est l'enveloppe de ces « lignes de striction.

« Toutes les traces de la déformation jouissent de la propriété « de couper sous un angle constant la direction de l'effort prin- « cipal. Mais cet angle n'est pas le même suivant que l'éprouvette « est tendue ou comprimée.

« Si un corps — prismatique par exemple — est soumis à un « effort de traction, tout se passe dans une section quelconque, « comme si l'effort principal était décomposé en deux actions « composantes : l'une normale à la section produisant un effort « de traction simple, l'autre située dans le plan de la section et « créant un cisaillement : la tension maxima dûe au cisaille- « ment s'ajoute à la tension dûe à la composante normale à la « section ; la rupture a lieu dans la section où cette somme est « maxima, et ce maximum se produit pour le plan formant « avec la direction principale l'angle constant mesuré par « M. Hartmann.

« Si le même corps est comprimé, les choses se passent de la « même manière ; cependant, il faut relever une différence essen- « tielle. L'effort de compression maximum dû au cisaillement « s'ajoute bien à l'effort de compression résultant de la compo- « sante normale à la section, mais la compression qui résulte de « cette composition de forces ne produit pas généralement la « rupture. Celle-ci résulte de la tension résultante maxima obte- « nue en retranchant l'effort de compression normal de la tension « maxima dûe au cisaillement. La rupture a lieu dans le plan où « cette tension résultante est maxima, et ce plan forme bien avec « la direction de l'effort principal l'angle défini par M. Hartmann.

« La rupture des corps solides ne se produit pas par traction ou « par compression simple, mais bien par « cisaillement.

« Le cisaillement, c'est-à-dire le glisse- « ment relatif de deux sections parallèles, « produit des efforts de compression et « de traction obliques par rapport au « plan de glissement, orientés différem- « ment suivant le sens de l'effort, et tels « que les projections de ces actions de « sens contraire sur le plan des sections « s'ajoutent et donnent une somme égale « à l'effort tranchant total.

« La rupture par cisaillement provient « presque toujours des efforts de traction « et non des efforts de compression. »

(Extraits de la note de *Déformations et conditions de la rupture dans les corps solides*, par M. Harel de la Noë, Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées, 1900 2e semestre, p. 180).

Quelques autres considérations sur le cisaillement. — L'effort tranchant produit lui deux genres d'efforts : un effort vertical qui tend à *cisailler* la poutre dans le sens vertical et un effort horizontal qui tend à la cisailler dans le sens horizontal. Ces efforts sont égaux quand ils sont appliqués à des sections situées à égale distance de l'axe neutre. On démontre que leur intensité est maxima dans l'axe neutre de la poutre, et qu'il est nul le long des fibres extrêmes. Il est clair que ces efforts se combinent dans un même élément, et que c'est leur résultante qu'il faudrait théoriquement envisager dans les calculs. Cela n'est généralement pas nécessaire quand la section

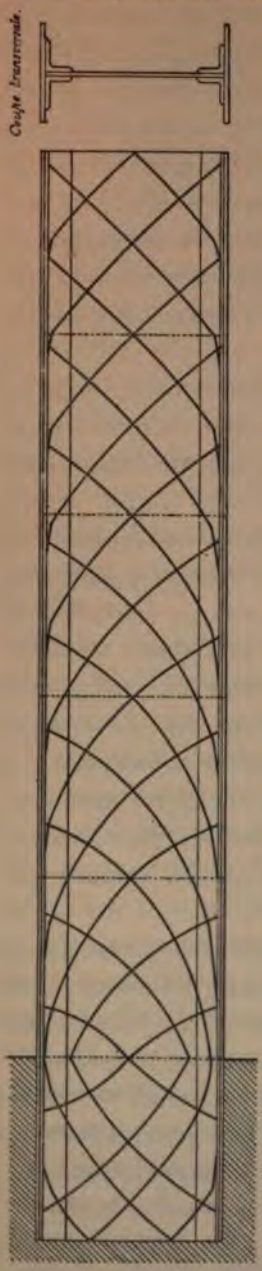


Fig. 15

est homogène ; les efforts maxima se produisant en effet (à peu d'exceptions près) dans les fibres extrêmes où les efforts de cisaillement sont nuls, et le long de la fibre neutre où le moment fléchissant ne produit point d'efforts.

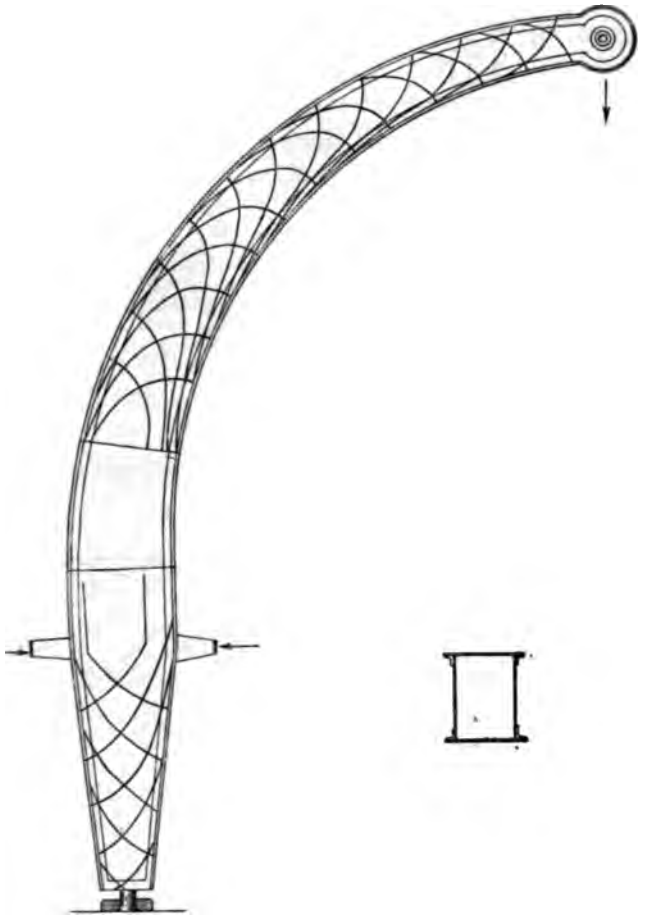


Fig. 16

Nous n'avons considéré, dans ce qui précède, que des sections normales à la fibre neutre, mais il va de soi que si un élément de poutre est soumis à un effort, les éléments voisins, dont les directions peuvent être quelconques par rapport à la première, doivent être eux aussi soumis à des forces ; cela est nécessaire, car sans ces réactions mutuelles, il serait impossible de transmettre les

réactions des charges aux appuis. On verra plus tard que la résultante des forces appliquées sur un élément quelconque fait un angle bien déterminé avec la direction de cet élément et que cet angle varie suivant la position de cet élément et suivant sa direction. Si l'on fait tourner cette section autour du point d'application de la force qui la sollicite, l'angle α mesurant l'inclinaison de la force variera de 0 à 180° ; l'effort normal, *compression ou extension* est maximum quand cet angle est de 90° et l'effort de glissement est maximum quand cet angle est nul ; on démontre que les directions suivant lesquelles les efforts de compression et d'extension sont maxima se coupent à angle droit et que les directions suivant lesquelles les cisaillements sont maxima, sont les bissectrices des directions donnant les plus grands efforts de compression ou d'extension. En traçant pour une poutre homogène, les directions des forces maxima en divers points de la section, de façon à les réunir par un trait continu, on obtient des courbes du genre de celles représentées (fig. 15 et fig. 16), extraites du remarquable ouvrage de M. Culmann « *die Graphische statik* », (Meyer et Zeller, éditeurs à Zurich, 1866).

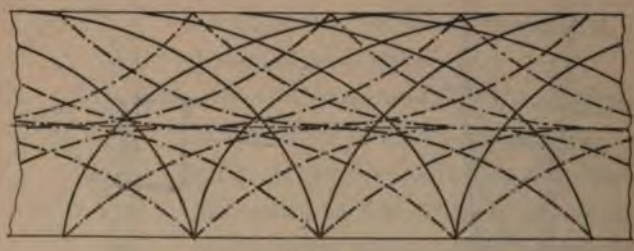


Fig. 17

La figure 17 représente les courbes établies pour une section rectangulaire extraites de l'ouvrage de M. Résal. *Ponts métalliques*, Ch. Béranger, éditeur (vol. I), p. 36.

Il suit de là que l'effort d'extension maximum n'est pas nécessairement celui qui se produit dans les fibres extrêmes, et il peut très bien arriver que dans les poutres où l'âme est très mince par rapport aux membrures, il se produise au changement de section des efforts dépassant ceux que l'on a l'habitude de considérer comme les efforts les plus grands. Le schema de la figure 18, tiré

également de l'ouvrage de M. Résal déjà cité, montre le résultat de cette composition.

La figure 19 est extraite de l'ouvrage « *Anwendungen der graphischen Statik*, par Culmann, édition publiée et revue par M. Ritter.

Dans un rail les efforts sont à compter horizontalement à partir de l'axe vertical.

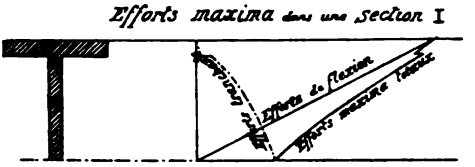


Fig. 18

I résulte de ce mode de répartition d'efforts, qu'une pièce fléchie ne se rompra pas généralement d'une façon verticale, mais plutôt suivant l'une des courbes que nous venons de signaler, et de fait M. Ritter, dans l'ouvrage déjà cité, signale d'après Heims

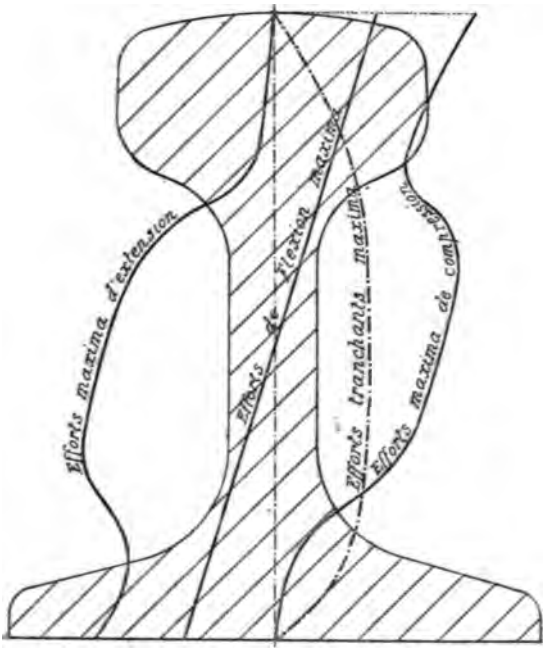


Fig. 19

(*Handbuch der Gletscherkunde*) des fentes de ce genre dans les glaciers, dans certains mouvements de terrain ; dans la configuration des os, où l'on croit voir le tissu spongieux épouser les

formes suivant lesquelles l'os devra présenter la plus grande résistance ; dans le ciment armé, on trouve également ces courbes. Quand les poutres fléchies sont armées insuffisamment dans la partie centrale ou quand elles sont munies de pièces transversales capables de bien résister aux efforts tranchants, les ruptures se produisent dans le milieu de la poutre et sont à peu près normales à son axe ; mais quand cela n'a pas lieu et surtout dans le 2e cas, ces ruptures se produisent au tiers de la portée et semblent dirigées normalement aux lignes de plus grande extension. Il faut donc bien se garder de négliger les efforts tranchants dans l'examen d'une poutre, et il sera même bon dans certains cas de construire les courbes d'efforts maxima signalées ci-dessus.

56. Coefficients de sécurité. — Le coefficient de sécurité est le rapport entre la charge dangereuse pour la stabilité d'un corps et la charge maxima qu'on lui fait supporter dans un élément de construction. Que faut-il considérer comme la charge dangereuse, celle qui répond à la limite d'élasticité, ou à la rupture ?

Si l'on a à craindre des efforts alternatifs fréquemment répétés, c'est la limite d'élasticité qu'il convient de considérer comme charge dangereuse ; dans le cas d'une charge morte ou qui ne se reproduit que rarement, on pourra prendre comme telle la charge de rupture. Mais ces distinctions n'ont guère d'intérêt, et il s'agit surtout de proportionner la valeur du coefficient de sécurité pris par rapport indifféremment à l'une ou à l'autre de ces charges suivant les circonstances (mode de chargement, nature des efforts, importance de l'ouvrage, soins apportés à la construction).

A titre de simplification, on peut recommander :

1° Pour les ouvrages ayant à supporter fréquemment la charge maximum pour laquelle ils ont été calculés, et avec certaines aggravations, des chocs par exemple, tels que ponts sous rails : Travail admissible 1/10 à 1/15 de la charge de rupture, ou coefficient de sécurité 10 à 15.

2° Pour les ouvrages ayant à supporter fréquemment la charge minimum pour laquelle ils ont été calculés, mais sans les aggravations précédentes, tels que ponts-routes : Travail admissible 1/6 à 1/9 de la charge de rupture, ou coefficient de sécurité 6 à 9.

3° Pour les ouvrages soumis rarement à la charge maximum pour laquelle ils ont été calculés, tels que les planchers, ou la supportant au contraire d'une façon continue tels que les fondations : travail admissible 1/3 à 1/6 de la charge de rupture, ou coefficient de sécurité 3 à 6.

57. Applications. — 1° Quelle section faut-il donner à un pilier en béton de 15 mètres de hauteur, supportant une charge de 16000 kilogrammes transmise par l'intermédiaire des poutres d'un plancher en béton armé? Le béton sera formé avec un mélange de 1 partie ciment (333 kilogrammes) 2 sable et 3 gravier.

Comme le plancher supérieur est absolument rigide transversalement, on peut considérer le pilier comme encastré à sa partie supérieure. La longueur libre l que nous devrons introduire dans la formule sera par suite $l = \frac{1500}{2} = 750$ (v. p. 54). La résistance du béton que nous avons choisi peut être évaluée pour une bonne exécution à 200 kilogrammes par centimètre carré. (V. tableau p. 93) et son coefficient d'élasticité moyen E à 120000. Supposons que le pilier ait une section de 15 × 15, on a :

$$K = 0{,}289 \times 15 = 4{,}33 \text{ centimètres } (^1)$$

$$\frac{l}{K} = -\frac{750}{4{,}33} = 173.$$

Comme $\frac{l}{K} > \frac{3{,}14\sqrt{2E}}{\sqrt{\sigma}}$ (= 108), le coefficient de rupture par centimètre carré sera donné par la formule (p. 93).

$$R = 1\,200000 \left(\frac{K}{l}\right)^2 = \frac{1\,200000}{(173)^2} = 40^k{,}1.$$

Le coefficient de rupture du pilier sera par suite

$$15 \times 15 \times 40{,}1 = 9022 \text{ kilogrammes.}$$

Ce qui est insuffisant, il y a donc lieu d'augmenter la section. Portons-la à 30 × 30 ; on aura comme ci-dessus

$$R = 0{,}289 \times 30 = 8{,}67 \qquad \frac{l}{K} = \frac{750}{8{,}67} = 86{,}5 \ (< 108).$$

(1) Le rayon de giration K d'une section rec[illegible]aire est [illegible]

Effort de rupture

$$R = 200 - 0{,}92 \frac{l}{K} = 120{,}4.$$

Soit pour la section totale $30 \times 30 = 900$ centimètres carrés

$$900 \times 120{,}4 = 108\,360 \text{ kilogrammes}$$

et le coefficient de sécurité

$$m = \frac{108\,360}{16000} = 6{,}8.$$

Cette valeur est suffisante dans le cas où le plancher ne supporte qu'une charge morte. Il faudrait par contre l'augmenter si le pilier était exposé à recevoir les trépidations d'un véhicule ou d'une machine en mouvement.

2° *Même problème en supposant que le pilier supporte une passerelle dont le tablier n'a pas grande raideur dans le sens transversal.*

La solution sera la même que dans le cas précédent, mais comme on ne pourra plus supposer que le pilier est absolument rigide (encastré) à sa partie supérieure, il faudra prendre

$$l = 0{,}7\ L = 0{,}7 \times 150 = 105$$

3° Quel est le coefficient de sécurité d'un pilier de 20×20 supportant un plancher d'habitation? La charge sur ce pilier est de 10000 kilogrammes. La longueur totale de 3 mètres. Le béton est constitué avec le même mélange que dans le premier cas.

On a :

$$K = 20 \times 0{,}289 = 5{,}78$$

$$l = \frac{300}{2} = 150$$

d'où

$$\frac{l}{K} = \frac{150}{5{,}78} = 26.$$

Comme $\frac{l}{K}$ est < 108, le coefficient de rupture est donné par la formule :

$$R = 200 - 0{,}92 \frac{l}{K}$$

d'où

$$R = 200 - 0{,}92 \times 26 = 176{,}1.$$

L'effort total que peut supporter le pilier est par suite

$$T = 20 \times 20 \times 176{,}1 = 70440 \text{ kilogrammes.}$$

Le coefficient de sécurité de la construction est donc

$$M = \frac{70440}{10000} = 7{,}04,$$

ce qui est largement suffisant.

4° Quelle est la charge de rupture d'un prisme de béton de $0^m{,}30 \times 0^m{,}30$ reposant sur deux appuis distants de 1 mètre et supportant en son milieu une charge concentrée ? Le béton est formé d'une partie ciment, 2 de sable et 5 de gravier (1 : 2 : 5).

Le poids propre du prisme est de 200 kilogrammes par mètre carré. Le moment maximum produit par la charge permanente est par suite

$$M_1 = \frac{200 \times 1{,}00}{8} = 25{,}0 \text{ kilogrammètres} = \frac{pl^2}{8}.$$

Le moment produit par une charge P concentrée au milieu est :

$$M_2 = \frac{Pl}{4} = \frac{P}{4} = 0{,}25\,P.$$

Le moment total est par suite

$$M = M_1 + M_2 = 25{,}0 + 0{,}25\,P.$$

Ce moment doit être égal au module de résistance de la section, qui, pour un rapport $\alpha = \frac{4}{5}$ (voir p. 85) est :

$$M_R = 0{,}20\,bh^2 = 0{,}20 \times 0{,}30 \times \overline{0{,}30}^2 = 0{,}0054.$$

Des expériences ont montré que la résistance à la compression de ce mélange pouvait être évaluée avec les corps dont on disposait à 120 kilogrammes par centimètre carré, et la résistance à l'exten-

sion de 10 kilogrammes par centimètre carré ; le moment résistant sera : (R = 100000 kilogrammes par mètre carré).

Moment résistant = 0,0054 × 100000 = 540 kilogrammes

et comme on doit avoir

$$M = 25{,}0 + 0{,}25\ P = 540.$$

$$P = \frac{515}{0{,}25} = 2060 \text{ kilogrammes.}$$

Le travail maximum de la compression était de 1,225 (1) × 10, soit de 12k,25 par centimètre carré.

Dans les expériences de Hutton signalées à la page 80 on a trouvé dans la même hypothèse et pour le mélange indiqué ci-dessus P = 2215 kilogrammes.

La limite d'élasticité a été atteinte pour

$$M_R = 0{,}1667\ (2)\ bh^2 \quad \text{et} \quad R = 50000 \text{ kilogrammes.}$$

Soit pour un moment résistant :

$$0{,}1667 \times 0{,}30 \times \overline{0{,}30}^2 \times 50000 = 225$$

et pour une charge P donnée par la formule suivante

$$25{,}0 + 0{,}25\ P = 225$$

soit pour

$$P = \frac{200}{0{,}25} = 800 \text{ kilogrammes}$$

5° Quelle est la charge concentrée au milieu qu'une marche d'escalier en béton de 0m,18 de hauteur, 0m,32 de large et 1m,50 de portée, peut supporter sans rompre? La composition du béton est de 1 de ciment pour 4 de sable ; la résistance à la compression peut être évaluée à 100 kilogrammes, et la résistance à l'extension, à 12 kilogrammes et sa limite d'élasticité à l'extension à 6 kilogrammes on aura comme ci-dessus et pour un rapport $\alpha = \frac{1}{2}$.

Module de résistance $= 0{,}256\ bh^2 = 0{,}256 \times 0{,}32 \times \overline{0{,}18}^2 = 0{,}00265$
Moment résistant $= 0{,}00265 \times 120000 = 318$ kilogrammètres.

(1) Coefficient β du tableau de la page 85.
(2) Coefficient γ du tableau de la page 85.

Poids au mètre carré

$$0{,}18 \times 0{,}32 \times 2200 = 127 \text{ kilogrammes.}$$

Moment dû au poids propre

$$M_1 = \frac{127 \times \overline{1{,}5}^2}{8} = 35{,}7$$

Moment dû à la charge concentrée P

$$M_2 = \frac{1{,}50}{4} P = 0{,}375 P.$$

Moment maximum total

$$M = 35{,}7 + 0{,}375 P.$$

On doit avoir

$$35{,}7 + 0{,}375 P = 318{,}0$$

d'où

$$P = \frac{282{,}3}{0{,}375} = 753 \text{ kilogrammes.}$$

L'expérience a donné pour ce cas 702 kilogrammes.

Le travail maximum à la compression est (v. tableau 85).

$$R_{comp} = 1{,}731 \text{ (1)} \times 12 = 20^k{,}8 \text{ par centimètre carré.}$$

Comme la charge concentrée au milieu de la portée est au maximum de 100 kilogrammes et que les marches d'un escalier se prêtent un appui mutuel, la section proposée présentera toute sécurité.

Remarquons qu'une marche semblable de porphyre de $18^{cm},5$ de hauteur, $0^m,33$ de largeur et $1^m,85$ de longueur, poids spécifique 1 260 kilogrammes s'est rompue sous une charge concentrée de 570 kilogrammes. (Büsing et Schumann).

(1) Coefficient β.

CHAPITRE III

—

CALCUL DES OUVRAGES EN BÉTON D'APRÈS L'ASSOCIATION DES FABRICANTS ALLEMANDS DE CIMENT

Constructions en béton [1]. — Les ouvrages en béton ont été calculés longtemps, comme les ouvrages similaires en maçonnerie, sans égard à la résistance à la traction. Une plus ample connaissance du béton permet cependant de déterminer le coefficient de stabilité et de sécurité des ouvrages.

58. Compression. — *a*) *Pression dans l'axe.* P représentant l'effort total (résultante de compression) agissant uniformément sur une barre de section F, et σ le taux de travail de la matière, on a :

$$\sigma = \frac{P}{F}. \tag{1}$$

La barre éprouve un affaissement plus ou moins élastique du fait de cette compression. Si ε est cet affaissement par mètre de longueur, on a :

$$\varepsilon = \alpha\sigma^m \tag{2}$$

le coefficient α et l'exposant m dépendent de la nature de la matière et de son mode de mise en œuvre. Le coefficient α peut être considéré comme l'affaissement spécifique correspondant au taux unitaire de compression; l'exposant m varie de 1,10 à 1,20 pour

[1] D'après la brochure de 1902 de l'Association des Fabricants allemands.

le béton ; il est donc toujours plus grand que l'unité. Il en résulte que, contrairement à ce qui se passe pour le fer et pour l'acier, les déformations ne sont pas proportionnelles aux efforts, mais augmentent plus rapidement que ces derniers.

Voici les valeurs que Bach donne à α et m

Désignation	Ciment	Sable	Gravier (G.) ou Pierre cassée (P.)	α	m
Ciment pur. . .	»	»	»	$\frac{1}{250000}$	1,09
Mortiers. . . .	1	1,5 du Danube.	»	$\frac{1}{356000}$	1,11
	1	3 »	»	$\frac{1}{315000}$	1,15
	1	4,5 »	»	$\frac{1}{230000}$	1,17
Bétons	1	2,5 du Danube.	5 G. du Danube.	$\frac{1}{298000}$	1,145
	1	2,5 d'Egginger.	5 P. calcaire.	$\frac{1}{457000}$	1,157
	1	5 du Danube.	6 G. du Danube.	$\frac{1}{280000}$	1,137
	1	3 »	6 P. calcaire.	$\frac{1}{380000}$	1,161
	1	5 »	10 G. du Danube.	$\frac{1}{217000}$	1,157
	1	5 d'Egginger.	10 P. calcaire.	$\frac{1}{367000}$	1,207

Pression excentrique. — Si la résultante ne passe pas par l'axe de la pièce debout, en dehors de la compression simple supposée uniformément répartie, il se produit un moment de flexion donnant lieu à des compressions supplémentaires et à des tensions d'une importance d'autant plus grande que le point d'application de la résultante est plus éloigné du centre de figure de la section.

Soit e cette distance, W le moment de résistance de la section par rapport à la ligne joignant les deux points mentionnés, on peut écrire, tant que la distance e ne se trouve pas en dehors de certaines limites (noyau central de la section),

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{Pe}{W}. \tag{3}$$

Le signe + correspondant à l'arête la plus comprimée et le signe — à l'arête opposée.

Le taux de compression σ est nul pour $\frac{Pe}{W} = \frac{P}{F}$; c'est-à-dire pour $e = \frac{W}{F}$. Cette condition permet de tracer la limite du noyau central.

Quand le point d'application dépasse la limite mentionnée, ce qui peut arriver pour un mur ou une voûte soumis à une flexion latérale, les efforts d'extension qui sollicitent la section en dehors du tiers central, doivent être pris en considération pour la sécurité de l'ouvrage et principalement en vue des fissures qui peuvent compromettre son étanchéité.

En dehors des compressions sollicitant les ouvrages en béton dans l'axe ou le noyau central des murs ou poteaux, il y a lieu de considérer encore des efforts tangentiels tels que ceux qui se produisent sous l'action de l'eau ou de la poussée des terres sur des murs à simple ou double courbure, ou sur des voûtes sollicitées toujours par les mêmes charges et projetées en raison de ces dernières.

Ces efforts résultent des pressions normales s'exerçant sur la face concave des ouvrages. La distinction des efforts d'extension et de compression se fait d'après les résultats d'expérience de Bach et la théorie de *Lamé*.

59. Flexion. — *a*) *Méthode exacte*. Soit M le moment des forces qui sollicitent une barre ou une dalle (fig. 20). Les efforts qui produisent la déformation d'après l'équation (2), sont parallèles à l'axe de la pièce et varient à peu près comme l'indique le diagramme ci-contre.

Les sommes D et Z de ces efforts de compression et d'extension sont égales, ce qui donne l'équation

$$D = Z. \tag{4}$$

Ensuite les résultantes D et Z, à la distance a, forment un couple Da ou Za qui constitue le moment de résistance de la pièce égal au moment des forces extérieures.

$$M = Da = Za. \tag{5}$$

Soit enfin un prisme à section rectangulaire de hauteur h et de largeur b, soumis uniquement à des forces verticales (charges et réactions), divisé en deux parties par une section quelconque, dont une est représentée sur la figure 20. Il s'agit de déterminer encore les pressions et tensions maxima s'exerçant sur les fibres extrêmes ; soit σ_0 et σ_u ces valeurs encore inconnues et prenons x_0 et x_u, distances de ces fibres à la fibre neutre, comme inconnues auxiliaires, ainsi que les grandeurs ε_0 et ε_u représentant les raccourcissements et allongements spécifiques maxima à la distance respective de l'unité par rapport à la fibre neutre, de telle sorte que les raccourcissements et allongements des fibres extrêmes sont respectivement ε_0, x_0 et ε_u, x_u.

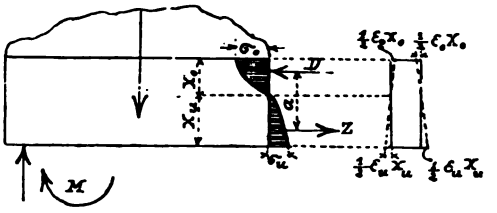


Fig. 20

Nous avons donc 6 inconnues pour la détermination desquelles on a les relations suivantes :

1° Une relation purement géométrique :

$$x_0 + x_u = h.$$

2° Une relation purement géométrique, relative à la déformation :

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_u.$$

3° et 4° Les relations existant entre les efforts et les déformations :

$$\begin{cases} \sigma_0^m = \dfrac{1}{\alpha}\,\varepsilon_0\,x_0 \\ \sigma_u^{m_1} = \dfrac{1}{\alpha_1}\,\varepsilon_u\,x_u \end{cases}$$

(l'exposant m_1 et le coefficient α_1 ont des significations analogues en ce qui concerne l'extension à celles de l'exposant m et du coefficient α en ce qui concerne la compression).

Les relations (4) et (5) doivent résulter des conditions d'équilibre entre les efforts D et Z mentionnés ci-dessus.

Si σ désigne l'effort unitaire subi par une fibre élémentaire de section dF à la distance x de la fibre neutre, on a du côté comprimé :

$$\sigma^m = \frac{1}{\alpha}\varepsilon_0 x$$

et comparant cette relation à la relation (3) ci-dessus :

$$\sigma_0{}^m = \frac{1}{\alpha}\varepsilon_0 x_0.$$

Il vient :

$$\frac{\sigma^m}{\sigma_0{}^m} = \frac{x}{x_0}.$$

Les efforts élevés à la $m^{\text{ème}}$ puissance sont donc entre eux dans le béton comme les distances de leurs points d'application

ou
$$\sigma = \sigma_0 \sqrt[m]{\frac{x}{x_0}}.$$

Pour les corps pour lesquels $m = 1$ (tels que le fer et l'acier), cette formule connue sous le nom de loi de proportionnalité est la base de la théorie de la flexion de Navier.

On a donc :

$$D = \int_{x=0}^{x=x_0} \sigma dF = \frac{\sigma_0}{\sqrt[m]{x_0}} \int_{x=0}^{x=x_0} dF \sqrt[m]{x}$$

$$Z = \frac{\sigma_u}{\sqrt[m_1]{x_u}} \int_{x=0}^{x=x_u} dF \sqrt[m_1]{x}.$$

On a donc, en remplaçant dF par bdx

$$\frac{\sigma_0 b}{\sqrt[m]{x_0}} \int_0^{x_0} x^{\frac{1}{m}} dx = \frac{\sigma_u b}{\sqrt[m_1]{x_u}} \int_0^{x_u} x^{\frac{1}{m_1}} dx$$

ou intégrant :

$$\frac{\sigma_0}{\sqrt[m]{x_0}} \frac{m}{m+1} \sqrt[m]{x_0^{(m+1)}} = \frac{\sigma_u}{\sqrt[m_1]{x_u}} \cdot \frac{m_1}{m_1+1} \sqrt[m_1]{x_u^{(m+1)}}$$

ou enfin

$$(6) \qquad \frac{m}{m+1}\sigma_0 x_0 = \frac{m_1}{m_1+1}\sigma_u x_u.$$

La dernière équation exprime l'égalité des moments des forces intérieures et extérieures.

Le moment élémentaire relatif à dF est σdFx; la somme des moments élémentaires est donc :

$$M = \frac{\sigma_0 b}{\sqrt[m]{x_0}} \int_0^{x_0} x^{\left(\frac{1}{m}+1\right)} dx + \frac{\sigma_u b}{\sqrt[m_1]{x_u}} \int_0^{x_u} x^{\left(\frac{1}{m}+1\right)} dx$$

ou

$$M = \frac{\sigma_0 b}{\sqrt[m]{x_0}} \frac{m}{1+2m} \sqrt[m]{x_0^{(1+2m)}} + \frac{\sigma_u b}{\sqrt[m_1]{x_u}} \frac{m_1}{1+2m_1} \sqrt[m_1]{x_0^{(1+2m_1)}}$$

ou

$$(6) \qquad M = \sigma_0 b \frac{m}{1+2m} x_0^2 + \sigma_u b \frac{m_1}{1+2m_1} x_u^2.$$

N. B. — Quand pour certains corps tels que le fer et l'acier, on a $\alpha = \alpha_1$ et $m = m_1$, les équations (1) à (5) donnent $\sigma_0 = \sigma_u$; $x_0 = x_u = \frac{h}{2}$ et l'équation (6) devient :

$$M = \sigma_0 \frac{bh^2}{6}.$$

En résolvant ces équations on peut déterminer les inconnues les plus importantes σ_0, σ_u, x_0 et x_u.

60. Méthode approximative. — Si l'on suppose $m = m_1 = 1$, cela revient à l'hypothèse d'une répartition des efforts en raison directe de leur distance à la fibre neutre (fig. 21).

Comme les aires des triangles des efforts représentant respectivement les valeurs de D et de Z qui doivent être égales, il en résulte sans autre par comparaison avec les courbes ponctuées, que les hauteurs σ_0 et σ_u de ces triangles sont un peu trop grandes, de sorte que cette approximation donne après tout un peu plus de sécurité.

Représentons par μ le rapport des déformations spécifiques $\frac{\alpha_1}{\alpha}$ relatives à l'extension et à la compression ; ce rapport μ dépend du dosage et du mode de préparation du béton.

Les quatre équations suivantes permettent de déterminer sans autres, les inconnues x_0, x_u, σ_0, σ_u.

(1) $$x_0 + x_u = h$$

(2) $$\frac{\sigma_0}{\sigma_u} = \mu \frac{x_0}{x_u}$$

(3) $$\frac{\sigma_0 x_0}{2} = \frac{\sigma_u x_u}{2}$$

(4) $$\frac{\sigma_0 x_0}{2} \cdot \frac{2}{3} hb = M.$$

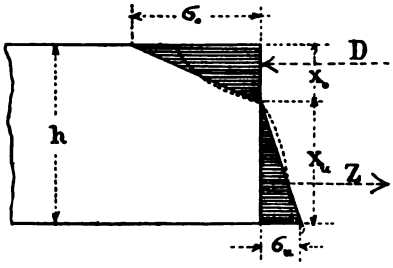


Fig. 21

D'où :

(7) $$\sigma_0 = \frac{3M}{bh^2}(1 + \sqrt{\mu})$$

(8) $$\sigma_u = \frac{3M}{bh^2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{\mu}}\right).$$

Comme μ doit être pris au moins égal à 9

$$\sigma_0 = \frac{3M}{bh^2} \quad \text{ou} \quad \frac{M}{\frac{bh^2}{12}} = \frac{2M}{\frac{bh^2}{6}} \text{ pour la compression,}$$

$$\sigma_u = \frac{4M}{bh^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{2}{3}M}{\frac{bh^2}{6}} \text{ pour l'extension.}$$

Les compressions sont donc environ doubles, les tensions seu-

lement les 2/3 des efforts correspondants se produisant dans les corps également élastiques à la compression et à l'extension.

Pour $\mu = 16$ (valeur moyenne)

$$\sigma_0 = 2{,}5 \frac{M}{\frac{bh^2}{6}}; \qquad \sigma_u = \frac{\frac{5}{8} M}{\frac{bh^2}{6}}.$$

Enfin, pour $\mu = 25$ (valeur maxima)

$$\sigma_0 = 3 \frac{M}{\frac{bh^2}{6}}; \qquad \sigma_u = \frac{\frac{3}{5} M}{\frac{bh^2}{6}}.$$

61. Cisaillement. — Si la section F de la pièce est soumise directement au cisaillement par une force R parallèle à cette section, les efforts de glissement peuvent être considérés comme uniformément répartis et le taux de travail de glissement est simplement

$$(9) \qquad \tau = \frac{Q}{F}.$$

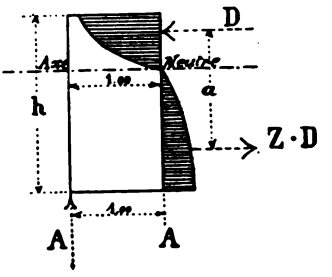


Fig. 22

Si le cisaillement résulte au contraire d'une flexion, la fatigue maxima se produit au droit de l'axe neutre et dans la section pour laquelle la force transversale (force verticale ou de glissement) est la plus grande.

Dans une poutre reposant sur deux appuis la force transversale est toujours maxima au droit d'un appui (fig. 22) et égale à la réaction A sur cet appui.

On a par suite l'égalité des moments

$$Da = A \times 1$$

d'où

$$D = \frac{A \times 1}{a}.$$

Mais comme a d'après (3) est approximativement égal à $\frac{2}{3}h$

$$D = \frac{3}{2}\frac{A \times 1}{h}.$$

L'effort de glissement sera pour un cisaillement maximum dans une section de largeur b

$$\tau = \frac{D}{1 \times b} = \frac{3 \times A \times 1}{2 \times h \times b \times 1} = \frac{3}{2}\frac{A}{bh}. \tag{10}$$

A chaque glissement horizontal τ correspond un effort de glissement vertical τ_1 et l'équilibre de l'élément considéré exige pour ne pas tourner que

$$\tau_1 = \tau$$

ou

$$\tau_1 = \tau = \frac{2}{3}\frac{A}{bh}.$$

LIVRE II

CIMENT ARMÉ

CHAPITRE PREMIER

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

Une unité de résistance à la compression coûte de 3 à 6 fois moins avec l'emploi du béton qu'avec celui du fer et inversement une unité de résistance à l'extension, coûte 2 à 3 fois moins avec le fer qu'avec le béton. Il est donc clair que si l'on peut disposer les matières de façon à faire travailler dans une même poutre, le béton à la compression et le fer à l'extension, on réalisera pour une résistance donnée le maximum d'économie auquel on peut prétendre avec l'emploi de ces deux matériaux.

Monier le premier, et après lui, de nombreux praticiens ont constaté qu'il suffisait d'englober les barres métalliques dans le béton pâteux pour parfaire la solidarité de ces deux matières et les obliger à travailler simultanément ; il suffira donc de placer le fer dans les parties tendues pour obtenir les avantages ci-dessus.

Les bons résultats de cette union s'expliquent par le fait que le ciment pâteux adhère au fer presque aussi fortement qu'à lui-même et que les deux matières ont à peu près le même coefficient de dilatation. Cette union se maintiendra donc à toutes les températures.

L'emploi du ciment armé présente encore les autres avantages suivants :

1° Possibilité de donner à la construction les formes les plus variées sans augmenter sensiblement leur prix et sans diminuer leur résistance. Exemple : la belle application faite par M. Paulus, architecte, à la construction du Château d'eau de l'Exposition de 1900 (Ed. Coignet, constructeur) ;

2° Solidarité très étendue des divers éléments d'une construction en ciment armé. Dans sa note à l'Académie des Sciences (21 avril 1902), M. Rabut, Ingénieur des Ponts et Chaussées, a signalé le rapport suivant entre la solidarité des pièces de pont en charpente et en ciment armé : tandis qu'elle s'exerce sur 3 entretoises métalliques, elle s'étend sur 9 entretoises consécutives d'un pont en ciment armé, établi dans les mêmes conditions ;

3° Diminution du danger de flexion par compression, par suite du plus petit rapport entre les dimensions extrêmes ;

4° Suppression des assemblages coûteux par rivets ou boulons, et par suite, augmentation de la résistance en ces points, diminution d'entretien et plus grande facilité d'exécution ;

5° Grande résistance aux actions atmosphériques et accroissement constant de cette résistance avec le temps. Inaltérabilité même en présence de fumées sulfureuses, tandis que certains ouvrages métalliques exposés aux mêmes influences ont été détruits en quelques années ;

6° Résistance à l'action du feu. Le béton étant mauvais conducteur de la chaleur, la masse ne s'échauffe que très lentement et garde par suite très longtemps sa résistance. Les constructions métalliques prennent au contraire très rapidement la température ambiante et les dilatations correspondantes ne tardent pas à pousser les murs et à les renverser. On sait, d'autre part, que la résistance du fer décroît de 50° à 100°, qu'elle augmente de 200° à 300°, pour décroître de nouveau et très rapidement jusqu'à s'annuler presque complètement vers 525° (Le Chatelier). Il en résulte qu'un foyer même restreint d'incendie peut amener la destruction complète d'un édifice. De tels effets ne sont pas à craindre dans les constructions en ciment armé.

A ces qualités on peut en ajouter encore bien d'autres : facilité

de mise en œuvre, commodité de transport des matières premières, rigidité de la masse, imperméabilité suffisante dans la plupart des cas, etc., etc.

Au point de vue de la résistance, la façon dont les efforts se transmettent montre que l'on peut constituer en toute sécurité une poutre en ciment armé. Pour s'en rendre compte, il suffit en effet d'examiner ce qui se passe dans une poutre reposant sur deux appuis et chargée en divers points d'une façon quelconque. On sait que toutes les sections de cette poutre sont le siège d'efforts de compression et d'extension dirigés parallèlement à l'axe longitudinal de cette dernière ; que ces efforts croissent depuis les appuis jusqu'à la section où le moment fléchissant est maximum. Cette variation des efforts longitudinaux n'est que la conséquence mathématique des forces verticales qui s'exercent dans chaque section, et qu'on appelle *efforts tranchants*. Quand l'effort tranchant tend vers zéro, les efforts longitudinaux et, par suite, les moments fléchissants croissent très peu ; ils restent à peu près constants ; au contraire, quand les efforts tranchants sont très grands, les moments croissent très rapidement. Les efforts tranchants atteignent leur valeur maxima au droit des appuis ; c'est donc dans ces régions que s'exerce la plus grande transmission d'efforts. Mais comme c'est également dans ces régions extrêmes que le métal est le moins fatigué, la striction, cause principale du descellement, est encore bien loin de se produire et l'adhérence des deux matières sera généralement suffisante pour assurer leur solidarité complète.

La longueur de barre nécessaire pour réaliser un scellement parfait est d'ailleurs très faible. Examinons le cas le plus défavorable, celui du fer rond qui possède le minimum de surface par rapport à sa section ; si d est le diamètre de la barre, R la résistance par centimètre carré du métal à la traction, A le coefficient d'adhérence par centimètre carré de surface en contact de fer et de béton, l la longueur nécessaire pour s'opposer au glissement quand le fer subit une traction capable d'amener sa rupture, on a

$$l\pi d\mathrm{A} \geqq \frac{\pi d^2 \mathrm{R}}{4}$$

soit

$$l \geqq \frac{dR}{4A}$$

ce qui donne $l \geqq 25d$ pour $A = 18^k$ et $R = 1\,800$ (limite d'élasticité du fer).

Il suffirait donc théoriquement d'une distance, égale à 25 fois le diamètre des barres, entre l'appui et le siège de l'effort longitudinal maximum pour que l'armature ne tende à glisser que lorsqu'elle approche de la limite d'élasticité. Pratiquement, il faudra une longueur beaucoup plus grande, car il y a lieu de faire entrer en ligne de compte les ébranlements. Il n'en reste pas moins une marge considérable dans la généralité des cas, grâce à laquelle le fer et le béton supportent sans se dissocier et par suite solidairement les efforts s'exerçant sur l'ensemble de la construction. On remarquera d'ailleurs que l'on est maître jusqu'à un certain point de réduire le diamètre des barres et d'augmenter leur nombre en conséquence.

62. Choix des matières. — Pour que le ciment armé donne intégralement tous les bons résultats qui viennent d'être mentionnés, il est certaines règles pratiques à suivre dans le choix des matières et dans le mode de les mettre en présence.

Ciments. — Il convient d'employer de préférence les ciments artificiels, dits de Portland, comme étant les seuls dont la composition et le mode de fabrication permettent d'affirmer que les résistances ne s'écarteraient guère de celles admises.

Les ciments de laitiers donnent toute satisfaction dans les constructions constamment immergées. A l'air libre, leur dessiccation est assez rapide pour arrêter leur durcissement. D'autre part, comme les mortiers de laitiers sont d'une application moins répandue, on ne saurait affirmer qu'ils protègent aussi bien les armatures contre toute oxydation et qu'ils jouissent au même degré de toutes les qualités des mortiers et bétons de ciment Portland.

Les ciments à prise rapide donnent d'excellents résultats dans les canalisations où ils rendent de grands services par l'économie considérable de matériel de moulage qu'ils permettent de

réaliser. Cette supériorité, au point de vue de la rapidité d'exécution, est compensée par leur moindre résistance.

Les ciments de Portland de bonne marque, offrent toute sécurité ; il serait bon cependant d'étudier leur résistance et leur coefficient d'élasticité, si l'on disposait d'appareils d'essai d'un emploi commode, ou tout au moins de se rendre compte de leurs qualités à l'aide d'essais simplifiés ; tels que ceux proposés par M. Le Chatelier au Congrès de Budapest (v. p. 17). Il importe avant tout d'exclure l'emploi de ciments expansifs, qui, au bout d'un temps assez long (et c'est précisément là le danger) peuvent devenir le siège d'efforts intérieurs capables de détruire toute résistance.

Sable, gravier, ballast. — La condition essentielle de bonne exécution d'un ouvrage en ciment armé est *la pureté du sable employé* ; des quantités à peine sensibles d'impuretés de nature argileuse peuvent annihiler le bon effet attendu du choix judicieux des autres matériaux. C'est pourquoi l'on recommande de ne jamais effectuer le mélange du ciment et du sable à même sur le sol et de se servir à cet effet d'une aire en planches.

Les sables et graviers doivent être très mélangés comme grosseurs et les dimensions de ces derniers, proportionnées naturellement aux épaisseurs de bétons prévues. Les plus gros grains ne doivent présenter aucune dimension dépassant la moitié de ces épaisseurs.

On ne reviendra pas sur ce qui a été dit p. 30 sur les qualités à rechercher dans les sables et graviers. Rappelons seulement que la pierre cassée donne de meilleurs résultats que les cailloux roulés et que la proportion des mélanges doit être établie de façon à ce qu'un excès de mortier donne l'assurance que tous les vides du gravier et du sable seront comblés.

63. Fabrication des mortiers et bétons. — Nous n'ajouterons à ce qui a été dit p. 28, que les recommandations spéciales aux mortiers et bétons destinés à l'exécution des ouvrages en ciment armé. Il convient de gâcher les mélanges avec un faible excès d'eau. En effet, les mortiers gâchés secs n'acquièrent une très grande dureté que grâce à un pilonnage parfait, parfois très diffi-

cile à réaliser à l'intérieur de coffrages encombrés d'armatures dans plusieurs directions. Et, tout bien considéré, il vaut mieux se résigner à une résistance plus faible, pour avoir la certitude qu'elle sera atteinte partout et que le fer et le béton se trouveront associés intimement dans toutes leurs parties.

On sait que les bétons changent de volume pendant la prise; ils se dilatent quand le durcissement s'opère au sein de l'eau; ils se contractent quand il s'effectue à l'air. Les praticiens savent atténuer ces variations de volume en laissant les premiers jours, sous une humidité constante les ouvrages devant rester au sec et à l'air libre. En outre, ils emploient de préférence des dosages moyens, les mélanges riches étant plus sensibles aux variations de volume que les mélanges pauvres; ces dosages offrent en outre l'avantage d'être plus économiques (non pas seulement par suite de la moindre quantité de ciment, mais aussi parce que les fortes résistances attendues des dosages riches sont partiellement détruites par l'effet des efforts intérieurs résultant des dilatations ou des contractions.

Voici d'ailleurs ce que dit à ce sujet, M. Considère [1].

« Quand, au lieu d'être causées par des liaisons extérieures, les entraves au retrait viennent d'armatures noyées dans la masse, les tensions intérieures qui se produisent dans le béton sont uniformisées par l'action du métal et il n'en est jamais résulté de fissures immédiates dans les prismes de dosage quelconque que nous avons faits. Mais lorsque les prismes en ciment pur armé, conservés à l'air, ont été soumis à des efforts de flexion, ils se sont fissurés pour des allongements de $0^{mm},10$ à $0^{mm},25$, alors que les prismes analogues en mortier ou béton maigre (300 à 600 kilogrammes de ciment par mètre de sable et gravier) supportaient sans se fissurer, des allongements de $0^{mm},80$ à 2 millimètres par mètre.

« Ce fait mérite d'autant plus d'attention que, sans armatures, le ciment pur s'allonge, avant de se rompre, beaucoup plus que les mortiers maigres. L'infériorité du ciment pur dans les pièces

[1] Contribution à l'étude des propriétés du béton armé. Congrès de Budapest de 1190.

armées exposées à l'air, paraît avoir pour cause sa tendance à prendre quatre ou cinq fois plus de retrait que le béton maigre. En l'empêchant, en grande partie, les armatures épuisent la faculté d'allongement que possède le ciment.

« Toute entrave apportée au retrait diminue les qualités des mortiers et bétons dans une mesure d'autant plus grande que le dosage est plus riche et le retrait plus gêné.

« Les inconvénients qui en résultent, ont relativement peu d'importance pour les bétons maigres ; ils sont très graves pour les mortiers riches conservés à l'air sec....

Voici l'opinion du même auteur pour les bétons conservés dans l'eau.

« Il semble en conséquence prudent de ne pas forcer la richesse des dosages de ciment au delà des limites qui assurent une suffisante imperméabilité et une longue durée aux mortiers immergés, et il parait opportun de ne dépasser le dosage de 800 à 900 kilogrammes, qui donne le maximum de résistance, que dans les ouvrages si exposés aux vagues que la rapidité de prise soit une condition nécessaire de succès.

Voici les valeurs données par M. Considère :

Retrait dans l'air . .	Mortier à dosage riche.	1mm, 5 à 2 millimètres.
	Bétons maigres. . . .	0, 30 à 0mm,50.
Dilatation dans l'eau.	Mortier à dosage riche.	1, 0 à 2 millimètres.
	Bétons maigres . . .	0, 20 à 0mm,50.

Les dosages à recommander pour le ciment armé, sont : pour les hourdis, poutres, poutrelles, poteaux

300 kilogrammes de ciment Portland
0m3,400 de sable
0m3,800 de gravillon,

pour les conduites et les réservoirs cylindriques de faible épaisseur

400 à 600 kilogrammes de ciment Portland
1 mètre cube de sable.

Il faut éviter de soumettre le béton à des vibrations ou à des charges pendant la première période de durcissement. Le dé-

trement pour bien des raisons ne peut être cependant trop retardé. A recommander la méthode de M. Ed. Coignet, consistant à décintrer tout d'abord les hourdis, puis les faces verticales des nervures, et à maintenir le plus longtemps possible les fonds de ces dernières.

64. Armatures. — Pour constituer les armatures on a recours soit au fer, soit à l'acier. Comme il n'y a guère de différence de prix entre ces deux matières, il semble qu'en général il n'y ait pas à hésiter à préférer l'acier doux dont le coefficient d'élasticité est plus élevé, la résistance à la rupture plus grande et qui possède une limite d'élasticité supérieure à celle du fer, tous facteurs jouant, comme on le verra plus loin, un rôle important dans la résistance de la construction en ciment armé. Les aciers durs, peu cassants, suffisamment malléables encore pour être travaillés à chaud seraient peut-être avantageux. Mais il faut attendre le résultat de quelques recherches expérimentales à ce sujet.

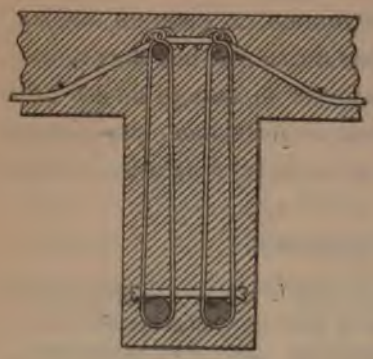


Fig. 23

Les armatures se divisent en 3 catégories ; elles sont parallèles aux efforts longitudinaux (directrices), normales à ces derniers (barres de répartition ou génératrices), ou enfin parallèles à la direction des charges (attaches ou étriers), dans un hourdis simple ou nervuré.

Ces étriers ou attaches ne sont pas bien utiles dans les hourdis de faible épaisseur (inférieurs à 14 centimètres). Théoriquement on se rendra compte de leur utilité par le calcul des efforts de cisaillement.

Les barres de répartition ne sont généralement employées que dans les hourdis. Elles prennent place entre les directrices et les charges et s'appuient sur les premières.

Le système Ed. Coignet emploie cependant des sortes de barres de répartition dans les poutres de grande hauteur (fig. 23).

Les directrices se placent le plus près possible des faces extrêmes voisines.

On admet généralement cependant qu'il convient que ces armatures soient recouvertes d'une épaisseur suffisante de béton ou de mortier, laquelle ne peut être inférieure à 2 centimètres que lorsque l'épaisseur des directrices est très faible.

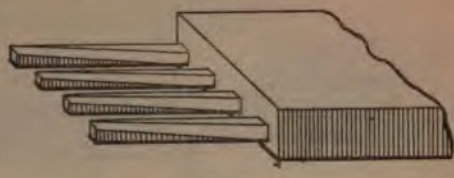


Fig. 24

De même les armatures multiples des poutres doivent laisser entre elles un intervalle libre d'environ 4 centimètres pour les barres rondes, un peu plus pour les fers carrés, par exemple, afin de permettre un remplissage convenable lors de la coulée et au pilonnage du béton.

Quant aux formes d'armatures le plus généralement employées elles sont des plus diverses et constituent l'originalité et la propriété des systèmes concurrents.

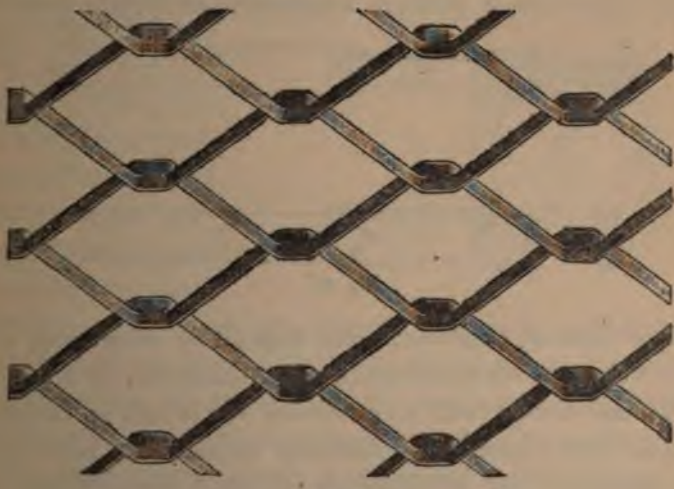


Fig. 25

Le plus grand nombre de constructeurs emploie des barres rondes, qui se trouvent facilement dans le commerce. Si leur surface d'adhérence rapportée au centimètre carré de section (à laquelle on donnera le nom d'adhérence spécifique) est défavo-

rable, cet inconvénient peut être atténué en remplaçant une grosse barre par plusieurs petites, dont la section totale est équivalente à celle de la première. On augmente ainsi l'adhérence et l'on répartit mieux les efforts. La même ressource s'offre naturellement pour tous les autres profils, mais c'est dans les barres rondes que l'on peut se procurer le plus facilement de faibles sections. Le fer rond par contre est celui qui découpe le moins le ciment et qui facilite le mieux le remplissage des coffrages et le dégagement des bulles d'air.

Fig. 26

Le fer carré employé par certains constructeurs se trouve aussi commodément dans le commerce ; il offre une adhérence spécifique plus grande, mais ses arêtes vives ménagent moins le le ciment. En Amérique le système Ransome (fig. 24), très répandu, utilise uniquement des fers ou aciers carrés, tordus ensuite à la machine de manière à présenter un certain nombre de

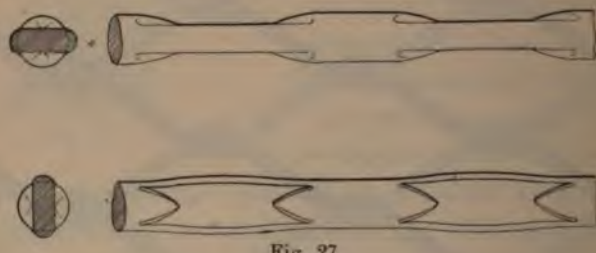


Fig. 27

spires par unité de longueur. Cette disposition aurait pour avantage de s'opposer complètement à tout glissement et d'augmenter sensiblement la résistance à l'extension de ces barres. Cette préoccupation des ingénieurs américains se rencontre déjà dans le métal déployé. Cette armature (fig. 25) est à recommander dans bien des cas par sa rigidité propre, la qualité supérieure des tôles avec lesquelles on la fabrique, la régularité de ses mailles, sa grande adhérence et sa résistance à tout glissement. On pourrait rapprocher de ce grillage un des plus anciens, le système Hyatt (fig. 26).

Ce souci se retrouve également dans les barres Thacher (fig. 27), où l'inventeur a cherché de concilier la constance de la section avec l'irrégularité de sa forme s'opposant à tout glissement.

On fait également usage très fréquemment de petits profils spéciaux, parmi lesquels les plus renommés sont les aciers en + de M. Bonna (fig. 28) qui a su utiliser leurs propriétés spéciales, au point de vue constructif; (assemblage des tronçons par éclisses, utilisation des génératrices échancrées de distance en distance pour loger les directrices.)

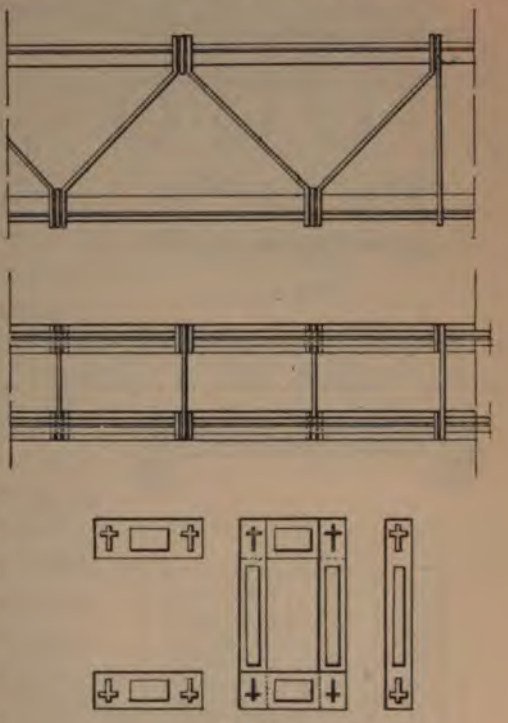


Fig. 28

Ces profils fabriqués par des usines spéciales peuvent donc être demandés en aciers de premier choix, toujours de la même qualité. — Ils jouissent d'une très grande adhérence spécifique et d'un moment d'inertie propre plus élevé à section égale que les barres rondes ou carrées. — Ces armatures présentent donc au point de vue de leur raideur avant la prise du ciment des avantages indiscutables pour l'exécution des pièces coulées, comportant en général des ossatures préalablement montées avant leur mise en place.

Si l'on passe maintenant de la forme des sections des barres, à la disposition de celles-ci, on retrouve encore des variétés nombreuses.

La plupart des constructeurs font usage de directrices droites, franchissant d'un seul jet la portée des pièces et d'un écartement rarement supérieur à 15 centimètres. Mais tous ne font pas usage

de barres de répartition, et cette suppression n'est pas recommandable, principalement pour des directrices à grand écartement; les barres de répartition assurent le maintien des directrices dans leurs positions respectives lors du pilonnage, mais leur principal avantage est de concourir à la résistance, principalement dans les hourdis nervurés.

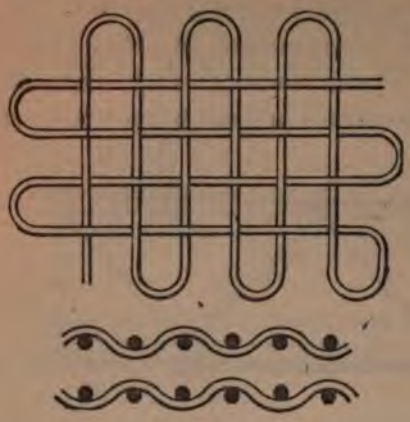


Fig. 29

M. P. Cottancin pousse même encore plus loin ce que M. Rabut a nommé très heureusement la couture du ciment, en constituant les génératrices et les directrices avec une même barre continue, de faible diamètre, pliée et repliée de manière à former un véritable tissu. Ce système (fig. 29) présente indiscutablement des propriétés remarquables.

Enfin dans le système Fer-Béton (Matrai) (fig. 30 et 31), les directrices ont la forme de chaînettes, et sont constituées par des aciers de 5 millimètres de diamètre. Parfois deux, trois fils sont cablés ensemble pour ne pas trop rapprocher les directrices. Celles-ci sont dirigées parallèlement aux diagonales du rectangle à couvrir, de manière à répartir les charges le plus près possible des appuis.

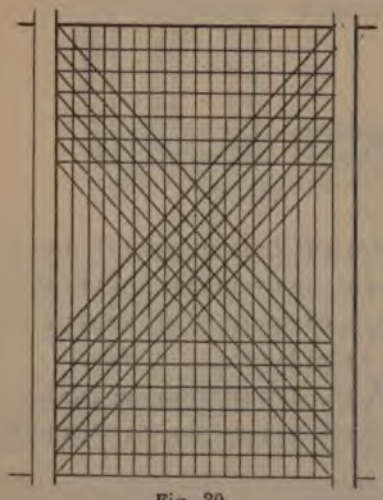


Fig. 30

Le système Kœnen utilise également la chaînette (fig. 32).

On retrouve les mêmes variétés pour les armatures de poutres que pour celles des hourdis, soit en ce qui concerne la

forme des sections des barres, soit relativement à leurs dispositions.

On distingue l'armature simple, c'est-à-dire ne comprenant qu'une série de barres enrobées le plus près possible des régions tendues.

Fig. 31

Parmi ces systèmes, celui de Sanders est absolument remarquable par sa simplicité et sa forme rationnelle (fig. 33).

Fig. 32

L'armature double comporte deux systèmes de barres, l'un voisin de la face tendue, l'autre de la face comprimée de la poutre.

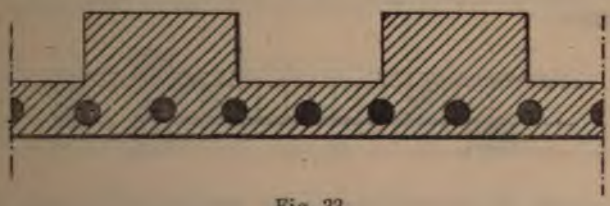


Fig. 33

Elle peut être symétrique, c'est-à-dire les barres comprimées présentent la même section que les barres tendues. Mais la plupart des constructeurs ont abandonné cette première idée, et ne la conservent que dans des cas tout à fait spéciaux, et se sont ralliés aux armatures dissymétriques, soit par la section, soit par la disposition.

A mentionner dans cette catégorie le système Ed. Coignet, déjà nommé (fig. 23), qui n'emploie plus la barre comprimée que pour

des raisons de construction (serrage des attaches). La barre de compression n'acquiert de l'importance que lorsqu'il se présente des hourdis insuffisants.

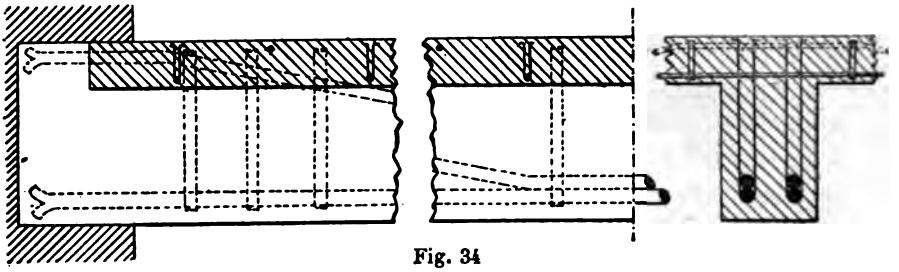


Fig. 34

Dans le système Hennebique, la barre infléchie dans la partie centrale est certainement une des plus heureuses conceptions, puisqu'elle joue le rôle de barre tendue, par suite de l'encastre-

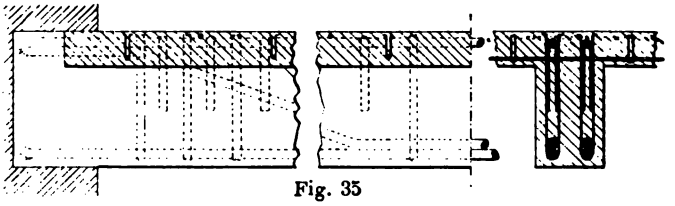


Fig. 35

ment (voir fig. 34). M. Hennebique admet naturellement aussi la barre comprimée (fig. 35), quand la résistance du hourdis est insuffisante.

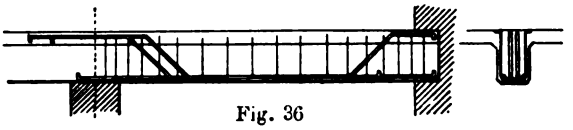


Fig. 36

Le système Wayss se rapproche beaucoup au point de vue théorique du système précédent (fig. 36).

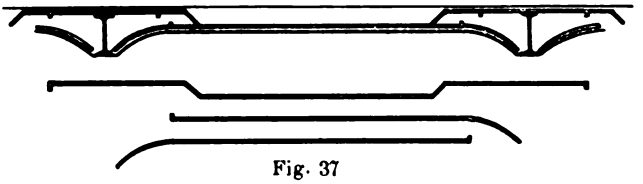


Fig. 37

Pour mémoire le mode de construction Wayss combiné (fig. 37) avec des fers à plancher.

Le système Boussiron (fig. 38 et 39) n'admet des barres soi-disant comprimées que sur l'étendue des régions où règnent les

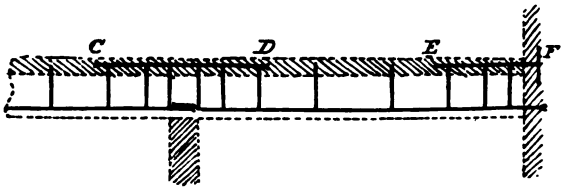


Fig. 38

moments négatifs ; ces barres ne vont pas rencontrer les barres tendues, et le glissement est évité par des queues de carpe.

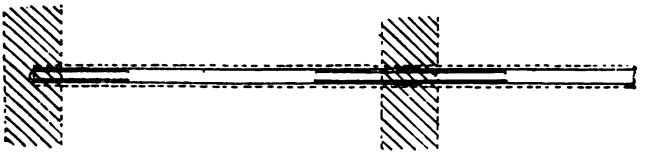


Fig. 39

M. Paul Piketty admet la double armature dans les hourdis comme dans les poutres (fig. 40). Les attaches inclinées, aux extré-

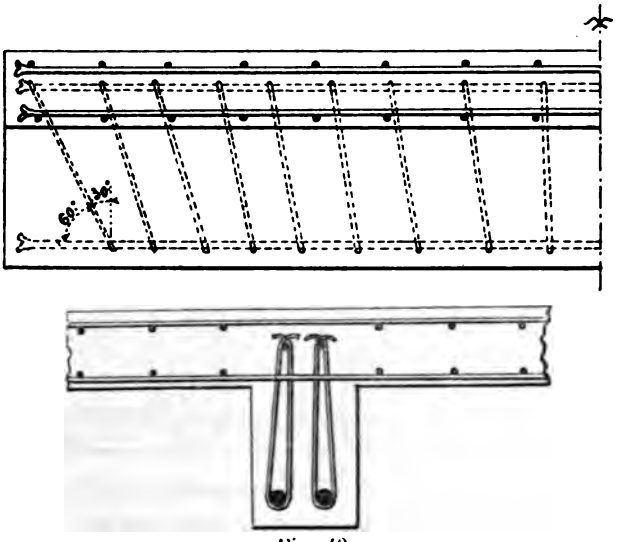


Fig. 40

mités, de 60° sur l'horizon, vont en se r 'écartant vers le milieu.

Dans le système Coularou (fig. 41 et 41bis), les barres supérieures sont tantôt continues, tantôt discontinues; les attaches sont des barres inclinées s'accrochant à la fois aux barres supérieures et aux barres inférieures.

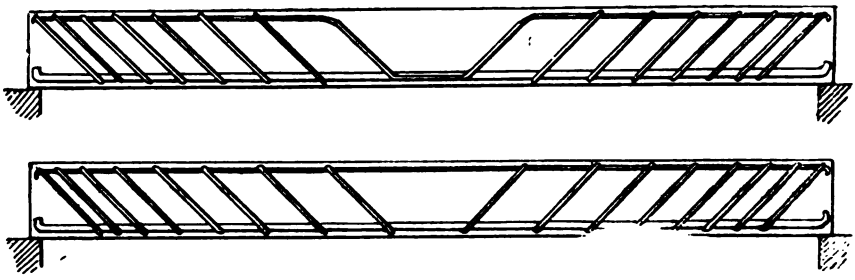


Fig. 41

Le système Perraud et Dumas (fig. 42 et 42bis) admet des barres tendues et comprimées additionnées de barres supplémentaires ne s'étendant que dans les régions des moments élevés et reliés les unes avec les autres par des étriers obliques en V.

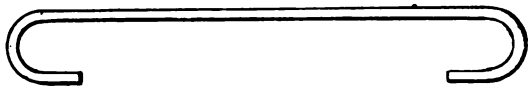


Fig. 41bis

Enfin certains systèmes ont en vue un certain frettage du béton, tels sont :

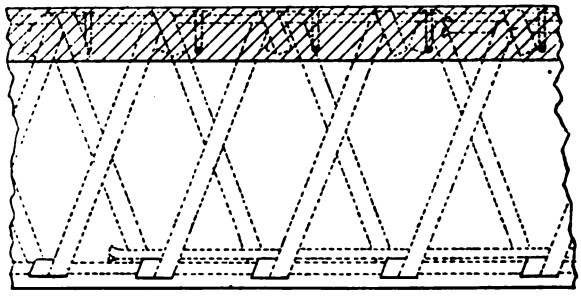


Fig. 42

Le système D. Eugenio Ribera qui cherche à réaliser une armature d'égale résistance (fig. 43), et en dehors des étriers usuels prévoit un grillage en métal déployé ou de toute autre nature, enveloppant complètement la poutre.

Le système J. B. Dégon (fig. 44 et 45), où l'on voit apparaître pour la première fois le serpentin longitudinal, comme frettage des poutres.

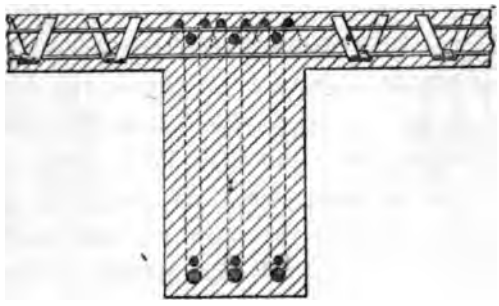


Fig. 42bis

Le système Maciachini, offrant une certaine analogie avec le précédent (fig. 46 et 47), mais réalisant encore mieux le frettage

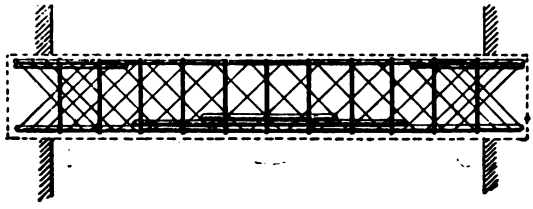


Fig. 43

par 4 serpentins longitudinaux s'intercalant les uns dans les autres.

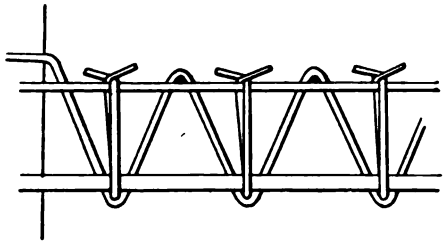


Fig. 44

Il existe bien d'autres systèmes, tels que ceux des poutres faites à l'atelier, systèmes Viennot, Siegwart, Visintini, Herbst, etc., mais on a voulu plutôt donner une idée de la grande variété d'armatures employées, que faire une nomenclature complète du ressort d'un ouvrage descriptif.

Enfin en dehors de ces armatures principales des hourdis et nervures, il est généralement indispensable de prévoir des arma-

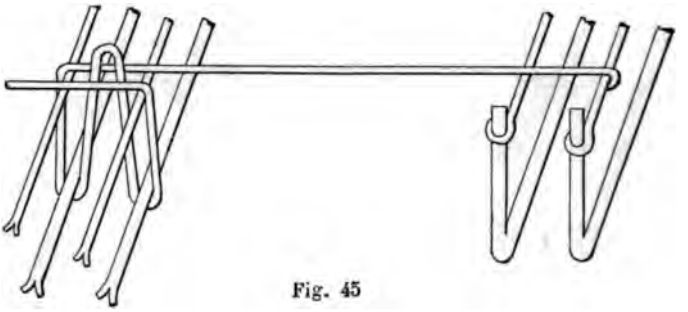


Fig. 45

tures de liaison entre les barres tendues et le béton ou les barres comprimées. Ces liaisons, attaches ou étriers, sont des fers ronds

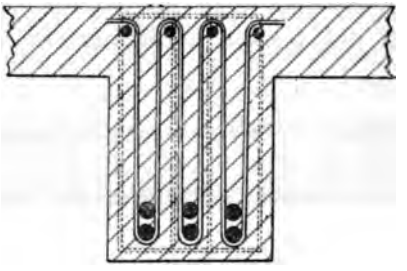


Fig. 46

ou plats, verticaux ou obliques, ou des treillis à mailles de plus

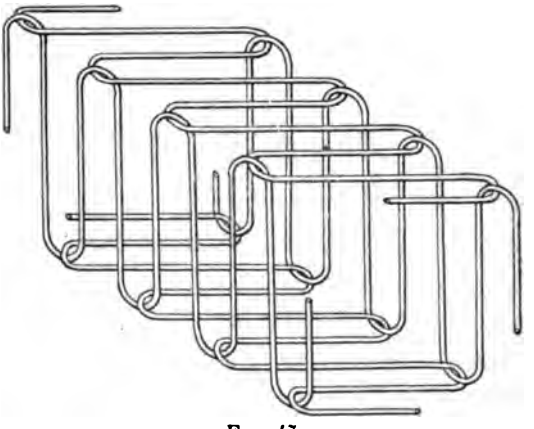


Fig. 47

en plus serrées, en allant du centre de la pièce vers ses appuis. On en relèvera la variété sur les exemples précédents.

65. Considérations générales. — Le calcul a été jusqu'ici le point faible des constructions en ciment armé. On ne sait pas encore déterminer d'une façon précise le coefficient de sécurité d'un ouvrage soumis à des charges bien définies. On verra cependant que, grâce aux remarquables travaux de M. Considère, il est possible de serrer la vérité d'assez près pour que les calculs justificatifs d'un projet de construction en ciment armé présentent, au point de vue théorique, des apaisements de même valeur que ceux que la résistance des matériaux permet d'offrir au sujet de tout autre mode de construction.

Les anomalies déconcertantes que l'on a cru rencontrer, résultent uniquement de l'application brutale aux ouvrages en ciment armé des formules usuelles de la résistance des matériaux. La loi d'après laquelle l'allongement ou le raccourcissement d'une fibre serait proportionnel à l'effort qui la sollicite, n'est presque jamais vraie à la limite de résistance, *quelle que soit la matière considérée* (1).

Pourquoi donc appliquerait-on sans réserve des lois qui dans les mêmes conditions s'écartent à tel point de la réalité avec les métaux ? Faut-il s'étonner des anomalies rencontrées dans une pareille voie, anomalies qui ont fait couler des flots d'encre !

Comme nous le verrons par la suite, le ciment armé ne peut être économique qu'à la condition que le ciment travaille à l'extension au-delà de sa limite d'élasticité. Il est par suite logique de renoncer à calculer dans les cas usuels les taux de travail au moyen des formules employées pour le fer et pour le bois, et d'établir au contraire des équations nouvelles tenant compte des relations qui unissent les allongements aux efforts qui les produisent. Il a été exposé précédemment combien ces relations étaient mal définies, combien elles variaient avec la nature du mélange, avec la proportion d'eau de gâchage, avec l'intensité du pilonnage, etc. On ne pourra donc pas prétendre arriver à une grande exactitude ; il faudra se contenter de ne pas s'éloigner trop de la réalité, surtout si l'on peut disposer par compensation

(1) On sait par exemple qu'une barre métallique de section carrée, [illegible] sur deux appuis se rompt sous une charge de 1,7 à 2,4 fois plus grande [illegible] leur donnée par l'application brutale de la loi ci-dessus (Bach et Baus[illegible]

de formules assez simples pour pouvoir arrêter très rapidement les proportions les plus convenables entre les équarrissages de béton et les sections d'armature, dans chaque cas particulier.

Nous allons examiner les principales méthodes de calcul qui ont été proposées par les hommes de science et appliquées par les constructeurs, exposer leurs formules, avec un développement suffisant pour permettre d'en apprécier la valeur, et les appliquer souvent pour en faciliter l'emploi.

Ces méthodes nombreuses peuvent se diviser en trois classes.

1° Méthodes dérivées de la loi de proportionnalité ;

2° Méthodes indépendantes de cette loi ;

3° Méthodes employées par quelques constructeurs.

1. *Méthodes dérivées de la loi de proportionnalité.*

Les méthodes dérivées de la loi de proportionnalité admettent toutes *qu'une section plane avant la déformation reste plane après la déformation.*

Si l'on représente (fig. 48) par AOB la projection de la section initiale d'une pièce fléchie et par COD, sa projection après déformation, la ligne COD sera une droite. Les longueurs mesurées horizontalement entre ces deux droites détermineront les déformations aux points correspondants considérés ; AC est la déformation en A, MM' en M, NN' en N et BD en B.

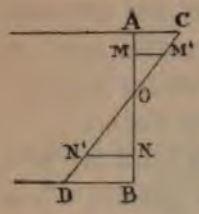


Fig. 48

Or l'allongement Δl produit par une force F agissant sur une barre de longueur l, de section S et de coefficient d'élasticité E est exprimé par :

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES}.$$

Donc si l'on admet l'égalité des allongements de deux barres contiguës et adhérentes entre elles, de même longueur et de même section, mais de coefficients d'élasticité différents, c'est-à-dire si :

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES} = \Delta l' = \frac{F'l}{E'S}$$

on en déduit : $\frac{F}{E} = \frac{F'}{E'}$ d'où : $F = F' \times \frac{E}{E'}$ ou $\frac{F}{F'} = \frac{E}{E'}$

ce qui peut s'exprimer comme suit :

Si deux fibres de coefficients d'élasticité différents s'allongent de la même quantité, les taux de travail de ces fibres sont proportionnels aux coefficients d'élasticité respectifs.

Ceci posé, appliquons ce principe à l'armature métallique N, de coefficient d'élasticité Ef, noyé au sein d'une section A de béton, de coefficient d'élasticité E (fig. 49).

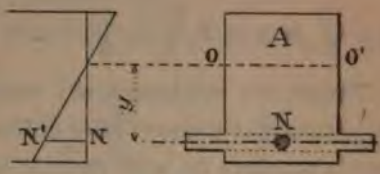


Fig. 49

En vertu de la loi de proportionnalité, tous les éléments situés sur la droite CD, parallèle à l'axe neutre OO', s'allongent d'une même quantité NN'. Donc, d'après ce qui précède, si le taux de travail du béton est Ry, à la distance y de la fibre neutre, celui de l'armature située à la même distance sera $Ry \times \frac{Ef}{E}$, et par suite, pour appliquer à ce corps, ciment armé, les lois de la résistance des corps homogènes, on pourra remplacer la section métallique N, par une section béton $\frac{Ef}{E}$ fois plus grande, à condition que cet agrandissement se fasse uniquement dans un sens, celui parallèle à la fibre neutre, de manière à rester dans les mêmes conditions de distance à cet axe.

Graphiquement, la transformation équivalente au point de vue de la résistance sera représentée par un élargissement du corps au droit de l'armature, tel que l'excédent sur la section primitive soit égal à $\frac{Ef}{E}$ fois l'épaisseur de l'armature.

On a vu que le ciment atteignait sa limite d'élasticité beaucoup plus rapidement à l'extension qu'à la compression et que l'on pouvait considérer le coefficient d'élasticité à la compression comme constant jusqu'à une limite assez élevée. L'usage général de rapporter la section de l'armature à celle du béton comprimé, est donc logique et tant *que la limite d'élasticité du béton comprimé n'aura pas été dépassée*, on pourra admettre : *que les taux de travail des armatures et du béton comprimé sont proportionnels aux abscisses déterminées par les droites* AB *et* CD *de la figure* 50. Si donc nous représentons par R le taux de tra-

vail maximum du béton comprimé, qui est subi par la fibre extrême A située à la distance h de la fibre neutre, le taux de travail d'une fibre N, située à une distance x de cette fibre sera $R\frac{x}{h}$, de même si l'armature est située à une distance h' en dessus de l'axe neutre, son taux de travail, multiplié comme il convient par $\frac{Ef}{E}$ sera de $R\frac{Ef}{E} \times \frac{h'}{h}$.

Toutes les méthodes qui vont être exposées, reposent sur les hypothèses ci-dessus ; elles diffèrent cependant les unes des autres par la manière de tenir compte de la partie du ciment soumise à des efforts d'extension ; on peut les classer sous ce rapport en trois groupes :

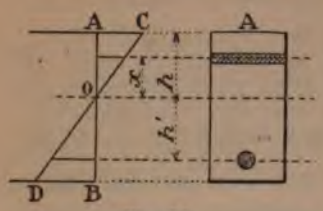


Fig. 50

1° Celles où la partie de ciment tendue est assimilée complètement à la partie comprimée. La section de la barre, son centre de gravité, son moment d'inertie sont calculés d'après les méthodes usuelles, après l'amplification sus-mentionnée de la section de l'armature.

Comme cette solution n'est vraie que dans les limites très restreintes entre lesquelles le ciment armé ne présente aucun avantage, on ne s'en occupera qu'incidemment par la suite.

2° Celles où la résistance de la partie de ciment tendue n'entre pas en ligne de compte dans les formules ; cette partie tendue étant considérée comme sans cohésion aucune jusqu'à la fibre neutre. Le type de cette méthode a été exposé par MM. Ed. Coignet et N. de Tedesco en 1894 dans leur communication à la Société des Ingénieurs Civils. Cependant, comme on le verra bientôt par l'analyse de cette communication, leurs auteurs n'ont pas fait abstraction complète en pratique de la résistance du béton tendu ; ils ont cru pouvoir compenser cette erreur consentie dans le but de simplifier les calculs, en admettant pour le taux de travail des armatures, un chiffre majoré des 2/3 de celui qui est admis dans les constructions métalliques. Cette majoration, quelque élevée qu'elle ait paru, s'est trouvée justifiée par les expériences classiques d'Asnières, entreprises par la Société pour les Construc-

tions en ciment armé, et l'on verra qu'elle concorde généralement avec les résultats qui dérivent de la théorie de M. Considère. Dans cette théorie les efforts sont supposés se répartir dans le ciment et dans les armatures proportionnellement aux abscisses des points considérés, mesurant les déformations ; ceux qui correspondent aux parties de ciment tendues sont supposés nuls, de sorte que ces hypothèses se traduisent par le graphique de la figure 51.

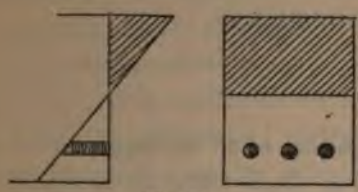


Fig. 51

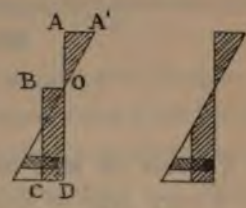


Fig. 52

3° La partie de ciment tendue est supposée supporter un effort dont l'intensité ne croît pas proportionnellement aux déformations. La principale de ces théories a été exposée par M. Considère, dans un mémoire adressé à l'Académie des Sciences, qui doit être regardé comme l'origine de la méthode réellement scientifique du calcul des ouvrages en ciment armé. Dans cet exposé magistral, étayé par les remarquables expériences qui vont être décrites, M. Considère suppose que pour les charges usuelles, le taux de travail du ciment tendu reste constant et égal au taux maximum qu'il peut atteindre sans se rompre. Le diagramme (fig. 52) caractérise cette hypothèse. Le travail du ciment comprimé est représenté par l'aire du triangle AOA' ; celui du ciment tendu par le rectangle OBDC.

Dans un second mémoire exposé au Congrès de 1900, des essais des matériaux, M. Considère a rectifié la première hypothèse ; il suppose que le taux de travail du béton tendu croît d'abord suivant les abscisses d'un triangle (comme pour le béton comprimé), puis quand le ciment tendu atteint sa résistance maxima à l'extension, il la conserve jusqu'au droit de la fibre la plus tendue (voir le diagramme de droite).

CHAPITRE II

—

ED. COIGNET

66. Théorie de MM. Ed. Coignet et N. de Tédesco. — Cette théorie a paru dans le bulletin de Mars 1894, de la Société des Ingénieurs civils [1].

Avant d'exposer ses méthodes de calcul assez simples, il est juste de faire ressortir que leurs auteurs ont entrevu, dès la première heure, toute l'importance du concours apporté par le travail du ciment tendu.

On lit en effet les réflexions suivantes aux pages 23 et 24 de cette brochure, dans le chapitre relatif au calcul des tuyaux soumis à une pression intérieure :

« Si le métal travaillait réellement à 12 kilogrammes par millimètre carré, ses allongements ne pourraient être partagés sans fissure par le ciment [2], qui par suite de sa grande adhérence avec le fer et de sa disposition même autour de ce dernier, est obligé de s'allonger simultanément de quantités égales. Mais en réalité il travaille beaucoup moins. *En effet, la résistance du ciment à l'extension n'est nullement négligeable ; le ciment peut subir des efforts de* 12 *kilogrammes par centimètre carré et même bien davantage,* sans manifester aucune fissure. Or, dans les tuyaux en ossature, la section du ciment est au moins, avons-nous dit, 100 fois celle du métal. Si donc on admet que le ciment travaille 100 fois moins que le métal, comme il est 100 fois plus abon-

(1) Une analyse complète de ce mémoire a été publiée par le journal *Le Ciment* en septembre, octobre, novembre et décembre 1903.

(2) M. Considère a montré qu'il n'en était pas ainsi, que le ciment ou le béton de ciment pouvait subir sans se rompre des allongements considérables.

dant, il peut donc se charger sans fatigue de la moitié des résistances. Il en résulte que les allongements du métal sont réduits dans la proportion correspondante et n'atteignent pas ceux que le ciment ne saurait éprouver sans se fissurer.

« En définitive, on sait qu'en calculant le métal de nos tuyaux comme nous venons de le dire, et en adoptant le coefficient de 12 kilogrammes par millimètre carré pour l'acier, il n'est qu'une expression et non la réalité, le métal travaille beaucoup moins. »

Et quelques lignes plus loin :

« Nous pensons donc que, si l'on peut prendre, dans le calcul des directrices, le coefficient de 15 kilogrammes pour les tuyaux d'un diamètre inférieur à 1 mètre, il ne faut pas dépasser celui de 12 kilogrammes pour les diamètres supérieurs à 1 mètre. En réalité dans ces deux cas, l'acier travaillera au maximum de 6 à 8 kilogrammes [1]. »

Ces citations suffisent d'ailleurs pour donner une idée des méthodes proposées pour le calcul des tuyaux. — La résistance du métal entre seule en ligne de compte, mais en admettant pour la détermination des sections d'un taux de travail de 12 à 15 kilogrammes. — Ces méthodes sont actuellement universellement employées pour les ouvrages travaillant uniquement à l'extension.

En ce qui concerne les ouvrages soumis exclusivement à des compressions, la brochure ne traite que ceux de faible épaisseur, tels que petites voûtes en arc de cercle, tuyaux à pression extérieure, pour lesquels, il a semblé prudent aux auteurs de ne tenir compte que de l'armature, avec un taux de travail un peu élevé.

En effet si l'on applique les principes ci-dessus exposés relatifs à l'addition pure et simple des sections du béton et de l'armature transformée en section équivalente de béton, on obtient des parois et par suite des armatures de faibles dimensions.

Pour la flexion le procédé employé est le suivant :

Transformer la section hétérogène en une section homogène, béton par exemple, en multipliant la section des armatures longi-

[1] Cette différence est justifiée par l'épaisseur du béton des diamètres correspondants ; cette épaisseur est relativement plus grande par rapport à la section de l'armature, dans les tuyaux de faibles diamètres que dans ceux d'un diamètre assez fort.

tudinales par le rapport des coefficients d'élasticité du métal et du béton, et faire travailler la section totale transformée à un taux compris entre 20 et 40 kilogrammes par centimètre carré, suivant le dosage.

Pour déterminer le rapport des deux coefficients d'élasticité, les auteurs ont exécuté une série d'expériences (voir p. 57). Ils en ont tiré les conclusions suivantes :

— « La valeur maximum de n (rapport des deux coefficients d'élasticité) correspond au ciment de plus mauvaise qualité et par son dosage et par son mode de gâchage, et par son insuffisance de durcissement (c'est le n° 1, dosé à 400 kilogrammes, gâché à la main et exposé à l'air ; il a rompu à $70^k,60$). La valeur minimum de n, a été donnée au contraire par l'échantillon n° 4, dosage 700 kilogrammes gâché mécaniquement et plongé dans l'eau chaude pour accélérer le durcissement ; il a rompu à $107^k,66$.

M. Durand Claye trouve :

Pour un dosage d'environ 375 kilogrammes

$$E_c = 0,97 \times \overline{10}^9$$

Pour un dosage d'environ 750 kilogrammes

$$E_c = 240 \times \overline{10}^9$$

Nous trouvons :

Pour un dosage d'environ 400 kilogrammes

$$E_c = 0,94 \times \overline{10}^9$$

Pour un dosage d'environ 700 kilogrammes

$$E_c \times 2,76 = \overline{10}^9$$

.... Nous pensons, d'après les résultats de ces expériences, que la valeur de n peut être prise entre 10 et 20, suivant que le mortier de ciment a été dosé à 700 kilogrammes ou à 400 kilogrammes.

Ces chiffres sont relatifs à des mortiers jeunes, tels qu'ils seront dans la pratique, quelque [illegible] après le [illegible]ge des planchers. Ultérieurement n [illegible], mais [illegible] augmente sensiblement, la marge de [illegible] fera qu[illegible].

Une autre conclusion s[illegible] aut[illegible] em[illegible] attiré l'attention est la suiv[illegible]

« .... L'expérience indique que les mortiers de ciment les plus résistants sont ceux qui ont le coefficient d'élasticité le plus élevé et par conséquent pour lesquels la valeur de n est la plus faible... il faut avoir soin, si l'on a pris pour R_c une valeur assez forte, de prendre pour n une valeur assez faible. Les constructeurs qui admettent à la fois les deux maximum $n = 40$, $R_c = 40$, commettent donc une erreur en voulant bénéficier à la fois de deux avantages incompatibles. »

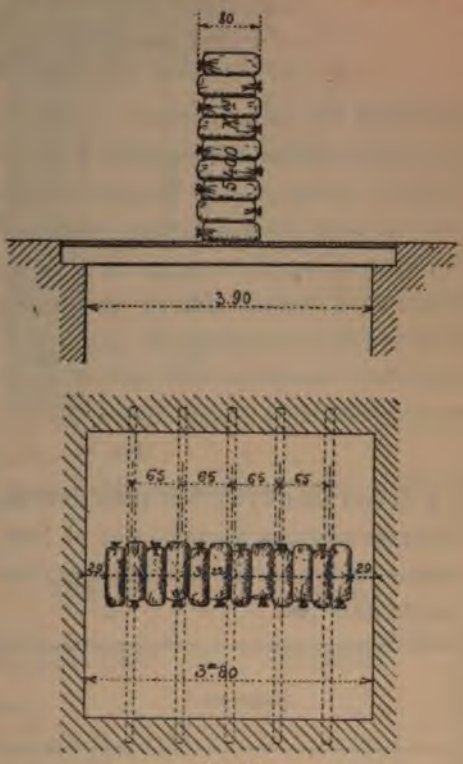


Fig. 53

Pour se rendre un compte exact de la méthode de calcul exposée dans la brochure, l'on ne saurait mieux faire que de citer l'application de leur méthode aux planchers, exécutés par M. Ed. Coignet à l'usine de ciment Portland, E. Candlot et Cie.

Ce plancher (voir fig. 53) a une largeur libre de 3m,80, une portée de 3m,90 ; il est constitué par un hourdis de 0m,06 d'épaisseur et 5 nervures rectangulaires armées chacune d'une seule barre ronde de 16 millimètres, réunie à l'armature du hourdis par des attaches en fils de 4 millimètres, se succédant tous les 10 centimètres. La poutrelle est également armée à sa partie supérieure d'une barre ronde de 14 millimètres. L'armature du hourdis est constituée par un treillis de fils de 4 millimètres à mailles de 10 centimètres, ligaturés à leurs croisements.

Les calculs suivants sont établis pour l'ensemble du plancher, comprenant par suite les 5 poutrelles.

Détermination de la fibre neutre. — « Un calcul préalable nous

tudinales par le rapport des coefficients d'élasticité béton, et faire travailler la section totale transfo compris entre 20 et 40 kilogrammes par centimètre le dosage.

Pour déterminer le rapport des deux coefficien les auteurs ont exécuté une série d'expérienc Ils en ont tiré les conclusions suivantes :

— « La valeur maximum de n (rapport des d d'élasticité) correspond au ciment de plus mauvai son dosage et par son mode de gâchage, et par de durcissement (c'est le n° 1, dosé à 400 kilogra la main et exposé à l'air ; il a rompu à $70^k,60$). La va de n, a été donnée au contraire par l'échantillon n kilogrammes gâché mécaniquement et plongé dan pour accélérer le durcissement ; il a rompu à $107^k,0$

M. Durand Claye trouve :

Pour un dosage d'environ 375 kilogrammes

$$E_c = 0,97 \times \overline{10}^9$$

Pour un dosage d'environ 750 kilogrammes

$$E_c = 240 \times \overline{10}^9$$

Nous trouvons :

Pour un dosage d'environ 400 kilogrammes

$$E_c = 0,94 \times \overline{10}^9$$

Pour un dosage d'environ 700 kilogrammes

$$E_c \times 2,76 = \overline{10}^9$$

.... Nous pensons, d'après les résultats de ces expérien la valeur de n peut être prise entre 10 et 20, suivant que le de ciment a été dosé à 700 kilogrammes ou à 400 kilogr

Ces chiffres sont relatifs à des mortiers jeunes, tels qu'ils dans la pratique, quelque temps après le démoulage des chers. Ultérieurement n diminuerait, mais comme R_c augm sensiblement, la marge de sécurité ne fera que s'accroître.

Une autre conclusion sur laquelle les auteurs ont vivem attiré l'attention est la suivante :

« .... L'expérience indique que les mortiers de ciment les plus résistants sont ceux qui ont le coefficient d'élasticité le plus élevé et par conséquent pour lesquels la valeur de n est la plus faible... il faut avoir soin, si l'on a pris pour R_c une valeur assez forte, de prendre pour n une valeur assez faible. Les constructeurs qui admettent à la fois les deux maximum $n = 40$, $R_c = 40$, commettent donc une erreur en voulant bénéficier à la fois de deux avantages incompatibles. »

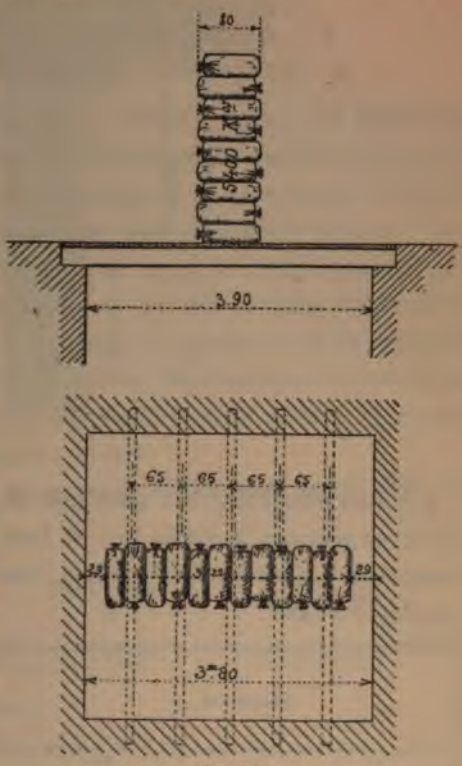


Fig. 53

Pour se rendre un compte exact de la méthode de calcul exposée dans la brochure, l'on ne saurait mieux faire que de citer l'application de leur méthode aux planchers, exécutés par M. Ed. Coignet à l'usine de ciment Portland, E. Candlot et Cie.

Ce plancher (voir fig. 53) a une largeur libre de 3m,80, une portée de 3m,90 ; il est constitué par un hourdis de 0m,06 d'épaisseur et 5 nervures rectangulaires armées chacune d'une seule barre ronde de 16 millimètres, réunie à l'armature du hourdis par des attaches en fils de 4 millimètres, se succédant tous les 10 centimètres. La poutrelle est également armée à sa partie supérieure d'une barre ronde de 14 millimètres. L'armature du hourdis est constituée par un treillis de fils de 4 millimètres à mailles de 10 centimètres, ligaturés à leurs croisements.

Les calculs suivants sont établis pour l'ensemble du plancher, comprenant par suite les 5 poutrelles.

Détermination de la fibre neutre. — « Un calcul préalable nous

a appris que l'axe des fibres neutres se trouvait à une faible distance au-dessus du sommet des poutrelles. Soit x cette distance.

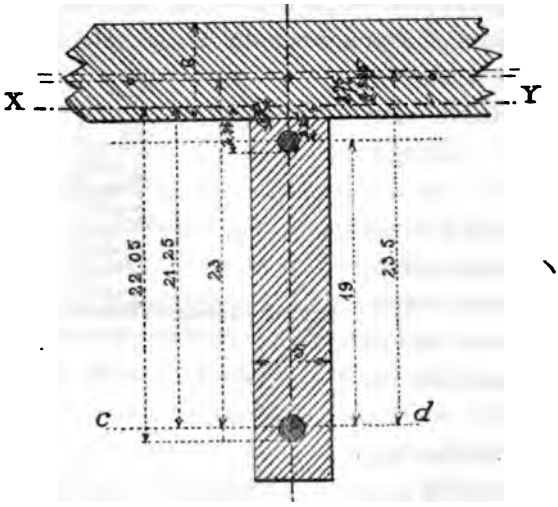


Fig. 54

« Si l'on prend (fig. 54) pour axe des moments la ligne cd, les diverses sections à considérer et leur distance à l'axe des moments sont, pour les 5 poutrelles réunies d'une largeur de platebande de 3m,22.

Désignation	Sections en centimètres carrés	Distances à l'axe des moments en centimètres carrés
Plate bande C (Béton)	$322\ (6 - x)$	$23{,}5 + \frac{x}{2}$
32 fils transversaux de 4 millimètres (m').	4	23
5 barres de 14 millimètres (m)	7,70	19
5 » 16 » (M)	10,05	0

La distance de l'axe des moments à la fibre neutre sera égale à la somme des moments de ces diverses sections, divisée par la somme des sections. Le rapport n étant supposé égal à 20, chaque section métallique sera multipliée dans cette équation par 20 ; on aura donc pour la distance d cherchée :

$$d = \frac{322\,(6 - x)\left(23{,}5 + \frac{x}{2}\right) + (4 \times 23 \times 20) + (7{,}7 \times 19 \times 20)}{322\,(6 - x) + (4 \times 20) + (7{,}7 \times 20) + 10{,}05 \times 20}$$

on a d'autre part :

$$d = 20,5 + x$$

d'où

$$x = 7,35 - \sqrt{54,0225 - 10,46} = 0,75 \text{ centimètres}$$

et par suite :

$$d = 20,5 + 0,75 = 21,25 \text{ centimètres.}$$

Calcul des moments d'inertie. — Pour calculer les moments d'inertie les auteurs appliquent à chacune des sections qui composent le plancher, le théorème suivant : Le moment d'inertie d'une surface par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie de cette surface par rapport à l'axe passant par son centre de gravité, augmenté du produit de cette surface par le carré de la distance de son centre de gravité à l'axe proposé. Cette méthode leur permettra d'étudier plus facilement l'influence de la forme des armatures et par suite de leur résistance propre sur la résistance de l'ensemble.

On aura par suite pour l'ensemble en prenant pour unité le centimètre carré.

Membrure supérieure (béton)	I. par rapport au centre de gravité.	$\frac{322 \times \overline{5,25}^2}{12}$	= 3 882,87	15 531,47
	Surface × carré de la distance . . .	$322 \times 5,25 \times \overline{2,625}^2$	= 11 648,60	
32 fils de 4 mm. Armature du bourdis $n = 20$	I. par rapport au centre de gravité.	$20 \times 32 \times \frac{\pi}{64} \times \overline{0,4}^4$	= 0,80	249,93
	Surface × carré de la distance . . .	$20 \times 32 \times \frac{\pi}{4} \times \overline{0,4}^2 \times \overline{1,75}^2$	= 249,13	
5 barres de 14 mm. Armature supérieure des nervures $n = 20$	I. par rapport au centre de gravité.	$20 \times 5 \times \frac{\pi}{64} \times \overline{1,4}^4$	= 18,85	798,16
	Surface × carré de la distance . . .	$20 \times 5 \times \frac{\pi}{4} \times \overline{1,4}^2 \times 2,25$	= 779,31	
5 barres de 16 mm. Armature inférieure des nervures $n = 20$	I. par rapport au centre de gravité.	$20 \times 5 \times \frac{\pi}{64} \times \overline{1,6}^4$	= 32.17	90 824,41
	Surface × carré de la distance . . .	$20 \times 5 \times \frac{\pi}{4} \times \overline{1,6}^2 \times \overline{21,25}^2$	= 90 792,24	
	Moment d'inertie totale.			107 403,97

Les modules de résistance sont déduits comme suit :

1° Pour la semelle comprimée dont la distance des fibres extrêmes supérieures à l'axe neutre est de $5^{cm},25$.

$$\frac{I}{v} = \frac{107\,403,97}{5,25} = 20\,458.$$

2° Pour le fer de la semelle tendue dont la distance des fibres les plus éloignées de l'axe neutre est de $21,25 + \frac{d}{2} = 22,05$.

$$\frac{I}{v'} = \frac{107\,403,97}{22,05} = 4\,870.$$

Ou si l'on avait ramené la surface à une *section fer*, au lieu de la ramener à une section ciment

$$\frac{I}{v'} \text{ fer} = \frac{4\,870}{20} = 243,5$$

Moments fléchissants. — Le poids propre du plancher est en comptant le béton à raison de 2 200 kilogrammes par mètre cube, de 180 kilogrammes par mètre carré.

Le moment maximum M dû à la charge permanente est par suite pour la surface totale : $3,22 \times 3,90 = 12,56$.

$$M_1 = \frac{12,56 \times 180 \times 3,90}{8} = 1102 \text{ kilogrammètres.}$$

Le moment maximum M_2 produit par la surcharge de 150 kilogrammes par mètre carré uniformément répartie est de :

$$M_2 = \frac{11,56 \times 150 \times 3,90}{8} = 918 \text{ kilogrammètres.}$$

et par suite $M = M_1 + M_2 = 1102 + 918 = 2020$ kilogrammètres ou $2020 \times 100 = 202000$ kilogrammes centimètres.

Taux de travail. — Le taux de travail maximum du béton dans la partie comprimée est :

$$R_c = \frac{202\,000}{20\,458} = 9^k,87 \text{ par centimètre carré.}$$

Le taux de travail de l'armature inférieure est :

$$R_f = \frac{202\,000}{243,5} = 830 \text{ kilog. par cent. carré ou } 8^k,30 \text{ p. millim. carré.}$$

Les auteurs montrent ensuite : 1° que la flexion du solide hétérogène tel qu'il est défini ci-dessus, donne des flèches deux fois plus faibles qu'une poutre entièrement métallique à membrures égales en section à celle de l'armature de la poutre considérée et de même hauteur entre centres de gravité des membrures; 2° que l'on peut négliger sans erreur sensible les moments d'inertie des armatures par rapport à leur centre de gravité, et même sans erreur grave pour l'ensemble le moment d'inertie propre du béton comprimé, ce qui permet de prendre comme expression approximative du moment d'inertie total I, dans le premier cas

$$I = I' + nMv'^2$$

expression dans laquelle I' est le moment d'inertie de la partie comprimée du béton pris par rapport à l'axe neutre de la poutre; $n = \frac{E_f}{E_c}$, le rapport des coefficients d'élasticité du fer et du béton; M la section de l'armature inférieure; v' la distance du centre de gravité de l'armature inférieure à l'axe neutre de la poutre.

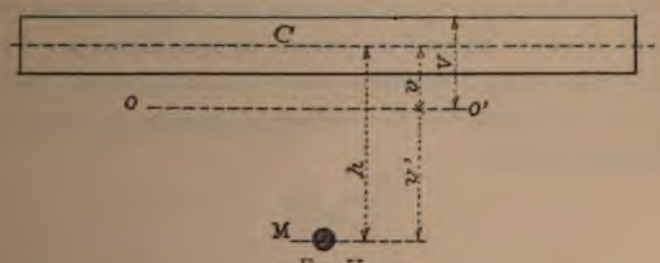


Fig. 55

Et dans le second cas, avec un peu moins d'exactitude

$$I = Cv^2 + nMv^2$$

expression dans laquelle C représente la section de la platebande comprimée et v la distance de son centre de gravité à la fibre neutre de la poutre (voir fig. 55).

Cette dernière forme est susceptible de simplification.

On a en effet :

$$Cv = nMv'$$

d'où

$$I = Cv^2 + nMv'^2 = nMv'v + nMv'^2 = nMv'(v + v') = nMv'h$$

$h = v + v'$ représentant la distance des centres de gravité des membrures.

La distance à la fibre neutre de la fibre métallique la plus fatiguée étant peu différente de v', on a pour le module de résistance de la section homogène fer,

$$(1) \qquad \frac{I}{v'} = Mh.$$

On aurait de même pour la section homogène béton,

$$I = Cv^2 + nMv'^2 = Cv \times v + Cvv' = Cv(v + v') = Cvh$$

et par suite :

$$(2) \qquad \frac{I}{V} = Ch\frac{v}{V}$$

(en appelant V la distance à l'axe neutre des fibres extrêmes du béton comprimé) [1].

Formules dérivées. — Ces formules très commodes pour la vérification des dimensions d'un projet, ne permettent pas à l'ingénieur de prévoir les dimensions les plus avantageuses. Pour cette discussion, les auteurs de la brochure déduisent de l'équation de mécanique générale

$$(3) \qquad \frac{v}{v'} = \frac{nM}{C}$$

avec la condition $v + v' = h$

$$(4) \qquad v = \frac{nMh}{nM + C}$$

équation qui détermine la position du centre de gravité d'une poutre à simple té hétérogène.

[1] Les auteurs de la brochure ont obtenu ces formules d'une façon un peu différente.

Représentant maintenant par R_m le taux de travail moyen du métal.

Représentant maintenant par R_c le taux de travail maximum du béton.

Le taux de travail moyen R en G (fig.56) de la partie comprimée est :

$$R = R_c \frac{v}{V}. \tag{5}$$

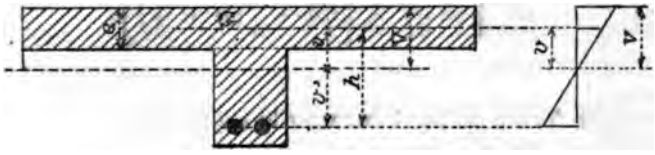


Fig. 56

On a très approximativement pour les poutres à simple té.

$$V = v + \frac{e}{2} \text{ (} e \text{ étant l'épaisseur du hourdis)}$$

d'où

$$V = \frac{nMh}{nM + C} + \frac{e}{2} = \frac{nMh + \frac{e}{2}(nM + C)}{nM + C} = V \tag{6}$$

et comme les forces horizontales MR_M, CR doivent se faire équilibre, on déduit de cette égalité :

$$\frac{C}{M} = \frac{R_M}{R_c}$$

et d'après (5)

$$\frac{C}{M} = \frac{R_M}{R_c} \times \frac{V}{v}$$

et d'après (6)

$$\frac{C}{M} = \frac{R_M}{R_c} \times \frac{nMh + \frac{e}{2}(nM + C)}{v\,(nM + C)}$$

et comme d'après (4)

$$v = \frac{nMh}{nM + C} \qquad \text{d'où} \qquad v\,(nM + C) = nMh.$$

$$\frac{C}{M} = \frac{R_M}{R_c} \times \frac{nMh + \frac{e}{2}(nM + C)}{nMh} = \frac{R_M}{R_c}\,\frac{nh + \frac{e}{2}\left(n + \frac{C}{M}\right)}{nh}$$

d'où

$$nh\,\frac{C}{M} = \frac{R_M}{R_c} \times \left[nh + \frac{e}{2}\left(n + \frac{C}{M}\right)\right].$$

Sous cette forme on peut dégager le rapport $\frac{C}{M}$

$$\text{(7)} \qquad \frac{C}{M} = \frac{n\left(h + \frac{e}{2}\right)}{nh - \frac{e}{2}\,\frac{R_M}{R_C}} \times \frac{R_M}{R_C}$$

expression qui devient en posant $n = 20$, $R_M = 1\,500$, $R_C = 40$

$$\text{(8)} \qquad \frac{C}{M} = 300\,\frac{2h + e}{16h - 15e}.$$

Les équations 6, 7 et 8 permettent donc de déterminer la section de l'armature en fonction de R_M, R_C et de la section du hourdis que l'on donne habituellement.

On sait d'autre part que le moment des forces extérieures doit être égal à la somme des moments des forces intérieures et que cette dernière catégorie de moments peut être prise par rapport à un axe quelconque ; on aura donc en rapportant tous les moments à un axe passant par le centre de gravité de la membrure comprimée :

$$\mu = R\,\frac{I}{v} = R_M\,Mh$$

et par suite

$$M = \frac{\mu}{R_M h} = \frac{\mu}{1500\,h}$$

et en exprimant les moments en kilogrammètres, et h en centimètres

(9) $$M = \frac{\mu}{15h}.$$

Remplaçant cette valeur de M dans (8), on a de même :

(10) $$C = \frac{20\mu(2h + e)}{h(16h + 15e)}.$$

Calcul des dalles. — Le calcul qui précède s'applique à un corps quelconque en ciment armé ; toutefois le cas particulier de la dalle permet encore quelques simplifications. Citons à cet effet textuellement quelques passages de la brochure relatifs à ce chapitre.

« La figure 57 montre la composition d'une dalle, dont XY est l'axe neutre ; la partie ABXY au-dessus de cet axe travaille à la compression : la partie XYEF, en-dessous travaille à l'extension, et la partie CDEF, n'a d'autre but que de recouvrir le métal. Nous prendrons 1,5 centimètre comme hauteur constante de cette dernière partie située en-dessous de l'axe CD des barres métalliques. Nous appelons H la distance de cet axe CD à l'arête supérieure AB et h toujours la distance d'axe en axe des semelles comprimée et tendue.

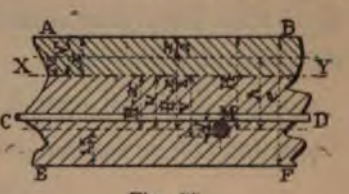


Fig. 57

Nous ne connaissons pas x *a priori* ; cette épaisseur est déterminée par l'égalité des moments des sections du ciment comprimé et du métal par rapport à XY.

On a donc comme première équation

(11) $$x \times \frac{x}{2} = nM(H - x).$$

D'où l'on peut tirer si l'on veut :

(12) $$x = -nM + \sqrt{n^2M^2 + 2nMH}.$$

L'égalité des moments des forces extérieures et intérieures fournit la relation suivante pour une dalle de largeur de 1 et pour une section totale d'armatures M par mètre courant.

(13) $$Mh \times \frac{v}{V} \times R_a = xh \times \frac{v'}{V'} \times R_c = \mu.$$

Ces équations ne sont pas autre chose que les valeurs de $\frac{I}{v}$ (obtenues comme les équations 1 et 2 ci-dessus), multipliées par le coefficient de travail maximum.

« Le diamètre d de chaque armature est généralement assez faible, même relativement à la distance $v = H - x$; l'erreur commise en confondant v et V n'est cependant pas négligeable. Mais comme l'introduction de la valeur exacte $\frac{v}{V} = \frac{H - x}{H - x - \frac{d}{x}}$ conduirait à une équation complexe, puisqu'il faudrait encore remplacer d par sa valeur en fonction de M, il est plus simple de se fixer une limite supérieure $\frac{v}{V} = \frac{4}{5}$, ce qui revient à supposer $\frac{v}{V} = 1$ et à réduire R_u dans la proportion de 5 à 4, ou à prendre $R_u = 1\,200$ kilogrammes au lieu de 1500, chiffre que nous avons admis jusqu'à présent.

Quant à $\frac{v'}{V'}$, il est égal à $\frac{1}{2}$; d'après ces deux considérations l'équation (13) se simplifie et devient en posant $R_c = 40$.

$$1\,200\ M = 20\ x$$

ou

$$x = 60\ M. \tag{14}$$

Remplaçant x par cette valeur dans l'équation (11), il vient en faisant $n = 20$

$$90\ M = H - 60\ M$$

d'où

$$M = \frac{H}{150} \text{ par centimètre de longueur}$$

ou

$$M = \frac{2}{3}\ H \text{ par mètre de longueur} \tag{15}$$

Des équations 13 et 14, on déduit :

$$x = 60\ M = 60 \times \frac{H}{150} = \frac{2}{5}\ H. \tag{16}$$

D'autre part, comme $\mu = 12^k \times Mh$ (si l'on veut exprimer M et h en centimètres et μ en kilogrammètres), et comme

$$h = H - \frac{x}{2} = H - \frac{H}{5} = \frac{4}{5} H$$

il en résulte :

$$\mu = \frac{2}{3} H \times \frac{4}{5} H \times 12$$

ou

(17) $$\mu = 6{,}4\ H^2 \text{ kilogrammètres ».}$$

Le calcul d'une dalle projetée de façon à ce que le béton travaille à 40 kilogrammes sur l'arête supérieure et le fer à 12 kilogrammes dans l'axe des armatures se résume donc aux 3 formules suivantes : Métal nécessaire

(15) $$M = \frac{2}{3} H$$

Position de la fibre neutre

(16) $$x = \frac{2}{5} H$$

Moment résistant $\frac{RI}{V}$

(17) $$\mu = 6{,}4\ H^2$$

et si nous donnons à H, diverses valeurs, nous obtenons le tableau suivant :

Epaisseurs e	H	x	M	Nombre de barres	Diamètre des barres	μ	Charges uniformément réparties sur un mètre de portée
	cm.	cm.	cm²		mm.	kgm.	kg.
4,5	3	1,2	2	10	5	58	460
5,5	4	1,6	2,66	10	6	102	820
6,5	5	2	3,33	12	6	160	1 280
7,5	6	2,4	4	11	7	230	1 840
8,5	7	2,8	4,66	12	7	314	2 500
9,5	8	3,2	5,33	11	8	410	3 275
10,5	9	3,6	6	12	8	520	4 150
11,5	10	4	6,66	13	8	640	5 120

Connaissant le moment résistant $\frac{RI}{V}$, la charge que pourra supporter la dalle, sera pour le cas d'une charge p uniformément répartie :

$$(18) \qquad p = \frac{8\mu}{l^2} = \frac{8 \times 6{,}4\,H^2}{l^2} = 51{,}2\,\frac{H^2}{l^2} = p$$

et dans le cas d'une charge isolée P, concentrée au milieu

$$(19) \qquad P = \frac{4\mu}{l} = \frac{4 \times 6{,}4\,H^2}{l} = 25{,}6\,\frac{H^2}{l} = P.$$

Etablissement d'une série de types de planchers rationnels. — Poursuivant la discussion, les auteurs du mémoire précité, ajoutent :

« La détermination des diverses dimensions d'un plancher peut se faire à l'aide des équations ci-dessous.

$$\frac{C}{M} = 300\,\frac{2h + e}{16h - 15e}$$

$$M = \frac{\mu}{15h}$$

$$C = el$$

(l étant la largeur du hourdis qui concerne une nervure).

Ces équations renferment 6 quantités : c, M, e, l, h, μ. Le moment μ des forces extérieures est indépendant des conditions d'équilibre des forces intérieures, nous le supposerons connu. On peut se donner la largeur l. Il reste donc à déterminer 4 inconnues C, M, e et h avec 3 équations ; on pourrait se donner encore une de ces inconnues arbitrairement, mais il semble préférable de s'imposer une nouvelle condition ; soit *un minimum de hauteur* pour un moment donné, ce qui permettra une économie dans l'ensemble de la construction par la réduction de la hauteur du plancher, soit en cherchant le *maximum de résistance* pour une hauteur donnée.

1° *Minimum de hauteur.* — Le minimum de hauteur qu'indique la théorie est réalisé, lorsque l'axe des fibres neutres coïncide avec l'arête inférieure du hourdis, car s'il s'élevait davantage

comme nous l'avons fait observer antérieurement, il détacherait une partie de la platebande qui travaillerait à l'extension.

Cette condition revient donc aux suivantes :

$$v = \frac{e}{2} \qquad V = e$$

et par suite

$$Ch \times \frac{v}{V} \times Rc = \frac{1}{2} Ch \times Rc = \mu$$

ou, pour $Rc = 40$ kilogrammes et les autres valeurs en centimètres.

$$\frac{1}{2} Ch \times 40 = 100\ \mu.$$

D'où l'on tire

(20) $$C = \frac{100\ \mu}{20\ h} = \frac{\mu}{0{,}2\ h}.$$

Comme nous avons d'autre part :

(9) $$M = \frac{\mu}{15\ h}$$

il en résulte que :

$$\frac{C}{M} = \frac{15}{0{,}20} = 75$$

et en remplacant $\frac{C}{M}$ par cette valeur dans l'équation (8)

$$75 = 300\ \frac{2h + e}{16h - 15e}$$

d'où

(21) $$8h = 19e$$

(21a) $$h = \frac{19}{8}\ e$$

Supposons

$$l = 100,$$

d'où

$$C = 100\,e$$

$$M = \frac{100\,e}{75} = \frac{4}{3}\,e$$

$$\mu = 15\,M/h = 15 \times \frac{4}{3}\,e \times \frac{19}{8}\,e$$

$$\mu = \frac{95}{2}\,e^2$$

ce qui nous permet de dresser le tableau suivant :

Valeurs de e	h	M par mètre	μ par mètre	P Poids mort par mètre carré (approximatif)	p Surcharge par mètre carré sur une portée L = 5	L Portée pour une surcharge de $p = 250^k$ par mètre carré
cm.	cm.	cm.	kgm.	kg.	kg.	m.
5	11,875	6,667	1187,5	150	230	4,90
6	14,25	8	1710	180	370	5,60
7	16,625	9,333	2327,5	210	530	6,30
8	19	10,667	3040	240	730	7,00
9	21.375	12	3847,50	270	960	7,70
10	23,75	13 333	4750	300	1220	8,40

Rappelons encore que ces dimensions sont déterminées par les conditions suivantes :

1° Travail maximum du béton à la compression : 40 kilogrammes par centimètre carré ;

2° Travail de l'acier à l'extension : 15 kilogrammes par millimètre carré ;

3° Largeur utile du hourdis : 1 mètre ;

4° Fibre neutre passant par l'arête inférieure du hourdis.

Enfin les moments μ sont calculés sans supposer d'encastrement aux extrémités.

2° *Maximum de résistance.* — Les auteurs montrent que l'épaisseur e qui donne le maximum de résistance a pour valeur $e = 0{,}584\,h$, mais comme le maximum de e que l'on ne doit pas

paisseurs e	Hauteurs h	Section du métal M par mètre carré	Kilogrammètres μ par mètre carré
ntimètres	centimètres	centimètres carrés	kilogrammètres
5	11,875	6,667	1 187
	20	9,074	2 722
	30	10,385	4 673
	40	11,078	6 617
	50	11,508	8 631
	100	12,400	18 600
6	14,25	8	1 710
	20	10	3 000
	30	11,818	5 318
	40	12,790	7 674
	50	13,396	10 047
	100	14,660	21 990
7	16,625	9,333	2 327
	20	10,674	3 202
	30	13,060	5 877
	40	14,348	8 609
	50	15,161	11 366
	100	16,852	25 278
8	19	10,667	3 040
	20	11,111	3 333
	30	14,117	6 353
	40	15,757	9 454
	50	16,790	12 593
	100	18,974	28 461
9	21,375	12	3 847
	30	15	6 750
	40	17,012	10 213
	50	18,303	13 727
	100	21,030	31 545
10	23,75	13,333	4 750
	30	15,714	7 070
	40	18,146	10 888
	50	19,697	14 772
	100	23,016	34 540

dépasser pour utiliser tout le hourdis à la compression a été trouvé de $e = \frac{8}{19} h = 0{,}421\ h$, il en résulte que ce problème se confond en réalité avec le précédent.

Le tableau ci-contre donne pour diverses épaisseurs de hourdis de 100 centimètres de largeur et pour différentes hauteurs h la section de métal par mètre carré et le moment de résistance dont ces dimensions sont capables (v. diagramme fig. 58).

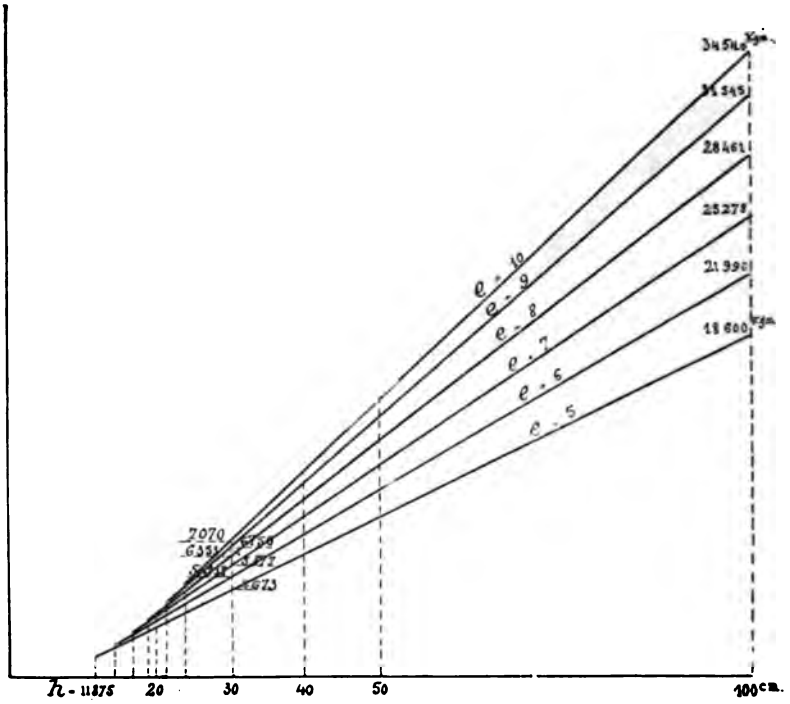


Fig. 58

« En portant les hauteurs en abscisses et les moments en ordonnées, les courbes de ces derniers diffèrent bien peu de droites; elles se relèvent légèrement en se rapprochant de l'origine. On remarque, en outre, combien peu il y a avantage à prendre de fortes épaisseurs e pour de faibles hauteurs h.

« Comme on ne saurait augmenter la hauteur h au-delà d'une certaine limite ($h = 50$ centimètres est déjà considérable), on voit que le moment de résistance de pareils planchers est nécessair-

ment limité. Pour des épaisseurs ne dépassant pas 10 centimètres, le chiffre de 1 500 kilogrammètres peut être considéré comme un maximum avec ce mode de construction. Si l'on veut obtenir des poutres plus fortes sans augmenter le poids mort, il faudra doubler ou tripler le fer et en introduire une certaine quantité dans la semelle comprimée dont le ciment serait insuffisant pour résister à de telles charges. Le nombre de 15 000 kilogrammètres qui correspond à une surcharge uniformément répartie de 150 kilogrammes sur une partie de 14 mètres environ, représente cependant déjà un cas assez peu ordinaire..... Même dans ce cas limite, la poutre en ciment avec ossature serait économique.

Efforts tranchants. — On verra par la suite combien toutes ces considérations de la première heure se rapprochent des résultats donnés par les théories les plus récentes. Il y a cependant quelques lacunes qui n'ont été comblées que par la suite ; le chapitre de la flexion se borne à consacrer les lignes qui suivent aux efforts tranchants :

« Un élément longitudinal de métal ne peut travailler que de conserve non seulement avec la partie de ciment qui l'entoure immédiatement, mais encore avec toute la section verticale de la poutrelle qui se trouve au droit de ce dernier.

Les attaches surtout jouent un rôle très important. D'un côté, elles assurent la liaison de deux semelles hétérogènes de la poutre; de l'autre, elles servent d'appui aux petits voussoirs de ciment qu'elles encadrent, lesquels venant se butter contre elles, offrent une nouvelle résistance à la déformation de la poutre.

Nous avons éprouvé comparativement deux poutres identiques de 0,50 × 0,05 de semelle comprimée, de hauteur $h = 0,16$ et armées d'un fer rond de 14 millimètres de diamètre.

Ces poutres reposaient sur deux appuis distants de 3 mètres ; elles ont été chargées de poids placés en leur milieu. L'une n'avait qu'une attache par mètre, l'autre 5. La première s'est rompue sous une charge de 588 kilogrammes et la seconde de 1 264 kilogrammes. La pratique nous a indiqué qu'il fallait prévoir dix attaches par mètre ».

Expériences. — Enfin pour en terminer avec cet exposé, le mémoire de M. Ed. Coignet résume une série d'expériences qu'il a

entreprises et dont il résulte que le taux de travail de 15 kilogrammes qu'il a admis pour l'armature d'acier n'est jamais atteint et que le taux réel reste bien inférieur à cette valeur. La différence provient du concours important apporté à l'armature par la partie tendue du ciment.

CHAPITRE III

—

P. CHRISTOPHE

67. Théorie de M. P. Christophe. — M. Christophe, Ingénieur des Ponts et Chaussées du Gouvernement Belge, a publié dans les annales des Travaux Publics de Belgique (décembre 1899) une étude sur le béton armé ; l'édition de 1902 est remaniée et considérablement augmentée [1]. On ne résumera ici, bien entendu, que le chapitre relatif au calcul des ouvrages, dont les méthodes ont une grande analogie avec celles qui précèdent.

M. Christophe admet comme les auteurs précédents :

1° L'invariabilité des sections planes.

2° La proportionnalité entre les efforts et les déformations, aussi bien dans le béton que dans les armatures comprimées ou tendues.

3° La rupture des parties de béton travaillant à l'extension, en dépit des observations contradictoires de M. Considère, que M. Christophe ne met pas en doute, pour des prismes exécutés dans un laboratoire, mais qui lui semblent ne pouvoir se confirmer dans les applications de la pratique.

Il ramène la section fer à une section ciment, en amplifiant parallèlement à l'axe neutre la section des armatures, et admettant pour le rapport des coefficients d'élasticité du fer et du béton, ou pour $\frac{E_f}{E_c}$, qu'il appelle m, $m = 10$.

L'auteur estime que dans une pièce comprimée le béton au dosage de 300 kilogrammes peut travailler à un taux compris entre 25 et 40 kilogrammes, tandis que dans une pièce fléchie l'effort maximum de compression peut atteindre 50 kilogrammes.

[1] Ch. Béranger, éditeur.

Il considère comme prudent de ne pas dépasser $1^k,5$ à $2^k,5$ par centimètre carré pour le taux de travail au cisaillement.

Pour les armatures, il admet un taux de travail maximum de 1000 kilogrammes par centimètre carré pour le fer, de 1500 kilogrammes pour l'acier, et les 4/5 de ces valeurs pour le taux de travail de ces métaux au cisaillement.

Compression simple. — Soit :

Ω l'aire de la section totale de la pièce,

ω l'aire de la section du métal,

p le taux de travail maximum du béton à la compression,

τ le taux de travail du métal,

m le rapport $\frac{E_F}{E_C}$ du coefficient de l'élasticité du fer et du béton.

L'effort de compression P, supposé dirigé suivant l'axe neutre est relié par les équations suivantes aux taux de travail de béton et de l'armature, d'après les principes énoncés p. 139.

$$(1) \qquad P = p(\Omega + m\omega) \quad \text{et} \quad \frac{\tau}{p} = m$$

ou réciproquement :

$$(2) \qquad p = \frac{P}{\Omega + m\omega} \quad \text{et} \quad \tau = mp$$

ou enfin, si l'on veut :

$$\Omega = \frac{P}{p\left(1 + m\frac{\omega}{\Omega}\right)}$$

cette dernière équation ramène le calcul de la section hétérogène à celui d'une section homogène quand on se donne le pourcentage $\frac{\omega}{\Omega}$; elle permet de dresser le tableau suivant :

Pourcentage	Valeurs de $p\left(1 + m\frac{\omega}{\Omega}\right)$ en kg. par centimètre carré	
	pour $p = 25^k$	Pour $p = 40^k$
0,5 %	26.25	42
1 »	27,50	44
2 »	30, »	48
3 »	32,50	52
4 »	35, »	56
5 »	37,50	60

Dans le calcul de la section d'un pilier exposé au flambage, il propose pour tenir compte du danger des flexions latérales, de réduire les taux de travail précédents en déterminant la section comprimée à l'aide de la formule suivante, tirée de Rankine

$$\Omega = \frac{P}{p\left(1 + m\frac{\omega}{\Omega}\right)\left(1 + 0{,}0003\frac{l^2}{c^2}\right)}.$$

Expression où la quantité l représente la longueur libre de la pièce, et c le côté du carré de la section. La longueur l est égale à la demi-hauteur des piliers quand ceux-ci sont encastrés à leurs deux extrémités, aux 3/4 de cette hauteur quand ils ne sont encastrés qu'à une seule extrémité.

Remarque. — Dans le cas où la section de l'armature est assez importante, il convient d'évaluer plus exactement la section du béton, en déduisant de celle-ci celle des armatures. L'équation (1) devient alors :

$$(1') \qquad P = p\left[(\Omega - \omega) - m\omega\right].$$

Extension. — Pour les pièces soumises à un effort d'extension T, l'auteur néglige la résistance du ciment et calcule simplement la section de l'armature par la formule :

$$T = \tau\omega.$$

Flexion simple. — Soit :

M le moment fléchissant dans la section considérée,

ω la section de l'armature tendue,

ω_1 la section de l'armature comprimée,

p le taux du travail maximum du béton comprimé,

τ le taux du travail moyen de l'armature tendue,

τ_1 le taux de travail moyen de l'armature comprimée.

On a avec les notations indiquées sur les figures 59 et 60, l'axe neutre étant supposé en FN :

1° En égalant les efforts d'extension et la somme des compressions :

$$(1) \qquad \tau\omega = \frac{1}{2}pae + \tau_1\omega_1.$$

2° En égalant le moment des forces extérieures à la somme des moments des forces intérieures, le centre de compression étant à une distance de la fibre neutre égale aux 2/3 de la hauteur a de la partie comprimée :

$$M = \frac{2}{3} a \times \frac{1}{2} pae - \tau_1 \omega_1 b_1 + \tau \omega b. \tag{2}$$

On a d'autre part, en vertu de la loi de proportionnalité :

$$\tau = pm \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \tau_1 = pm \frac{b_1}{a}.$$

De (1), on tire par suite :

$$\frac{1}{2} a^2 e + m (\omega_1 b_1 - \omega b) = 0. \tag{3}$$

De (2), on tire :

$$M = \frac{p}{a} \left[\frac{1}{3} a^3 e + m (\omega_1 b^2_1 + \omega b^2) \right]. \tag{4}$$

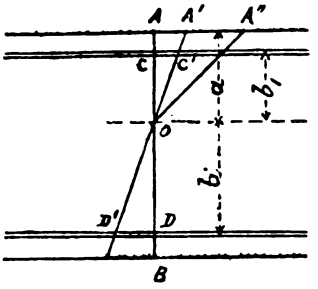


Fig. 59

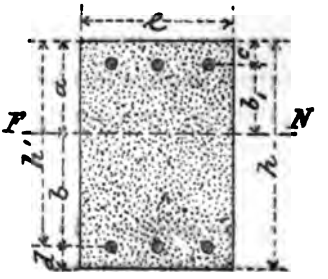


Fig. 60

L'expression entre parenthèses n'est autre chose que le moment d'inertie de la partie résistante de la poutre (béton comprimé et armatures tendues et comprimées, réduites à des sections sans résistance propre.

On déduit donc de (4)

$$\frac{p}{a} = \frac{M}{I} \tag{5}$$

$$\left(I \text{ étant égal à } \frac{1}{3} a^2 e + m (\omega_1 b^2_1 + \omega b^2)\right)$$

et par suite

$$\tau = pm\frac{b}{a} = mM\frac{b}{I} \tag{6}$$

$$\tau_1 = pm\frac{b_1}{a} = mM\frac{b_1}{I} \tag{6bis}$$

comme d'après les notations de la figure on a :

$$b = h' - a \quad \text{et} \quad b_1 = a - c$$

on a en remplaçant b et b_1 par ces valeurs dans (1)

$$\frac{1}{2}a^2e + m(\omega_1 + \omega)a - m(\omega_1 e + \omega h') = 0.$$

D'où :

$$a = -\frac{m(\omega_1 + \omega)}{e} + \sqrt{\frac{m^2(\omega_1 + \omega)^2}{e^2} + \frac{2m}{e}(\omega_1 c + \omega h')} \tag{7}$$

expression qui donne la position de la fibre neutre.

Poutre rectangulaire à armature simple. — On passera des formules ci-dessus, établies pour le cas d'une armature double, à celles relatives à l'armature simple en faisant $\omega_1 = 0$, ce qui donne :

$$\frac{1}{2}a^2e - m\omega b = 0 \tag{3'}$$

$$a = -\frac{m\omega}{e} + \sqrt{\frac{m^2\omega^2}{e^2} + \frac{2m}{e}\omega h'} \tag{7'}$$

$$I = \frac{1}{3}a^3e + m\omega b^2 \tag{5'}$$

$$p = \frac{Ma}{I} \tag{4'}$$

$$\tau = mM\frac{b}{I} \tag{6'}$$

Dans un projet, il peut paraître préférable de se donner p et τ et de déterminer les sections de façon à ce que le
dessus soient satisfaites par ces va

De (3') on tire successivement :

$$\frac{a^2e}{2} = m\omega b$$

$$\omega = \frac{a^2e}{2mb} = \frac{ae}{2} \times \frac{a}{mb}$$

et comme

$$\tau = pm\frac{b}{a},$$

d'où

$$\frac{a}{mb} = \frac{p}{\tau}$$

(7'') $$\omega = \frac{ae}{2} \times \frac{p}{\tau}$$

De même de :

$$h' = a + b,$$

on tire :

$$h' = a + \frac{a^2e}{2m\omega} = a\left(1 + \frac{ae}{2\omega}m\right)$$

et comme d'après (7'') :

$$\frac{ae}{2\omega} = \frac{b}{p}$$

(8) $$h' = a\left(1 + \frac{\tau}{pm}\right)$$

enfin de

$$I = \frac{1}{3}a^3e + m\omega b^2 = \frac{Ma}{p}$$

on tire successivement, comme $m\omega b = \frac{1}{2}a^2e$

$$m\omega b^2 = \frac{1}{2}a^2e \times \frac{a\tau}{pm}$$

$$\frac{Ma}{p} = \frac{1}{3}a^3e + \frac{1}{2}a^3e\frac{\tau}{pm}$$

$$\frac{6M}{p} = a^2e\left(2 + \frac{3\tau}{pm}\right)$$

(9) $$a = \sqrt{\frac{6M}{pe\left(2 + \frac{3\tau}{pm}\right)}}.$$

Poutre droite à simple té et à double armature. — L'auteur envisage 3 cas (voir fig. 61) :

1° La fibre neutre traverse le hourdis.

2° La fibre neutre coïncide avec l'arête inférieure du hourdis.

3° La fibre neutre se trouve en dehors du hourdis.

Comme on néglige complètement la résistance du béton à l'extension, les formules établies pour les sections rectangulaires sont applicables dans les deux premiers cas, à la condition toutefois de remplacer l'épaisseur e par la largeur λ de l'aile du té. Dans le troisième cas il faut déduire la zône fictive du hourdis dans le calcul du moment d'inertie.

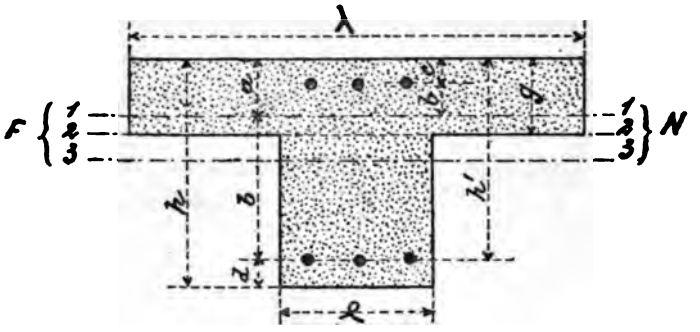


Fig. 61

On aura :

$$I = \frac{\lambda a^3}{3} - \frac{(\lambda - e)(a - g)^3}{3} + m(\omega_1 b^2_1 + \omega b^2)$$

et l'équation qui déterminera la position réelle de la fibre neutre sera :

$$a = -\frac{1}{e}\left[g(\lambda - e) + m(\omega_1 + \omega)\right]$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{e^2}\left[g(\lambda - e) + m(\omega_1 + \omega)\right]^2 + \frac{2}{e}\left[\frac{1}{2}g^2(\lambda - e) + m(\omega_1 e + \omega h')\right]}$$

Poutre droite à simple té et à armature simple. — Il suffit de faire $\omega_1 = 0$ dans les formules précédentes. On retombera pour

les deux premiers cas sur les équations trouvées plus haut pour la poutre rectangulaire ; et pour le troisième cas,

$$I = \frac{\lambda a^3}{3} - \frac{(\lambda - e)(a - g)^3}{3} = m\omega b^2$$

$$a = -\frac{1}{e}\left[g(\lambda - e) + m\omega\right] +$$

$$\sqrt{\frac{1}{e^2}\left[g(\lambda - e) + m\omega\right]^2 + \frac{2}{e}\left[\frac{1}{2}g^2(\lambda - e) + m\omega h'\right]}.$$

Poutre à simple té renversé. — On distinguera également trois cas suivant que la fibre neutre tombe hors du hourdis, à sa limite, ou à son intérieur. Dans les 2 premiers cas les calculs se feront comme pour les poutres rectangulaires. Dans le troisième cas (fig. 62) il faudra ajouter dans le moment d'inertie de la section, celui qui est relatif à la zone du hourdis travaillant à la compression et l'on aura :

$$I = \frac{ea^3}{3} + \frac{(a - f)^3(\lambda - e)}{3} + m(\omega_1 b_1^2 + \omega b^2).$$

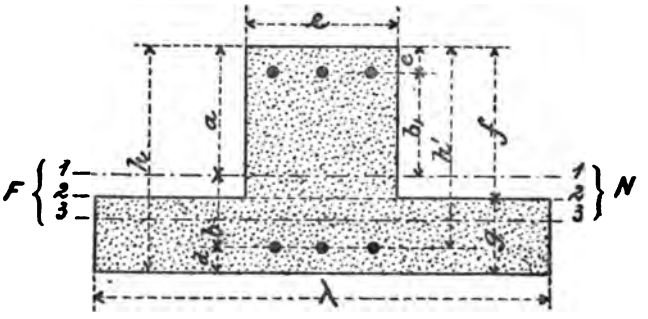


Fig. 62

Pièces fortement armées. — L'auteur suppose jusqu'ici que les moments d'inertie propres des armatures étaient négligeables. Il n'en est plus ainsi, quand la pièce est fortement armée ou armée de fers profilés de grande hauteur. Dans ce cas il y a lieu d'ajouter dans le moment d'inertie total les moments d'inertie propres de chacune des armatures. Le reste du calcul se poursuit sans autre modification.

Calcul des dalles en fonction du pourcentage.

1° *Armature simple.*

Soit : $M = \frac{M}{eh^2}$ le moment des forces extérieures rapporté à l'unité de largeur et de hauteur;

$\varphi = \frac{\omega}{eh}$ Le pourcentage en métal, ou le rapport de la section d'armature tendue à la section totale de la pièce;

$\alpha = \frac{a}{h}$ La fraction de la hauteur, qu'occupe la partie comprimée.

Si l'on suppose que la distance d des armatures est égale à $\frac{h}{6}$, on a : $h' = \frac{5}{6} h$.

Dans ces conditions et pour $m = 10$, l'équation (3') devient

$$\frac{1}{2} \alpha^2 h^2 e - 10 \varphi e h b = 0$$

et faisant $e = 1$, remplaçant b par $h' - \alpha h$, h' par $\frac{5}{6} h$ et divisant par h

$$\frac{1}{2} \alpha^2 - 10 \varphi \left(\frac{5}{6} - \alpha\right)$$

d'où l'on tire :

$$\alpha = -10\varphi + \sqrt{100\varphi^2 + \frac{100\varphi}{6}}$$

(11) $$\alpha = 10\varphi \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{6\varphi}}\right)$$

ce qui donne l'épaisseur de hourdis comprimé en fonction du pourcentage.

D'autre part de l'équation (8) on tire :

$$\frac{5}{6} = \left(1 + \frac{\tau}{10p}\right) \alpha$$

d'où

(12) $$\alpha = \frac{25}{3\left(10 + \frac{\tau}{p}\right)}.$$

De l'équation (7), on tire

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} \times \frac{p}{\tau}$$

et remplaçant α par la valeur ci-dessus trouvée :

$$\varphi = \frac{25p}{6\tau\left(10 + \frac{\tau}{p}\right)}. \tag{13}$$

Ce qui donne le pourcentage en fonction des taux de travail des matières.

Enfin combinant les équations (3') et (5')

$$I = \frac{Ma}{p} = \frac{1}{3}a^3e + \frac{1}{2}a^2eb = \frac{a^2}{6}(2a + 3b)$$

pour $e = 1$, $b = h' - a$, d'où

$$M = \frac{pa}{6}(3h' - a)$$

$$M = \frac{p\alpha}{6}(2{,}5 - \alpha) \tag{14}$$

et comme

$$p = \frac{a\tau}{mb} = \frac{\alpha\tau}{10\left(\frac{5}{6} - \alpha\right)} = \frac{6\alpha\tau}{10(5 - 6\alpha)} \tag{15}$$

$$M = \frac{\tau\alpha^2(2{,}5 - \alpha)}{10(5 - 6\alpha)}. \tag{16}$$

En se donnant p et τ, on peut déterminer par suite le moment de la section unitaire, correspondant à diverses valeurs de pourcentage.

M. Christophe a dressé de cette façon des tableaux intéressants.

On peut aussi en résolvant les équations 12, 13, 14, et 16 déterminer le pourcentage de métal pour lequel, dans un moment donné les taux de travail du béton et du métal atteindront des valeurs choisies à l'avance.

L'auteur trouve ainsi que le pourcentage de métal qui produit en même temps les taux maxima dans l'armature et dans le béton, sont de :

$\varphi = 0{,}694\ \%$ $\alpha = 0{,}278\ h$ pour le fer

$\varphi = 0{,}347\ \%$ $\alpha = 0{,}208\ h$ pour l'acier.

Il estime que ces pourcentages qui réalisent simultanément les taux de travail limites dans les deux matières, sont les plus favorables et les plus *économiques*. Ces résultats sont résumés dans le tableau suivant :

Degré de sécurité	Armature en fer $\omega = 0{,}00694\, eh$				Armature en acier $\omega = 0{,}00347\, eh$			
	Taux de travail par cmq		Moment résistant	Epaisseur de la dalle	Taux de travail par cmq.		Moment résistant	Epaisseur de la dalle
	béton p	fer τ			béton p	fer τ		
Sécurité de premier ordre. .	30	600	$3{,}09\, eh^2$	$0{,}67\sqrt{\frac{M}{e}}$	30	900	$2{,}39\, eh^2$	$0{,}65\sqrt{\frac{M}{e}}$
Sécurité de second ordre. .	50	1 000	$5{,}14\, eh^2$	$0{,}44\sqrt{\frac{M}{e}}$	50	1 500	$3{,}98\, eh^2$	$0{,}50\sqrt{M}$

Remarque. — En comparant les résultats de ce tableau avec ceux donnés plus loin, d'après la méthode Considère, on sera frappé des différences importantes amenées par l'entrée en ligne de compte de la résistance à l'extension du ciment. Les moments de résistance calculés par la méthode Considère sont de 1,5 à 2 fois plus importants.

Poutres à simple té à armature double en fonction des pourcentages. — En suivant exactement la même marche, que ci-dessus mais en introduisant un nouveau rapport $\gamma = \frac{\omega'}{\omega}$, celui de la section de l'armature supérieure à la section de l'armature inférieure, on obtient pour $C = d = \frac{h}{6}$

$$\alpha = 10\varphi(1+\gamma) - 1 + \sqrt{1 + \frac{5+\gamma}{30(1+\gamma)^2\varphi}}$$

$$M = \frac{p}{\alpha}\left\{\frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{5}{18}\varphi\left[\gamma(6\alpha-1)^2 + (5-6\alpha)\right]\right\} \text{ en fonction de } p$$

$$M = \frac{\tau}{5(5-6\alpha)}\left\{\alpha^2 + \frac{5}{6}\varphi\left[\gamma(6\alpha-1)^2 + (5-6\alpha)^2\right]\right\} \text{ en fonction de } \tau$$

On a également

$$\alpha = \frac{25}{3\left(10 + \frac{\tau}{p}\right)}$$

$$\varphi = \frac{p\alpha}{2\tau} \frac{1}{1 - \gamma \frac{6\alpha - 1}{5 - 6\alpha}}.$$

Calcul des poutres rectangulaires en fonction du pourcentage. — Comme la hauteur des poutres est généralement bien supérieure à celle des dalles, il y a lieu de remplacer le rapport de la distance d à la hauteur h, par $\frac{h}{10}$ au lieu de $\frac{h}{6}$. Les formules trouvées ci-dessus, sont par suite à remplacer par les suivantes :

$$h' = \frac{9}{10} h$$

$$\alpha = 10\varphi \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{9}{\varphi}}\right)$$

$$\alpha = \frac{9}{10 + \frac{\tau}{p}}$$

$$\varphi = \frac{p\alpha}{2\tau} = \frac{9p}{2\tau\left(10 + \frac{\tau}{p}\right)}$$

$$M = \frac{p\alpha}{6}(2{,}7 - \alpha) = \frac{\tau\alpha^2}{6} \times \frac{2{,}7 - \alpha}{9 - 10\alpha}.$$

D'où le tableau suivant des valeurs de M pour le pourcentage le plus économique.

Degré de sécurité	Armature en fer $\omega = 0{,}0075\, eh$				Armature en acier $\omega = 0{,}00375\, eh$			
	Taux de travail		Moment résistant	Hauteur de la poutre	Taux de travail		Moment résistant	Hauteur de la poutre
	béton p	fer τ			béton p	fer τ		
Sécurité de premier ordre. .	30	600	$3{,}6\, eh^2$	$0{,}53\sqrt{\frac{M}{e}}$	30	900	$4{,}78\, eh^2$	$0{,}60\sqrt{\frac{M}{e}}$
Sécurité de second ordre. .	50	1 000	$6{,}0\, eh^2$	$0{,}41\sqrt{\frac{M}{e}}$	50	1 500	$4{,}64\, eh^2$	$0{,}46\sqrt{\frac{M}{e}}$

Poutres rectangulaires à double armature. — Une transformation analogue donne les nouvelles formules à employer.

Calcul des poutres en simple té en fonction du pourcentage. — Ce cas se ramène assez simplement au calcul des poutres rectangulaires comme il a été déjà vu.

68. Efforts tranchants. — La méthode proposée par M. Christophe est la même que celle qui est employée pour les pièces homogènes (voir fig. 63).

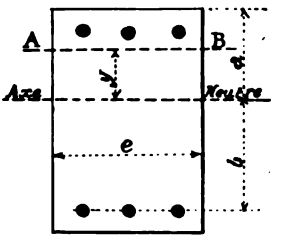


Fig. 63

L'effort de cisaillement par unité de longueur est pour un axe AB parallèle à l'axe neutre.

$$\theta y = \frac{K}{I} \int_y^a y d\Omega$$

K est l'effort tranchant qui agit dans la section considérée.

I est le moment d'inertie de la section homogène future, par rapport à l'axe neutre.

$\int_y^a y d\Omega$ est le moment statique, par rapport à l'axe neutre de la partie de la section fictive située au-dessus de AB.

Il résulte immédiatement de ces définitions que l'effort de cisaillement par unité de longueur est maximum à la fibre neutre et que sa valeur est celle exprimée ci-dessus. Soit pour une section à armature double :

$$\theta_0 = \frac{K}{eI} \left(\frac{1}{2} a^2 e + m b_1 \omega_1 \right) \tag{18}$$

par rapport à la moitié supérieure

$$\theta_0 = \frac{K}{EI} \times mb\omega$$

par rapport à la moitié inférieure.

Cette expression est donnée quelquefois sous la forme suivante :

$$\theta_0 = \frac{K}{er},$$

où $r = \int_0^a \frac{y d\Omega}{\int_b^a y^2 d\Omega}$ représente la distance des centres de compression et de tension. La quantité r est un peu plus petite que la hauteur totale de la poutre.

Pour une section rectangulaire à armature simple, les formules ci-dessus deviennent :

$$\theta_0 = \frac{K}{eI} \times \frac{1}{2} a^2 e = \frac{K}{e\left(h' - \frac{a}{3}\right)}.$$

Résistance aux efforts de cisaillement. — L'effort de cisaillement se partage entre le béton et les liaisons transversales dans une proportion qu'il n'est pas facile de déterminer. M. Christophe propose de calculer les taux de travail en ne tenant compte tout d'abord que du béton ; si ce taux ne dépasse pas le coefficient de $1^k,5$ à $2^k,5$ par centimètre carré, il pense qu'il n'y a pas lieu d'armer la pièce transversalement. Dans le cas contraire, il prévoit des *étriers* ou toute autre pièce capable de résister aux efforts de cisaillement, lesquels seront calculés en négligeant complètement le béton, c'est-à-dire dans l'hypothèse qu'ils résistent seuls aux efforts tranchants et ce par la formule

$$\theta = \frac{\Delta M}{\sigma r} mb\omega$$

dans laquelle ΔM représente la variation du moment fléchissant sur la longueur considérée et σ la section de l'étrier.

Armatures courbes. — Quand la section considérée AB rencontre une armature courbe, elle supporte une partie de l'effort tranchant que l'on peut évaluer comme suit (v. fig. 64).

Soit τ le taux de travail au cisaillement de l'armature et ψ son inclinaison, sa composante horizontale τ_h sera :

$$\tau_h = \frac{\tau}{\cos \psi}$$

et sa composante verticale

$$\tau_v = \frac{\tau}{\sin \psi}.$$

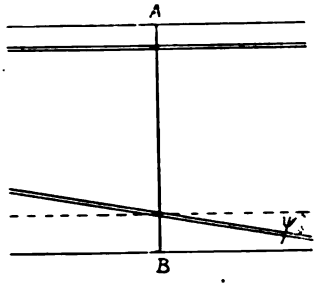


Fig. 64

L'effort vertical total pris par cette armature sera par suite en désignant sa section par ω ; $b\omega$ tg ψ. Le béton ou les étriers n'auront plus alors qu'à résister à l'effort K′ donné par la différence entre l'effort tranchant total et l'effort absorbé par l'armature

$$K' = K - b \text{ cotang } \psi.$$

Pièces comprimées et fléchies.

1° *Pièces ne travaillant qu'à la compression.*

Désignons par ω et ω_1 les sections des armatures, par p et p' les taux de travail maxima dans le béton ; par τ et τ_1 le taux de travail moyen de chaque armature, et posons :

$$p_1 = \frac{p + p'}{2}; \quad p_2 = \frac{p - p'}{2}.$$

Nous aurons (v. fig. 65 et 66)

a) en égalant les forces horizontales

$$N = phe + \tau_1\omega_1 + \tau\omega.$$

b) en prenant les moments par rapport à *b*.

$$M = \frac{1}{6} p^2 h^2 e + \tau_1 \omega_1 u_1 - \tau \omega u$$

on a d'autre part :

$$\tau = m \left(p_1 - p_2 \frac{2u}{h} \right)$$

$$\tau_1 = m \left(p_1 + p_2 \frac{2u_1}{h} \right)$$

d'où

$$N = p_1 \left[he + m(\omega_1 + \omega) + \frac{2mp_2}{h} (\omega_1 u_1 - \omega u) \right]$$

$$M = mp_1(\omega_1 u_1 - \omega u) + p_2 \left[\frac{h^2 e}{6} + \frac{2m}{h} (\omega_1 u_1^2 + u\omega^2) \right]$$

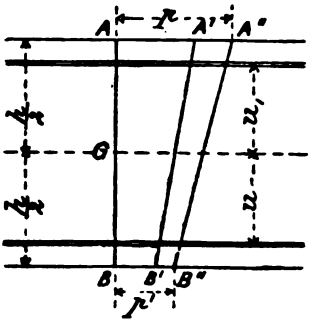


Fig. 65

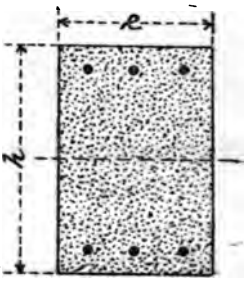


Fig. 66

Posons :

$$A = he + m(\omega_1 + \omega)$$

$$B = m(\omega_1 u_1 - \omega u)$$

$$I = 12 h^3 e + m(\omega_1 u^2_1 + \omega u^2).$$

On a

$$p_1 = \frac{IN - BM}{IA - B^2}$$

$$p_2 = \frac{p}{2} \times \frac{AM - BN}{IA - B^2}$$

à la condition que

$$\frac{M}{N} < \frac{2I + Bh}{Ah + 2B};$$

2° *Pièce travaillant partiellement à la traction.*

En procédant exactement de la même façon, on trouve (v. fig. 67 et 68).

$$N = \frac{1}{2} pae + \tau_1 \omega_1 - \tau\omega$$

$$M = \frac{1}{2} pae \left(\frac{1}{2} h - \frac{1}{3} a\right) + \tau_1 \omega_1 u_1 - \tau\omega u$$

$$\tau = \frac{pmb}{a}$$

$$\tau_1 = \frac{pmb_1}{a}$$

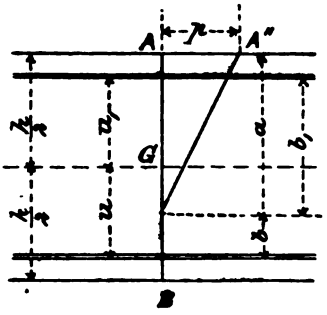


Fig. 67

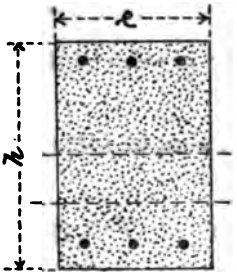


Fig. 68

ou encore

$$N = \frac{p}{a}\left[\left(\frac{1}{2} a^2 e + m(\omega_1 b_1 - \omega b)\right)\right]$$

$$M = \frac{p}{a}\left[\frac{1}{2} a^2 e \left(\frac{1}{2} h - \frac{1}{3} a\right) + m(\omega_1 b_1 u_1 + \omega b u)\right].$$

Remarque. — Quand les pièces sont fortement armées, il y a lieu d'ajouter aux moments d'inertie exprimés ci-dessus, les moments d'inertie des armatures pris par rapport à leur centre de gravité.

APPLICATIONS

69. I. — *Un poteau de* $0^m,35 \times 0^m,35$, *armé de* 4 *barres rondes de* 30 *millimètres de diamètre est chargé de* 50 *tonnes, on demande le travail des matières pour diverses valeurs de* m.

On posera :

$$\left.\begin{array}{l}\Omega = 35 \times 35 = 1\,225^{cm^2} \\ \omega = 4 \times 7{,}07 = 28{,}28^{cm^2}\end{array}\right\} P = 50\,000 \text{ kilogrammes}$$

On aura donc pour $m = 10$

$$p = \frac{P}{\Omega + m\omega} = \frac{50\,000}{1\,225 \times 10 \times 28{,}28} = 33^k{,}16 \text{ par } ^{cm^2}$$

$$\tau = mp = 10 \times 33{,}16 = 331^k{,}60 \text{ par } ^{cm^2}.$$

On aura de même pour $m = 20$

$$p = \frac{50\,000}{1\,225 + 20 \times 28{,}28} = 27^k{,}92 \text{ par } ^{cm^2}$$

$$\tau = mp = 20 \times 27{,}92 = 558^k{,}40 \text{ par } ^{cm^2}.$$

II. — *Quelle est la section de béton et de fer qu'il y a lieu de prévoir pour un poteau chargé de* 50000 *kilogrammes* (*on suppose* m = 15) *et l'on s'impose* 30 *kilogrammes et* 1 000 *kilogrammes comme limites du travail du béton et du métal.*

$$\Omega = \frac{P}{p\left(1 + \frac{m\omega}{\Omega}\right)} = \frac{50\,000}{30\left(1 + 15\,\frac{\omega}{\Omega}\right)}.$$

Le problème est indéterminé, puisque l'on ne dispose que d'une équation entre deux inconnues Ω et ω. Si l'on voulait éclairer son choix par des considérations économiques, on donnerait diverses

valeurs au rapport $\frac{\omega}{\Omega}$ qui est le pourcentage et l'on aurait par exemple, pour

(1) $\frac{\omega}{\Omega} = 0$ $\quad \Omega = \frac{50000}{30} \times \frac{1}{1} = 1\,667^{cm^2}$ $\quad \omega = 0^{cm^2}$

(2) $\frac{\omega}{\Omega} = 0{,}01$ $\quad \Omega = \frac{50\,000}{30} \times \frac{1}{1{,}15} = 1\,450^{cm^2}$ $\quad \omega = 14{,}50^{cm^2}$

(3) $\frac{\omega}{\Omega} = 0{,}02$ $\quad \Omega = \frac{50\,000}{30} \times \frac{1}{1{,}30} = 1\,280^{cm^2}$ $\quad \omega = 25{,}60^{cm^2}$

(4) $\frac{\omega}{\Omega} = 0{,}03$ $\quad \Omega = \frac{50\,000}{30} \times \frac{1}{1{,}45} = 1\,150^{cm^2}$ $\quad \omega = 34{,}5^{cm^2}$.

Si l'on applique les prix de 80 francs au mètre cube de béton et de $0^{fr},30$ au centimètre carré de métal sur 1 mètre de longueur, on aura par mètre les prix suivants :

1) $13^{fr},33$; 2) $15^{fr},95$; 3) $17^{fr},94$; 4) $19^{fr},35$

Le béton non armé est donc le plus économique ; mais comme il convient d'armer ce dernier contre les effets secondaires, on admettra le pourcentage minimum, soit par exemple 1 %. — Cette condition conduit pour $m = 20$ à :

$$\tau = \frac{P}{36}.$$

III. — *De quelle surcharge par mètre carré est capable une dalle de* $0^m,08$ *armée à la tension seulement, à raison de* 1 %, *sur une portée libre de* 2 *mètres. On ne veut pas dépasser* 30 *kilogrammes pour le taux de travail du béton* (1).

On supposera

$$m = 20$$
$$h = 8$$
$$h' = 5{,}6.$$
$$e = 100 \text{ (dalle de 1 mètre de largeur)}$$

$$a = -\frac{m\omega}{e} + \sqrt{\frac{m^2\omega^2}{e^2} + \frac{2m\omega h'}{e}}.$$

(1) Ce problème et les suivants seront traités plus loin à l'aide des méthodes simplifiées.

$$a = -\frac{20 \times 8}{100} + \sqrt{\overline{1,60}^2 + \frac{2 \times 20 \times 8 \times 5,6}{100}}.$$

$$a = 2,92$$

$$b = h' - a = 5,6 - 2,92 = 2,68.$$

$$I = \frac{1}{3} a^3 e + m\omega b^2$$

$$I = \frac{1}{3} \times \overline{2,92}^3 \times 100 + 20 \times 8 \times \overline{2,68}^2 = 1\,979$$

$$M = p\frac{I}{a} = \frac{30}{2,92} \times 1\,979 = 20\,333 \text{ k. c. m.}$$

$$M = 203^{kgm},33$$

$$P + P' = \frac{8}{l^2} \times 203,33 = \frac{8}{\overline{2}^2} \times 203,33 = 406,66$$

$$P' = 406,66 - P = 406,66 - 200^k = 206,66$$

$$P' = 206^k,66 \text{ par mètre carré.}$$

On a :

$$\tau = mM\frac{b}{I} = \frac{20 \times 20333 \times 2,68}{1979}$$

$$\tau = 555^k \text{ par centimètre carré.}$$

IV. — *On demande le travail du béton et du métal d'une dalle de* 0,08, *armée de* 1/2 °/₀ *et soumise à un moment de* 6,72 h^2 (*on suppose* m = 20)

$$M = 6,72 \times \overline{8}^2 \times 100 = 43008 \text{ kg. c. m.}$$

$$\omega = 4$$

$$h' = 5,6$$

$$e = 100$$

$$a = -\frac{20 \times 4}{100} + \sqrt{\overline{0,8}^2 + \frac{2 \times 20 \times 4 \times 5,6}{100}}$$

$$a = 2,46$$

$$b = 5,6 - 2,46 = 3,14$$

$$I = \frac{1}{3} \times \overline{2,46}^3 \times 100 + 20 \times 4 \times \overline{3,14}^2$$

$$= 1\,293$$

$$p = \frac{Ma}{I} = \frac{43\,008 \times 2,46}{1\,293} = 81^k,80$$

$$\tau = \frac{20 \times 43\,008 \times 3,14}{1\,293} = 2\,088^{kcm^2}.$$

V. — *Déterminer une dalle de* $2^m,20$ *de portée,* 400 *kilogrammes de surcharge ; on s'impose* p = 30 *kilogrammes et* $\tau = 1\,200$ *kilogrammes* (m = 20) [1].

On prévoit *a priori* $h = 10$ et l'on cherchera le pourcentage

$$\left.\begin{array}{l} P = 0{,}10 \times 2\,500 = 250^k \\ P' = \qquad\qquad\quad 400^k \end{array}\right\} P + P' = 650^k$$

$$M = \frac{650 \times \overline{2.20}^2}{8} = 393^{kgm} = 39\,300^{kcm}$$

$$h = 10 \qquad e = 100 \qquad p = 30$$

$$h' = 8 \qquad m = 20 \qquad \tau = 1\,200$$

$$a = \sqrt{\frac{6M}{pe\left(\frac{2 + 3\tau}{pm}\right)}}$$

$$a = \sqrt{\frac{6 \times 39300}{30 \times 100\left(2 + \frac{3 \times 1\,200}{30 \times 20}\right)}} = 3{,}13$$

$$b = 8 - 3{,}13 = 4{,}87$$

$$\omega = \frac{\frac{1}{2}a^2e}{mb} = \frac{\frac{1}{2} \times \overline{3{,}13}^2 \times 100}{20 \times 4{,}87} = 5{,}04$$

D'où un pourcentage de $\frac{5{,}04}{1\,000} = 1/2\ \%$.

VI. — *Un élément de plancher de* $3^m \times 6{,}50$ *avec hourdis de* 0,11 *et nervure de* $0^m,16$ *de largeur et de* $0^m,40$ *de hauteur, a été armé à la tension de* 2 *ronds de* 35 *millimètres, on demande le travail p du béton, et* τ *de l'armature, sous une charge de* 400 *kilogrammes* (fig. 69).

Section du hourdis $3 \times 0{,}11 = 0{,}330$
» de la nervure $0{,}16 \times 0{,}40 = 0{,}064$
Section totale $= 0{,}394$

$$P = 0{,}394 \times 2\,500^k = 985^k$$
$$P' = 3 \times 400^k = 1\,200^k$$
$$P + P' = 2\,185^k \text{ p. M.}$$

$$M = \frac{2\,185^k \times \overline{6{,}50}^2}{8} = 11\,540^{kgm}$$

(1) Même observation que pour le problème III.

Les données du problème sont donc :

$$M = 1\,154\,000^{kcm} \qquad \omega = 2 \times 9{,}62 = 19{,}24$$
$$\lambda = 300 \qquad \omega_1 = 0$$
$$g = 11 \qquad b_1 = 0$$
$$h = 40 + 11 = 51 \qquad c = 0$$
$$h' = 51 - 5 = 46$$

on supposera $m = 20$ (pour la comparaison avec les autres méthodes).

On a su par un premier tâtonnement ou par l'emploi d'une autre méthode que la fibre neutre tombe dans l'épaisseur du hourdis (cas 1 de la figure 61).

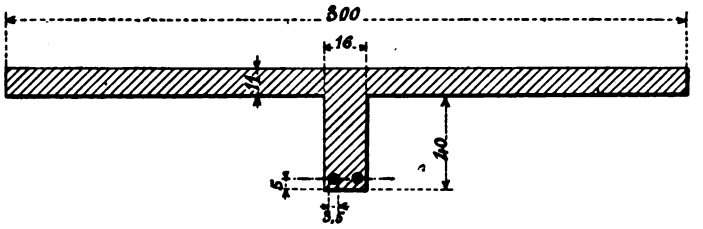


Fig. 69

Dans ce cas, ce sont les formules de la dalle dont il y a lieu de se servir, en y remplaçant e par λ.

Donc :

$$a = -\frac{m\omega}{\lambda} + \sqrt{\frac{m^2\omega^2}{\lambda^2} + \frac{2m}{\lambda}\,\omega h'}$$

$$a = \frac{-20 \times 19{,}24}{300} + \sqrt{\left(\frac{20 \times 19{,}24}{300}\right)^2 + \frac{2 \times 20}{300} \times 19{,}24 \times 46}$$

D'où :

$$a = 9{,}66$$
$$b = h' - a = 46 - 9{,}66 = 36{,}34$$
$$I = \frac{1}{3}\,a^3\lambda + m\omega b^2$$
$$I = \frac{1}{3} \times \overline{9{,}66}^3 \times 300 + 20 \times 19{,}24 \times \overline{36{,}34}^2$$

$$I = 598343$$

$$p = \frac{Ma}{I}$$

$$p = \frac{1\,154\,000 \times 9{,}66}{598\,343} = 18{,}64 \text{ par centimètre carré}$$

$$\tau = mM\frac{b}{I}$$

$$= \frac{20 \times 1\,154\,000 \times 36{,}34}{598\,343} = 1\,403^{k} \text{ ou } 14^{k},03.$$

CHAPITRE IV

LÉON STELLET — L. LEFORT — RÉSAL HAREL DE LA NOË

70. Théorie de Léon Stellet. — Léon Stellet, ingénieur des Ponts et Chaussées, que la mort est venue ravir à la science tout au début de sa carrière, s'était adonné avec une passion fébrile à l'étude du ciment armé. Seul, le journal « le Ciment » (1) a eu la faveur de quelques communications faites à la hâte par Léon Stellet, car il était déjà en proie à cette époque aux dernières affres de l'agonie; hélas! s'il eût vécu quelques mois de plus, il aurait eu le temps de donner la dernière main à l'œuvre considérable qu'il avait préparée dans ses minutes.

Nous résumerons comme suit les grandes lignes de la théorie qu'il a conçue.

Il distingue d'une façon bien tranchée, dans un ouvrage en ciment armé, la charpente proprement dite du hourdis (c'est-à-dire les nervures qui résistent aux charges), des remplissages rigides qui ont pour but de transmettre et de répartir l'effet des forces extérieures. Les poutres ou nervures qu'il considère, sont dépouillées des larges ailes formées par le hourdis, que la plupart des constructeurs utilisent complètement à la résistance, comme si, disait-il, en dépit de leur largeur considérable, elles faisaient partie intégrante de la nervure, sur toute leur étendue.

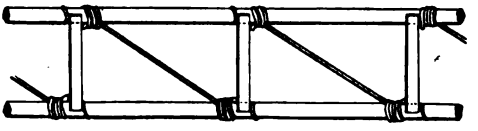


Fig. 70

(1) Voir les années 1897 et 1893, du *Ciment*.

La conséquence de cette manière de voir est la suivante :

La partie ciment de la poutre est relativement faible et peut être négligée au point de vue de la résistance des armatures aux efforts de flexion. Les armatures seront par suite disposées de manière à former une véritable poutre métallique à treillis en N et à membrures continues et d'égale section. Comme l'indiquent les figures 70 et 71 les barres verticales sont constituées par des chevalets en béton armé conçus de manière à résister, livrés à eux-mêmes à de grands efforts de compression ; ils supporteront pendant la construction du plancher une grande partie du poids mort. Quand le plancher est coulé, L. Stellet ne compte plus sur le concours du treillis : il estime que la grande adhérence des matières est suffisante pour assurer la solidarité des membrures.

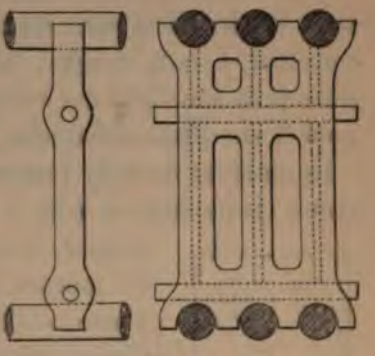


Fig. 71

Dans ces conditions, le calcul d'une poutre en ciment armé revient à celui d'une poutre métallique. C'est ainsi que pour une distance h entre les centres de gravité des membrures, une section S de chacune de celles-ci, un travail admissible R et un moment fléchissant M, on a :

$$S = \frac{M}{Rh}.$$

Stellet conseillait de prendre :

R = 8k,5 pour les armatures en fer
R = 12k,0 » » en acier.

Ces chiffres seraient réduits respectivement à 7k,25 et à 10k,30, si les poutres ne comportent pas de treillis, de manière à ce que la somme de l'effort longitudinal et de l'effort tranchant, rapportés à l'unité de section, ne dépassent pas les valeurs indiquées ci-dessus.

71. Théorie de M. L. Lefort (¹). — Peu de temps après la publication dans le *Ciment* des expériences d'Asnières et du mode de calcul qui les avait inspirées, Léon Stellet écrivit à la Rédaction du journal, pour la prier de faire savoir que la date de ses études, quoique inédites encore, était antérieure de beaucoup à la publication du *Ciment*, il ajoutait qu'il mettait à la disposition du journal quelques chapitres de son œuvre. Par une coïncidence, qui s'est présentée souvent dans le domaine scientifique, M. L. Lefort avait conçu les mêmes idées. La symétrie des armatures était dans l'air, à cette époque; elle séduisait beaucoup d'esprits par suite de la simplicité des calculs, qui revêtaient les formes usitées pour la charpente métallique.

La méthode de M. L. Lefort est cependant quelque peu postérieure; la publication n'en a commencé dans *les Nouvelles annales de la construction*, que des mois après celle du journal « *le Ciment* » et a duré toute une année. — Elle a paru en effet par petits fragments, écrits pour ainsi dire au jour le jour, ce qui ressort des corrections apportées vers la fin de l'étude aux propositions des premiers chapitres.

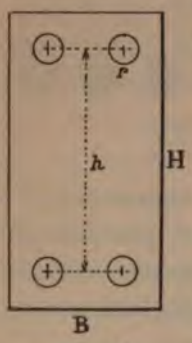


Fig. 72

M. Lefort tient compte tout d'abord du ciment comprimé, du ciment tendu et du fer, en ramenant le tout à une section homogène, comme dans les méthodes ci-dessus décrites. Puis comme Stellet, il distingue bien nettement la charpente du hourdis. La section de la poutre affectant généralement une forme rectangulaire, l'appoint de résistance amené par le béton n'est pas considérable; de plus il est assez difficile à déterminer. Il convient donc d'en tenir compte dans la pratique en relevant le coefficient de travail pratique du métal qui sera seul chargé de résister aux efforts d'extension.

En d'autres termes, pour M. Lefort tout se passe comme si la masse considérée, béton et métal, était homogène au point de vue élastique à la condition de substituer à une section de métal

(¹) *Nouvelles annales de la construction*, 1898, Ch. Béranger, éditeur.

2S, une section 2KS, K étant le rapport des coefficients d'élasticité du métal et du béton. La section d'une poutre rectangulaire de base B (fig. 72) et de hauteur H, sera par suite BH + 2KS. Le centre de gravité et le moment d'inertie se calculeront en supposant la largeur du fer amplifiée suivant le rapport K et invariable dans le sens de la hauteur. On aura par suite, en désignant par n' le nombre de barres de l'armature supérieure et par n celui des barres de l'armature inférieure, par r le rayon commun à toutes ces barres et par Δ la distance de l'axe neutre du plan supérieur du prisme :

$$\Delta = \frac{K\pi r^2 \left(n \frac{H+h}{2} + n' \frac{H-h}{2}\right) + \frac{BH^2}{2}}{K(n+n')\pi r^2 + BH}$$

et pour le moment d'inertie :

$$I = K\pi r^2 \left[(n+n')\frac{r^2}{4} + n\left(\frac{H+h}{2} - \Delta\right)^2 + n'\left(\Delta - \frac{H-h}{2}\right)^2\right]$$

$$+ BH\left[\frac{H^2}{12} + \left(\Delta - \frac{H}{2}\right)^2\right].$$

Dans l'hypothèse ci-dessus faite par M. Lefort, le moment résistant maximum s'obtiendra pour $n = n'$, c'est-à-dire pour des armatures d'égale section, haut et bas. On a alors $\Delta = \frac{H}{2}$ et la valeur de I se réduit à :

$$I = \frac{BH^3}{12} + \frac{K\pi r^2}{2}(nr^2 + nh^2).$$

Le produit $\frac{K\pi r^2}{2} \times nr^2$, représentant le moment d'inertie propre des armatures, est généralement très faible ; en le négligeant, on a :

$$I = \frac{BH^3}{12} + \frac{nK\pi r^2}{2} h^2$$

e, en remplaçant $n\pi r^2$ par S, de ma-

nière à disposer d'une formule indépendante de la forme des armatures :

$$I = \frac{BH^3}{12} + \frac{KSh^2}{2}.$$

Enfin comme le rapport K est assez mal défini M. Lefort, propose de négliger le premier terme, relatif au béton, et par contre de réduire le moment fléchissant M de 40 °/₀, comme le proposait l'auteur de l'article du « *Ciment* » déjà cité, en raison des résultats que lui avaient donnés les expériences d'Asnières. On peut poser alors :

$$I = \frac{Sh^2}{2} \qquad \frac{I}{v} = Sh$$

formules bien connues et utilisées depuis longtemps en ciment armé comme en charpente métallique, alors que l'épaisseur des membrures est assez faible par rapport à la distance h qui sépare leurs centres de gravité. Lefort propose de faire travailler le fer à 8 kilogrammes, l'acier à 12 kilogrammes et de se servir de la valeur approximative ci-dessus de $\frac{I}{v}$, à condition de poser :

$$RSh = 0{,}6\ M \quad \text{pour } R = 8 \text{ ou } 12 \text{ kilogrammes}$$

ce qui revient à poser

$$RSh = M \quad \text{et à prendre } R = 13{,}33 \text{ ou } 20.$$

Mais pour tenir compte de ce que l'effort moyen est légèrement inférieur à l'effort maximum, on ne prendrait que R = 12 kilogrammes ou 18 kilogrammes respectivement pour le fer et pour l'acier.

La méthode publiée par M. Lefort n'est donc pas autre chose au fond que la méthode qui était employée par la Société pour les Constructions en ciment armé, laquelle n'avait entrepris les expériences d'Asnières que précisément pour contrôler le bien fondé de ces coefficients.

72. Théorie de M. J. Résal. — M. Résal, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, ne donne pas, à proprement parler, une

théorie nouvelle sur les ouvrages en ciment armé ; il se borne dans son cours sur la *stabilité des constructions* à démontrer que l'on peut calculer *rigoureusement* les efforts développés dans une poutre hétérogène, en amplifiant la section de l'une des deux matières dans le rapport de son coefficient d'élasticité à celui de l'autre matière et à examiner l'influence de la répartition des fers dans la poutre, dans l'hypothèse du concours du béton à la résistance de l'ensemble aussi bien à l'extension qu'à la compression, et de l'identité des coefficients d'élasticité du béton à l'extension et à la compression [1]. Comme nous venons de le dire, cette théorie ne diffère guère des précédentes, mais elle a été si magistralement présentée qu'il convient d'en reproduire quelques passages.

I. — *La limite d'élasticité n'est atteinte ni dans le béton ni dans le métal.*

Considérons une pièce prismatique (fig. 73) formée de deux matières et constituée de façon que les déformations soient concordantes. Faisons une section transversale de cette pièce et soient :

ω et ω' les aires de chacune de ces matières,

G et G' leurs centres de gravité ; m leur distance,

E et E' leurs coefficients d'élasticité.

Fig. 73

Nous supposerons en outre que les deux surfaces ω et ω' ont pour axe principal commun, la droite GG' (hypothèse qui n'est pas nécessaire, mais qui simplifie les calculs ; elle correspond d'ailleurs en général aux cas qui se présentent en pratique).

Enfin nous désignerons par i et i' les moments d'inertie propres de chacune des sections ω et ω' par rapport à la perpendiculaire GG' passant par leurs centres de gravité G et G'.

[1] M. Résal a étudié dans sa *Résistance des matériaux* (p. 335, fig. 91) les efforts qui se développent dans une poutre fléchie quand la matière a dépassé sa limite d'élasticité, soit à l'extension, soit à la compression, soit à la fois à l'extension et à la compression ; il ne revient donc pas sur cette étude à laquelle il renvoie le lecteur.

Substituons à la pièce hétérogène une pièce homogène fictiv on aura pour la section fictive Ω

$$\Omega = \omega + \frac{E'}{E}\omega' \tag{1}$$

pour les distances u et u' des centres G et G' à l'axe neutre (l'ensemble

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{E'}{E}\,\frac{m\omega'}{\omega + \frac{E'}{E}\omega'} \\ u' &= \frac{m\omega}{\omega + \frac{E'}{E}\omega'} \end{aligned}\right. \tag{2}$$

et pour le moment d'inertie total :

$$I = i + \frac{E'}{E}i' + \omega u^2 + \frac{E}{E'}\omega' u'^2.$$

Cette expression peut s'écrire un peu plus simplement, on a (effet :

$$\frac{\omega}{\frac{E'}{E}\omega'} = \frac{u'}{u}$$

d'où

$$\frac{E'}{E}\omega' u' = \omega u$$

et par suite :

$$\begin{aligned} \omega u^2 + \frac{E}{E'}\omega' u'^2 &= \omega u(u + u') = m\omega u \\ &= m\frac{E}{E'}\omega' u' = \frac{mE}{E'}\omega' \times \frac{m\omega}{\omega + \frac{E'}{E}\omega'} \\ &= \frac{E'}{E}\,\frac{m^2\omega\omega'}{\Omega}. \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$I = i + \frac{E'}{E}i' + \frac{E'}{E}\,\frac{m^2\omega\omega'}{\Omega}. \tag{3}$$

Si nous désignons l'effort normal par F, le moment fléchissant par X, et par y la distance à l'axe neutre d'une fibre dont on recherche le taux de travail R, on aura :

1° Pour la matière dont le coefficient d'élasticité longitudinal est E :

$$R = \frac{F}{\Omega} \pm \frac{Xy}{I};$$

2° Pour la matière dont le coefficient d'élasticité longitudinal est F' :

$$R' = \frac{E'}{E}\left(\frac{F}{\Omega} \pm \frac{Xy}{I}\right).$$

M. Résal démontre ensuite que ces formules sont rigoureuses et qu'on peut leur accorder le même degré de confiance qu'à celles établies pour le calcul des pièces homogènes.

En ce qui concerne les valeurs pratiques des coefficients R et R', nous citons textuellement l'auteur.

« Le béton de ciment oppose aux efforts de compression une résistance considérable, qui atteint et quelquefois dépasse 200 kilogrammes par centimètre carré. Mais on ne peut guère compter sur une limite de rupture à la traction supérieure à 15 kilogrammes ou à 20 kilogrammes au grand maximum. La limite d'élasticité est assez difficile à reconnaître avec exactitude, pour un corps hétérogène (caillou, sable et ciment) dont les propriétés sont très influencées par les procédés de fabrication et le mode d'emploi et qui se prête malaisément à des expériences de précision. On peut admettre *pratiquement* que cette limite varie entre 8 et 10 kilogrammes pour la tension et entre 50 et 100 kilogrammes pour la compression. Enfin le coefficient d'élasticité longitudinale qui n'est également pas susceptible d'être déterminé rigoureusement paraît compris entre $1,8 \times 10^9$ et $2,5 \times 10^9$; on a parfois obtenu des chiffres plus élevés, jusqu'à 3×10^9 et même davantage.

« Pour fixer les idées, nous admettrons que le rapport entre le coefficient d'élasticité du fer ou de l'acier et celui du béton est 10,5 ; c'est là une valeur moyenne qui ne s'écarte jamais beaucoup de la réalité ».

Substituons à la pièce hétérogène une pièce homogène on aura pour la section fictive Ω

$$\Omega = \omega + \frac{E'}{E}\omega' \tag{1}$$

pour les distances u et u' des centres G et G' à l'axe n l'ensemble

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{E'}{E}\,\frac{m\omega'}{\omega + \frac{E'}{E}\omega'} \\ u' &= \frac{m\omega}{\omega + \frac{E'}{E}\omega'} \end{aligned}\right. \tag{2}$$

et pour le moment d'inertie total :

$$I = i + \frac{E'}{E}i' + \omega u^2 + \frac{E}{E'}\omega' u'^2.$$

Cette expression peut s'écrire un peu plus simplement, effet :

$$\frac{\omega}{\frac{E'}{E}\omega'} = \frac{u'}{u}$$

d'où

$$\frac{E'}{E}\omega' u' = \omega u$$

et par suite :

$$\begin{aligned} \omega u^2 + \frac{E}{E'}\omega' u'^2 &= \omega u(u + u') = m\omega u \\ &= m\frac{E}{E'}\omega' u' = \frac{mE}{E'}\omega' \times \frac{\quad ?}{\omega -} \\ &= \frac{E'}{E}\,\frac{m^2\omega\omega'}{\Omega}. \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$I = i + \frac{E'}{E}i' + \frac{E'}{E}\,\frac{m^2\omega\omega'}{\Omega}. \tag{3}$$

II. *Distribution des fers dans une poutre en ciment armé.* — L'introduction du métal dans le ciment a surtout pour but de renforcer les parties travaillant à l'extension. En conséquence les fers devront être en principe distribués de façon à réduire le plus possible le travail du béton à la traction. Mais, ajoute M. Résal, on ne se préoccupera pas d'atténuer en même temps le travail du béton à la compression ; il suffira de ne pas l'aggraver dans une mesure qui puisse devenir inquiétante.

« Il est évident *a priori* que pour faire rendre au métal le maximum d'effet utile, il convient de le concentrer dans les deux régions de la poutre en béton les plus éloignées de l'axe neutre de la section. Nous allons rechercher dans quelle proportion il faut le partager entre les régions tendues et comprimées pour en tirer le meilleur parti.

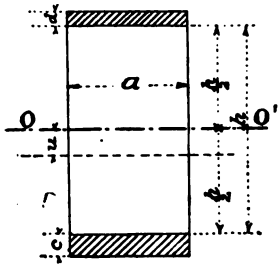


Fig. 74

« Considérons une poutre en béton à profil rectangulaire de hauteur h et de largeur a avec axe neutre horizontal. L'aire de la section transversale est $\omega = ah$.

« Enchâssons cette poutre entre deux tôles planes, appliquées respectivement sur sa face supérieure et sur sa face inférieure (fig. 74). Nous attribuerons à ces tôles de même largeur a, l'épaisseur c pour la région tendue et l'épaisseur d pour la région comprimée. L'aire totale de la section droite des fers sera ainsi $a(c+d)$. Il s'agit de trouver la valeur à attribuer au rapport $\frac{c}{d}$ de ces deux épaisseurs pour obtenir le meilleur résultat.

« Afin de simplifier les formules, nous admettrons que les dimensions c et d soient assez petites pour être négligeables sans erreur sensible par rapport à la hauteur h de la poutre.

Posons :

$$\frac{E'}{E}\, a(c+d) = \alpha$$

$$\frac{E'}{E}\, ac = \frac{\alpha}{2} + \beta$$

$$\frac{E'}{E}\, ad = \frac{\alpha}{2} - \beta$$

Comme il doit y avoir plus de métal dans la partie tendue que dans la partie comprimée, l'aire β est nécessairement positive ; la valeur de β varie entre $\frac{\alpha}{2}$, qui correspond au cas où le fer est concentré dans la région tendue (*armature simple* $d = 0$), et zéro qui répond à l'*armature double symétrique* $c = d$. »

On a :

$$\Omega = ah + \frac{E'}{E} a(c + d) = \omega + \alpha$$

et en prenant les moments par rapport à l'axe passant par le milieu de la section OO′ et en désignant par u la distance de cet axe à l'axe neutre de la section fictive

$$\frac{h}{2}\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) - \frac{h}{2}\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) = u\Omega$$

d'où

$$u = \frac{h\beta}{\Omega}.$$

On a d'autre part pour le moment d'inertie

$$I = \frac{\omega h^2}{12} + \frac{\alpha h^2}{4} - \Omega u^2$$

et en remplaçant u par sa valeur

$$I = \frac{\omega h^2}{12} + \frac{\alpha h^2}{4} - \frac{h^2\beta^2}{\Omega}$$

$$I = \frac{\Omega h^2(\omega + 3\alpha) - 12h^2\beta^2}{12\,\Omega}.$$

Les efforts maxima, R à l'extension et S à la compression sont :

$$R = \frac{X}{I}\left(\frac{h}{2} - u\right) = \frac{6X}{h}\,\frac{\omega + \alpha - 2\beta}{(\omega + \alpha)(\omega + 3\alpha) - 12\beta^2}$$

$$S = \frac{6X}{E}\left(\frac{h}{2} + u\right) = \frac{6X}{h}\,\frac{\omega + \alpha + 2\beta}{(\omega + \alpha)(\omega + 3\alpha) - 12\beta^2}$$

$$S = R = \frac{\omega + \alpha + 2\beta}{\omega + \alpha - 2\beta}.$$

On a pour l'*armature simple* $\beta = \frac{\alpha}{2}$

$$R = \frac{6X}{h} \frac{1}{\omega + 4\alpha}$$

$$S = R = \frac{\omega + 2\alpha^2}{\omega}$$

et pour l'*armature double symétrique* $\beta = 0$

$$R = \frac{6X}{h} \frac{1}{\omega + 3\alpha}$$

$$S = R.$$

« Si l'on se place au point de vue exclusif de la réduction du travail à l'extension, la solution de l'armature simple paraît préférable à toute autre : avec une même quantité de métal, on obtient ainsi la plus faible valeur de R. Toutefois le fer enchassé dans la partie comprimée n'est pas sans utilité, puisqu'il procure, dans l'armature symétrique, une diminution notable du travail d'extension, qui est à la vérité deux fois moindre que celle due au fer de la région tendue. En définitive, pour obtenir le même résultat, on a le choix entre une armature simple, une armature symétrique pesant non pas le double, mais seulement les quatre tiers [1] de la première, et une armature double dissymétrique de poids intermédiaire.

« Examinons ce qui se passe dans la région comprimée de la poutre. L'ossature symétrique a pour effet de maintenir le travail de compression égal au travail d'extension. Or étant donné que le ciment résiste beaucoup mieux aux pressions qu'aux tractions, il est rationnel d'en profiter et il ne paraît pas logique d'adopter ce

[1] On a en effet en égalant les 2 valeurs particulières de R, déterminées ci-dessus et en représentant par α' la quantité de métal employée dans l'armature double

$$\frac{6X}{h} \frac{1}{\omega + 4\alpha} = \frac{6X}{h} \frac{1}{\omega + 3\alpha'}$$

d'où

$$\omega + 3\alpha' = \omega + 4\alpha$$

et

$$\alpha' = \frac{4}{3}\alpha.$$

type d'armature, si l'on veut que le ciment coopère de la façon la plus efficace et la plus complète à la stabilité de la poutre. L'armature devra être soit simple, soit double, mais alors dissymétrique, l'aire B étant toujours égale ou supérieure à zéro sans atteindre le maximum $\frac{\alpha}{2}$.

« Partons de la poutre en béton entièrement dégarnie de fer : $\alpha = 0$ et $S = R$. Elle ne peut porter en toute sécurité qu'une charge très faible. Proposons-nous d'augmenter sa résistance et de la rendre apte à recevoir des charges plus considérables, sans diminuer la marge de sécurité au point de vue de la tension. Il faudra en conséquence régler la force des armatures de telle sorte que le travail R demeure constant sous les charges croissantes que nous allons envisager. Mais si l'armature est simple, le travail à la compression S égal à

$$R\,\frac{\omega + 2\alpha}{\omega}$$

ira en grandissant au fur et à mesure que le rapport $\frac{\alpha}{\omega}$ s'élèvera.

« La marge de sécurité, au point de vue des compressions, va donc diminuer. Dans une certaine mesure, cette circonstance peut paraître sans inconvénient eu égard à l'aptitude spéciale du ciment pour ce genre de travail. Mais il ne faut rien exagérer, et il pourrait arriver un moment, où tout en ayant maintenu constant le travail d'extension, on aurait suffisamment rapproché le travail de compression de sa limite d'élasticité pour que le béton fût en danger de périr par écrasement. Il serait alors prudent et même nécessaire de recourir à l'armature double dissymétrique. A la limite, si le pourcentage du béton devient négligeable devant celui du fer, on doit retomber sur la poutre d'armature symétrique.

« En résumé :

« Si pour une poutre très peu chargée de métal, l'armature simple doit être considérée comme la meilleure solution, il semble d'autre part incontestable que l'armature double dissymétrique reprend l'avantage dès que le pourcentage de fer est notable ; l'on doit finalement aboutir à l'armature symétrique

quand le rôle du fer devient tout-à-fait prépondérant, la résistance du béton ne contribuant à la stabilité que dans une mesure jugée négligeable.

Efforts tangentiels développés dans le ciment. Liaisonnement des armatures. — « Le fer subissant un travail de compression ou d'extension plus grand que celui du ciment qui l'enrobe, dans le rapport de leurs coefficients respectifs d'élasticité, cette discontinuité détermine forcément dans la pièce hétérogène des actions tangentielles intenses, qui s'exercent entre les surfaces de contact des deux matières. En d'autres termes, l'effort tranchant qui correspond au moment de flexion de l'élément métallique est transmis par lui au ciment, qui peut de ce chef être détérioré par fissuration ou désagrégation. Il est permis de craindre que le fer ne se décolle de sa gangue et ne s'en sépare par un phénomène de glissement général. On conçoit de la sorte que les praticiens aient reconnu l'utilité de compléter les armatures par d'autres pièces métalliques ayant pour rôle d'augmenter la résistance de la poutre à l'effort tranchant.

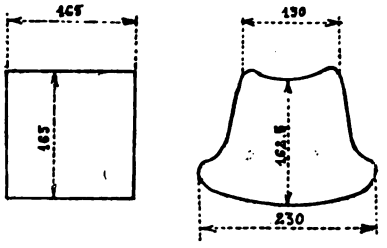


Fig. 75

« On peut relier une armature simple à la région comprimée de la poutre par des étriers (système Hennebique) formés d'un fer plat contourné en fer à cheval, qui enveloppe les tiges d'armature et a ses agrafes noyées dans le ciment comprimé. Mais il semble que l'on doive obtenir un résultat plus complet si l'on a deux armatures dont les fers pourront être réunis par des ceintures métalliques ou des réseaux de fils verticaux ou obliques. A priori le mieux paraît être de relier les armatures par une triangulation ou un treillis à éléments obliques susceptibles de transmettre l'effort tranchant dans *les mêmes conditions que s'il s'agissait d'une poutre exclusivement métallique.*

2° *La limite d'élasticité est dépassée dans le béton.*

Supposons maintenant que l'on fasse croître le moment de flexion de manière à dépasser la limite d'élasticité et à se rapprocher de la limite de rupture. L'axe neutre autour duquel s'est

effectuée la première rotation élémentaire se déplace vers la partie comprimée et la section transversale de la barre se déforme ; la partie tendue s'amincit et la partie comprimée se gonfle. La figure 75 représente d'après M. Considère la forme prise par une barre d'acier doux fléchie dans son plan vertical. L'axe neutre est venu au 69/100 de la hauteur. La figure 76 représente les efforts qui se produisent dans une barre métallique rectangulaire, où l'on a supposé l'axe neutre aux 2/3 de la hauteur entre la partie inférieure comprimée et la partie supérieure tendue. Les efforts sont donnés

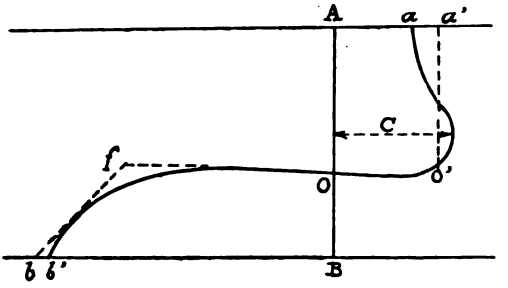


Fig. 76

par les ordonnées des courbes Ofb' (compression) et $OO'a$ (extension). La courbe $OO'a$ a été déduite d'expériences directes à la traction, la courbe Ofb' d'expériences de flexion conduites méthodiquement. Remplaçons ces courbes par les droites $OO'a$, et Ofb, ou $OO' = 9/10$ C ; $Of = OO'$ et $Bb = 1{,}15$ Bb'. Proposons-nous de déterminer Bb et le moment résistant de la section. On aura : 1° en égalant la somme des forces de compression à la somme des forces d'extension

$$\int_0^h y dx = \int_0^{\frac{2h}{3}} \frac{9}{10} C dx = \frac{3}{5} Ch$$

$$\int_0^{h'} y' dx' = \int_0^{\frac{h}{3}} \frac{1{,}15\ C' + 0{,}9\ C}{2} dx' = \frac{h}{6} (1{,}15\ C' + 0{,}9\ C)$$

d'où

$$\frac{h}{6} (1{,}15\ C' + 0{,}9\ C) = \frac{3}{5} Ch$$

et

$$C' = 2{,}35\ C.$$

2° En égalant le moment des forces extérieures X_c aux moments des forces extérieures

$$X_c = \int_0^{\frac{2h}{3}} 0{,}9\ Cx\,dx + \int_0^{\frac{h}{4}} \left[0{,}9\ C + (1{,}15\ C' - 0{,}9\ C)\frac{3x'}{h}\right] x\,dx$$

$$= 0{,}317\ Ch^2.$$

« Si la formule de la résistance des matériaux était applicable elle indiquerait pour le moment de rupture la valeur $\frac{Ch^2}{6}$, C étant la tension de la fibre supérieure A.

« Le moment vrai est donc égal au moment théorique multiplié par le coefficient de majoration $0{,}317 \times 6 = 1^k{,}90$. M. Considère a trouvé dans une expérience que ce rapport s'était élevé à 1,95.

Ce qui se passe pour le fer, la fonte et l'acier doit se passer aussi pour le béton et pour le béton armé. Le problème reviendra donc d'une manière générale.

1° A se donner une courbe de déformation (compression ou extension) par expérience directe et à déterminer l'autre par une série d'épreuves successives de flexion. On peut aussi se donner les 2 courbes de déformation.

2° Ces courbes connues, on déterminera l'axe neutre de façon à ce que la somme des efforts de compression soit égale à la somme des efforts d'extension.

3° On déterminera ensuite le moment résistant en égalant la somme des moments des forces extérieures à la somme des moments des forces intérieures.

Ce moment résistant pourra être soit le moment résistant limite qui permettra de déterminer le coefficient de sécurité de la pièce, soit le moment correspondant à un état d'équilibre donné.

La solution de ces problèmes dépend de la forme des courbes de déformation et de celle des sections; elle est purement mathématique et ne comporte pas de développements spéciaux.

Il semble par conséquent assez difficile d'établir pour le calcul des ouvrages en ciment armé une méthode sûre et pratique. Peut-être pourrait-on utiliser les premières formules développées en supposant que la limite d'élasticité du béton, tant à la tension qu'à la compression n'est jamais dépassée, à la condition d'admettre une limite de sécurité fictive, déduite d'une règle empirique qui serait par exemple de la forme

$$N = \frac{ai + bi' + C\frac{m^2\omega\omega'}{\Omega}}{I}$$

$$= \frac{ai + bi' + C\frac{m^2\omega\omega'}{\Omega}}{i + \frac{E'}{E}\left(i + \frac{m^2\omega\omega'}{\Omega}\right)}$$

« Les coefficients numériques a, b et c devraient être déterminés par expérience. Pour fixer les idées sur leurs ordres de grandeur respectifs, *mais uniquement dans ce but*, nous leur attribuerons ci-après des valeurs fixées arbitrairement dans l'hypothèse où la limite de sécurité N, pour le béton tendu, serait mesurée en kilogrammes par centimètre carré

$$N = \frac{6i + 500\left(i' + m^2\frac{\omega\omega'}{\Omega}\right)}{1 + 10\left(i' + m^2\frac{\omega\omega'}{\Omega}\right)}.$$

« Aucun raisonnement, aucune théorie ne peuvent dans cette matière suppléer aux indications de l'expérience. »

73. Théorie de M. Harel de la Noë. — Pas plus que M. Résal, M. Harel de la Noë, Ingénieur en chef des Ponts et chaussées, n'a entendu exposer une nouvelle méthode de calculs; il s'est contenté de développer certaines considérations [1], du plus haut intérêt, que nous croyons devoir résumer ici, comme suit :

« L'objection principale dirigée contre le sidero-ciment peut se

(1) Annales des Ponts et Chaussées, 1er trimestre 1899. Revue technique, 10 février 1899.

lement accompagné d'un effort de compression ou d'un effort d'extension. Examinons ce qui va se passer dans l'un ou l'autre de ces cas. Si au glissement qui a amené m en m' se joint une *compression* de la masse SS' qui a amené m' en m'' l'effort d'extension suivant Am'' sera plus petit que suivant Am'; la tension dans ce sens peut devenir nulle ou même négative; inversement, comme n' viendra en n'', l'effort suivant An de compression sera augmenté. Si la masse SS' au lieu d'être comprimée était tendue, *l'effort* Am *d'extension* serait augmenté et l'effort *de compression* suivant An serait diminué. Comme le ciment résiste beaucoup mieux à la compression qu'à l'extension, il y aura *lieu de redouter tout particulièrement les efforts de cisaillement dans les parties tendues.*

Des considérations théoriques permettent d'attribuer au coefficient de rupture par cisaillement, une valeur égale au 0,66 de la résistance à la traction. Il y aura donc lieu quand le travail au cisaillement, multiplié par le coefficient de sécurité atteindra cette valeur de renforcer les sections transversales par des armatures qui pourront être constituées par de petites barres triangulées ou par de simples liaisons transversales.

Les glissements des armatures métalliques dans leur gaine de ciment peuvent résulter de deux causes.

1° Un allongement brusque de l'armature.

2° Des efforts de traction développés par l'effort tranchant pour amener l'armature à suivre le même allongement que le ciment.

La première cause n'est à craindre que dans les parties centrales de la poutre et pour un travail de l'armature assez élevé, la deuxième cause se produit au contraire vers les appuis où l'effort tranchant est maximum. C'est elle qui est la plus à craindre dans la pratique. On la combat à l'aide des liaisons transversales et aussi en aplatissant les extrémités de l'armature, de façon qu'elles ne puissent glisser sans écraser le ciment.

Compression et traction. — Il résulte des expériences de M. le commandant Hartmann (v. p. 94) qu'en déformant une matière on observe à sa surface les traces des déformations intérieures. Toutes ces traces font un angle constant avec la direction de l'effort principal; la rupture tend naturellement à se produire

suivant des surfaces définies par ces traces, soit suivant des surfaces *d'égale pente.* On conçoit que si l'on peut s'opposer à ce mode naturel de rupture, on augmentera la résistance de la matière. On peut arriver à ce résultat par l'emploi de *frettes* extérieures ou, dans les agglomérats à base de ciment, par l'emploi d'armatures et de ligatures transversales. L'armature aura le double rôle d'augmenter la résistance longitudinale et de résister aux efforts de cisaillement. Les ligatures n'auront que ce dernier rôle, mais on conçoit qu'elles puissent le remplir beaucoup plus efficacement.

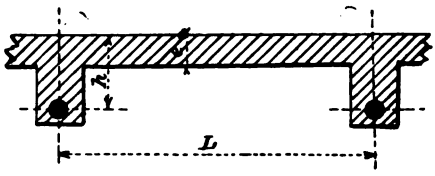


Fig. 78

Mode de calcul. — Il appelle : (voir fig. 78)

X, le moment fléchissant ;

P, l'effort tranchant ;

R, le travail du béton comprimé maximum } 600000 kilogr.
R', » » » dans le hourdis } au maximum

R°, la résistance par mètre carré du béton tendu 100000 kilogr. ;

φ, le travail du fer 8 kg. par mmq. ;

λ, le rapport du coefficient d'élasticité du fer tendu et du béton comprimé, valeur minima $\lambda = 6$;

h, la hauteur de la poutre comprise entre la face supérieure du hourdis et le centre de gravité de la barre d'armature ;

e, l'épaisseur du hourdis ;

ω, l'aire de l'armature ;

χ, son périmètre ;

L, la distance d'axe en axe des nervures ;

b, la largeur de la nervure ;

C, le coefficient $\frac{T}{bh}$, de l'effort tranchant par la section de la nervure.

Le travail de cisaillement sur la surface commune du béton et d'une armature métallique a pour expression $\frac{\omega}{\chi} = \frac{d\varphi}{dx}$

x représentant l'abscisse d'une section quelconque.

Le maximum de $\frac{d\varphi}{dx}$ dépend de la disposition des surcharges. Il

est beaucoup plus grand pour les surcharges discontinues que pour les surcharges uniformément réparties, mais en tous les cas la valeur de la fraction $\frac{\omega}{\chi}\frac{d\varphi}{dx}$ est inférieure à $\frac{P}{\chi h}$.

En conséquence le périmètre minimum de l'armature se calcule par la relation $\frac{P}{\chi h} = C$ (C étant la limite admise pour le travail du cisaillement fer sur béton).

M. Harel de la Noë conseille de prendre $C = R_0$.

Il suffit donc de vérifier si l'on a : $\chi > \frac{P}{R_0 h}$

La largeur b peut être prise égale à la valeur minima $\frac{P}{R_0 h}$.

S'il s'agit de fers ronds, on pose

$$\frac{c'}{\varphi} = \frac{d}{l}$$

c', effort de glissement;
φ, travail maximum du fer;
l, longueur de la poutre;
d, diamètre de l'armature.

Formule relative aux liaisons permettant de calculer l'effort tranchant dangereux

$$C = R_0 \frac{1}{2+\varepsilon} + \frac{2}{3}\pi \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{2+\varepsilon}$$

ε rapport entre l'allongement élastique maximum du métal et le raccourcissement élastique maximum du béton comprimé.

M. Harel de la Noë pose $\varepsilon = 3$.

π pourcentage du fer
j la limite d'élasticité du béton comprimé
F la limite d'élasticité du fer
C le quotient de l'effort tranchant par l'aire de l'âme au moment où la désagrégation de l'âme va se produire.

Posant :

$$\frac{1}{2+\varepsilon} = \frac{1}{5} = 0{,}20$$

$$\frac{2}{3}\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{2+\varepsilon} = \frac{2}{15}\sqrt{4} = 0{,}27$$

$$C = 0{,}20\, R_0 + 0{,}27\, j.$$

Admettant $j = 90$ kilog.

$$C = 0{,}20\ R_0 + 24{,}30$$

d'où l'on tire $C = 26$;
ce qui suppose $R_0 = 8^k{,}50$.

Le pourcentage π est inférieur à

$$\frac{2}{15}\frac{j}{F} = \frac{2}{15}\frac{900\,000}{18\,000\,000} = \frac{1}{150}.$$

Le pourcentage du volume des étriers $\frac{1}{150} = 0{,}006$ à $0{,}007$.

Si au lieu d'étriers, on emploie des armatures inclinées à 30° sur la verticale.

$$C = 0{,}39\ R - 0{,}18\ R_0 = 34 \text{ kilogrammes}$$

pour un pourcentage de 5 à $\frac{6}{1000}$.

Préparation ou vérification d'un projet :

(1) $$h = \frac{X + 2Le^2R}{LeR\ \frac{13}{16}\ p}.$$

(2) $$\omega = \frac{X}{\varphi h}$$

$$R = \frac{X + \frac{13}{16}\ Ph}{Le\ (h - 2e)}$$

$$\varphi = \frac{X}{\omega h}$$

avec la condition

(3) $$\frac{h}{e} > \frac{4}{5}\left(1 + \frac{\varphi}{\lambda R}\right)$$

Si cette condition n'est pas satisfaite

$$h = \frac{X}{\frac{2}{5}\ RLe - P} \qquad \varphi = 6R\left(\frac{5}{4}\frac{h}{e} - 1\right) \qquad \omega = \frac{X}{\varphi h}.$$

Moment de résistance d'une poutre

$$X = KRbh^2$$

K étant un coefficient qui dépend du pourcentage	π
0,13	0,003
0,15	0,007
0,16	0,010
0,185	0,020
0,206	0,060

$$\text{pour } \pi = 0{,}012 \qquad K = 0{,}167$$

$$X = Rbh^2 \times 0{,}167 = \frac{bh^2}{6} \times R$$

la poutre est considérée comme homogène pour $\pi = 0{,}012$.

Pour les hourdis :

$$X = KRe'^2 = \frac{1}{12}(S + \Delta e)\,L^2$$

L, écartement des nervures,

S surcharge par mètre carré,

Δe, poids mort, que l'on peut prendre comme première approximation égal à 200 kilogrammes,

e' la distance du centre des armatures à la face supérieure

$$(e - e') = 0{,}015$$

d'où :

$$\frac{e'}{L} = \sqrt{\frac{S + \Delta e}{12KR}} \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{\frac{S + 200}{12KR}}.$$

CHAPITRE V

—

RITTER — ASSOCIATION DES FABRICANTS DE CIMENT ALLEMANDS MELAN — P. PLANAT — FRITZ VON EMPERGER

74. Méthode de M. le Professeur Ritter (1). — M. W. Ritter, professeur au Polytechnicum de Zurich, a proposé la méthode suivante, qui est assez fréquemment employée.

La section hétérogène est ramenée à une section homogène fictive, en ajoutant à la section ciment la section fer amplifiée dans le rapport des coefficients d'élasticité correspondants et l'on détermine le centre de gravité et le moment d'inertie de la section homogène fictive d'après les procédés usuels de la résistance des matériaux, *en tenant compte de la partie tendue du béton.* Le moment d'inertie connu, permet de déterminer très facilement les modules de résistance respectifs $\frac{I}{v'}$ de la partie comprimée, de la partie tendue, et des armatures métalliques et par suite les taux de travail correspondants. Comme on trouve ainsi un taux de travail très élevé pour le béton tendu, il y a lieu de le considérer comme rompu, et de rechercher l'excédent de fatigue qui résulte de cette faillitte pour l'armature tendue. M. Ritter procède à cette recherche, en admettant que la fibre neutre ne s'est pas déplacée, qu'elle est restée à la même hauteur que dans la première hypothèse.

En résumé la méthode consiste *à calculer l'armature en négligeant complètement la résistance du béton tendu, mais en prenant pour axe neutre, celui qui résulte non seulement de la présence*

(1) Schweizerische Bauzeitung 1899. V et 7.

du béton comprimé et de l'armature, mais encore de la présence du béton tendu, prévu de section suffisante pour que son taux de travail ne dépasse pas la limite de résistance admissible.

D'après M. Ritter, le rapport des coefficients d'élasticité du fer et du ciment peut être pris égal à 10. L'effort de compression qu'il admet pour un dosage de 250 à 350 kilogrammes de ciment par mètre cube, est de 30 à 40 kilogrammes, cette dernière limite ne convenant que dans les cas dans lesquels les forces extérieures ne laissent place à aucune indétermination, et où il n'y a pas de charges susceptibles de produire des vibrations. La valeur limite de la résistance du béton à la traction est plus douteuse. D'après les connaissances usuelles, elle ne doit pas dépasser 15 à 20 kilogrammes par centimètre carré ; mais certains essais à la flexion la font ressortir à 30 et même 50 kilogrammes. Les expériences de M. Considère confirment la possibilité de telles valeurs. On pourra donc admettre que le taux de rupture du béton à l'extension est compris entre 30 et 40 kilogrammes, c'est-à-dire entre les mêmes limites que le taux de travail normal du béton comprimé.

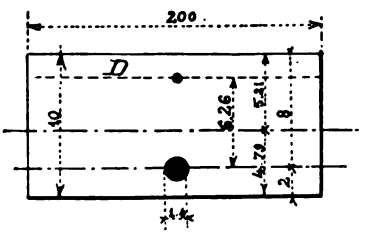


Fig. 79

Le taux de travail du fer pourra être porté à 11 et même 12 kilogrammes par millimètre carré, la majoration sur le chiffre usuel de 10 kilogrammes étant justifiée d'une part par le fait que les armatures ne subissent avant emploi aucun travail spécial (perçage) et de l'autre, par le concours que le béton apporte quand même à la résistance et à l'extension.

Les exemples suivants donnés par M. Ritter compléteront l'intelligence de ce résumé succinct [1].

Ier Exemple. — *Quels sont les efforts unitaires supportés par une dalle en béton armé chargée de* 2000 *kilogrammes par mètre carré, sur une portée de* 1m,50? L'épaisseur de cette dalle est de 10 centi-

[1] Toutes les cotes et dimensions sont exprimées en centimètres. M. Ritter fait remarquer qu'il serait plus exact d'amplifier 11 fois au lieu de 10, puisque l'on compte le béton sans déduction de l'armature.

mètres ; l'armature est formée de fers ronds de $1^{c},4$ de diamètre, espacés de 20 centimètres, et distants de 2 centimètres de l'arête inférieure (fig. 79).

Poids propre de la dalle : 250^{k} par mètre carré $= 0,10 \times 2500^{k}$.

Charge totale : $2000^{k} + 250^{k} = 2250^{k}$ par mètre carré.

Moment au milieu de la portée, en supposant un encastrement partiel aux extrémités, capable de réduire le moment relatif à une poutre reposant librement sur ses deux appuis.

$$M = \frac{pl^2}{10} = \frac{2250 \times \overline{1,5}^2}{10} = 506 \text{ kgm.} = 50600 \text{ cm.kg.}$$

(ceci pour une bande de 1 mètre de largeur ; pour une bande de $0^{m},20$, le moment serait de

$$M = 0,20 \times 50600 = 10120 \text{ cm.kg.}$$

Section réelle de l'armature : $F_e = \frac{\pi d^2}{4} = 1^{cm^2},54$.

Section fictive de la poutre homogène :

$$F = (20 \times 10) + 10 \times 1,54 = 200 + 15,4 = 215^{cm^2},4.$$

Moment statique des sections par rapport à l'arête supérieure de la dalle :

$$S = 200 \times \frac{10}{2} + 15,4 \times 8 = 1000 + 123 = 1123^{cm^3}.$$

Moment d'inertie I' *pris par rapport à la même arête,* en remarquant que l'on a successivement :

$$S = \frac{1}{2} bh^2 = \frac{Fh}{2} \quad \text{et} \quad I = \frac{bh^3}{3} = \frac{2Sh}{3}$$

$$I = \left(\frac{2}{3} \times 1000 \times 10\right) + (123 \times 8) = 6666 + 984 = 7650^{cm^4}$$

Distance S *de l'arête supérieure à l'axe neutre.*

$$S = \frac{S}{F} = \frac{1123}{215.4} = 5^{cm},21.$$

Moment d'inertie I_1 *par rapport à cet axe :*

$$I_1 = 7650 - 215{,}4 \times \overline{5{,}21}^2 = 1\,803^{cm4}.$$

Les efforts seront par suite répartis comme suit :
Sur l'arête supérieure comprimée :

$$\sigma_d = \frac{10\,120 \times 5{,}21}{1\,803} = 29^k \text{ par centimètre carré.}$$

Sur l'arête inférieure tendue :

$$\sigma_z = \frac{10\,120 \times 4{,}79}{1\,803} = 27^k \text{ par centimètre carré.}$$

Sur l'armature, dans l'hypothèse que l'on peut compter entièrement sur la résistance du béton à l'extension

$$\sigma_e = 10 \times \frac{10\,120 \times (4{,}79 - 2)}{1\,803} = 156^k \text{ par centimètre carré}$$

Dans l'hypothèse contraire, c'est-à-dire quand l'effort de tension est demandé uniquement au fer, le calcul des nouveaux efforts s'établit comme suit, en supposant que l'axe neutre est resté à la même place.

Le centre de compression D se trouve à une distance de l'axe neutre égale aux 2/3 de la hauteur de la partie comprimée (soit à 1/3 de l'arête supérieure). Le centre de traction z de l'armature, peut, sans grande erreur être supposé à son centre de gravité. La distance de ces deux points est par suite :

$$D_z = 10 - 1{,}74 - 2 = 6^{cm},26$$

et l'effort de traction z dans le fer est :

$$z = \frac{10\,120}{6{,}26} = 1\,617 \text{ kilogrammes}$$

Le taux de travail de l'armature est donc :

$$\sigma_z = \frac{1\,617}{1{,}54} = 1\,050^k \text{ par centimètre carré.}$$

Pour être tout à fait exact, il faudrait recalculer dans cette dernière hypothèse, l'effort de compression dans le béton ; le calcul s'établirait comme suit :

Effort moyen

$$R = \frac{1617}{20 \times 5,21} = 15^k,5 \text{ par centimètre carré}$$

Effort maximum dans la fibre extrême

$$\sigma_z = 2 \times 15,5 = 31^k \text{ par centimètre carré.}$$

Comme cette valeur diffère assez peu de la première, on peut se contenter des résultats du premier calcul, et l'on aura en résumé :

Effort de compression dans le béton $= 29^k$ par centimètre carré.
» d'extension » $= 27$ »
» d'extension maximum dans l'armature $= 1050^k$ par centimètre carré.

Ces 3 valeurs peuvent être considérées comme acceptables.

Le calcul ci-dessus suppose la section de la dalle connue. Si tel n'est pas le cas, on pourrait, pour une première approximation supposer l'axe neutre au milieu de la section, puis calculer sa hauteur par la formule :

$$h = \sqrt{\frac{6M}{\sigma_\alpha b}}$$

tirée de l'équation :

$$M = \frac{\sigma_\alpha b h^2}{6}.$$

On calculerait la section de l'armature par la formule :

$$F_e = \frac{M}{\sigma_\alpha \left(\frac{5}{6} h - e\right)}$$

dans laquelle e est la distance de l'axe neutre de l'armature à l'arête inférieure. On refera ensuite les calculs exacts, tel qu'il a été exposé ci-dessus.

On aurait pu supposer que les efforts de compression, au lieu de décroître suivant une ligne droite, comme les déformations, augmentent proportionnellement aux ordonnées d'une parabole BN (v. fig. 80). Cette hypothèse est peut-être plus exacte vers la rupture que la précédente. Nous allons voir néanmoins que les résultats de cette nouvelle hypothèse diffèrent assez peu des premiers pour que ceux-ci puissent être considérés comme suffisants.

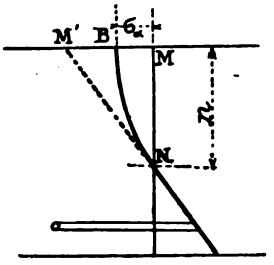


Fig. 80

Pour simplifier les calculs, on supposera que la parabole des compressions a son sommet en B et est tangente en N; soit b la largeur de la dalle considérée et n la distance de la fibre neutre à la fibre extrême. On aura :

Effort de compression dans le béton : $D = \frac{2}{3}\sigma_d bn$.

Effort de tension dans l'armature : $Z = \sigma_e F_e$.

Et comme $BM = \frac{MM'}{2}$ en vertu des hypothèses faites sur la constitution de la parabole

$$\frac{E}{E_f} \times \frac{2\sigma_d}{\sigma_e} = \frac{n}{h - n - e}.$$

D'où en égalant les efforts d'extension et ceux de compression

$$bn^2 = \frac{3E_l}{E} F_e(h - n - e).$$

Le centre de compression (qui n'est autre que le centre de gravité de la parabole) se trouvant à une distance de l'arête supérieure égale à $\frac{3}{8}n$, on aura :

$$D = Z = \frac{M}{h - \frac{3}{8}n - e}$$

et finalement

$$\sigma_d = \frac{3D}{2bn}$$

$$\sigma_e = \frac{Z}{F_e}.$$

On aura donc dans l'exemple ci-dessus :

(1) $$20n^2 = 3 \times 10 \times 1{,}54(10 - n - 2)$$

d'où

$$n = 3^{cm},30$$

(2) $$D = Z = \frac{10120}{10 - 1{,}24 - 2} = 1497^k$$

(3) $$\sigma_d = \frac{3 \times 1497}{2 \times 20 \times 3{,}3} = 34^k \text{ par cm}^2$$

(4) $$\sigma_e = \frac{1497}{1{,}54} = 972^k \text{ par cm}^2.$$

On avait trouvé précédemment $\sigma_d = 29$ kilogrammes et $\sigma_e = 1050$. La différence n'est pas importante en présence de l'incertitude sur la valeur du rapport $\frac{E_f}{E}$.

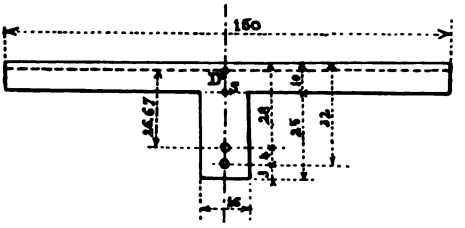


Fig. 81

Deuxième Exemple. — *Quels sont les efforts produits par une surcharge de* 2000 *kilogrammes par mètre carré, sur une poutre à simple té de* $3^m,20$ *de portée, dimensions de l'aile* 150 × 10, *de la nervure* 25 × 16, *armatures* 2 *barres rondes de* 28 *millimètres superposées dont les axes se trouvent à* $0^m,03$ *et* $0^m,07$ *de l'extrémité inférieure de la nervure ?* (fig 81).

Poids propre 500^k. Surcharge $2000^k \times 1{,}50 = 3000^k$.
Charge totale 3500^k.

Moment maximum au milieu de la poutre, dans l'hypothèse d'un encastrement partiel sur les appuis.

$$M = \frac{pl^2}{10} = \frac{3500 \times \overline{3{,}2}^2}{10} = 3584 \text{ kgm.} = 358400 \text{ kg. cm.}$$

Section de chaque barre :

$$\frac{3,14 \times \overline{2,8}^2}{4} = 6^{cm2},2$$

En procédant comme plus haut, on a successivement en supposant $\frac{E_f}{E} = 10$.

Surface fictive

$$F = 16 \times 35 + 134 \times 10 + 10 \times 6,2 + 10 \times 6,2$$
$$F = 560 + 1340 + 62 + 62 = 2024^{cm2}.$$

Moment statique

$$S = \left(560 \times \frac{35}{2}\right) + \left(1340 \times \frac{10}{2}\right) + (62 \times 28) + (62 \times 32)$$
$$S = 9800 + 6700 + 1786 + 1984 = 20220^{cm3}.$$

Moment d'inertie par rapport à l'arête supérieure.

$$I = 9800 - \frac{2}{3} \times 35 + 6700 \times \frac{2}{3} \times 10 + 1736 \times 28 + 1984 \times 32$$
$$I = 228667 + 44667 + 48608 + 63488 = 385430^{cm4}$$

Distance de la fibre neutre à l'arête supérieure

$$s = \frac{20220}{2024} = 10 \text{ centimètres.}$$

Moment d'inertie par rapport à un axe passant par la fibre neutre

$$I_s = 385430 - 2024 \times \overline{10}^2 = 183030^{cm4}.$$

On aura par suite :

Effort de compression dans le béton :

$$\sigma_d = \frac{10 \times 358400}{183030} = 20 \text{ kilogrammes par centimètre carré}$$

Effort de tension dans le béton :

$$\sigma_z = \frac{25 \times 358400}{183030} = 49 \text{ kilogrammes par centimètre carré.}$$

Distance du centre des compressions au centre des tensions :

$$z = 35 - \frac{10}{3} - 5 = 26^{cm},67.$$

Effort total d'extension dans les armatures

$$\sigma_z = \frac{358400}{26,67} = 13440 \text{ kilogrammes.}$$

Taux de travail à l'extension dans les armatures

$$\sigma_e = \frac{13440}{2 \times 6,2} = 1084 \text{ kilogrammes par centimètre carré.}$$

L'effort dans l'armature inférieure est sensiblement plus grand que celui indiqué ci-dessus ; on procèdera plus exactement en désignant par σ'_e le taux de travail moyen dans la première armature et par σ'_e celui relatif à l'armature la plus éloignée de la fibre neutre

$$\frac{\sigma'e}{\sigma'e} = \frac{35 - 10 - 7}{32 - 10 - 3} = \frac{18}{22} = 0,82.$$

On a de même

$$z' = 24,67 \qquad \text{et} \qquad z = 28,67.$$

Or :

$$\sigma'_e F_e z' + \sigma_e F_e z = M$$

d'où en remplaçant σ'_e par 0,82 σ_e

$$\sigma_e = 11.82 \text{ kilogrammes par centimètre carré.}$$

Quand la section de la poutre n'est pas connue, on la calcule au moyen d'une première approximation en prenant pour axe neutre l'arête intérieure du hourdis.

Enfin on aurait eu les résultats suivants dans la double hypo-

thèse de la rupture du béton tendue et de la répartition des efforts de compression suivant les ordonnées d'une parabole

(1) $150 n^2 = 3 \times 10 \times 12{,}4\ (35 - n - 5)$

$n = 7{,}47$ centimètres carrés.

(2) $Z = D = \dfrac{358\,400}{35 - 2{,}8 - 5} = 13\,176$ kilogrammes.

(3) $\sigma_d = \dfrac{3 \times 13\,176}{2 \times 150 \times 7{,}47} = 18$ kilog. par cent. carré.

(4) $\sigma_e = \dfrac{13\,176}{12{,}4} = 1\,063$ kilogrammes par centimètre carré.

Les différences trouvées n'ont pas une grande importance.

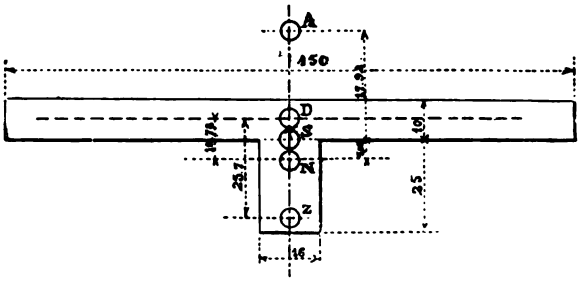


Fig. 82

Troisième exemple. — *La poutre à simple té considérée ci-dessus, est sollicitée, en outre du moment de* 3 584 *kilogrammètres qui a été défini plus haut, par une compression normale* P *de* 20 000 *kilogrammes, ou, ce qui revient au même, par une force unique de* 20 000 *kilogrammes appliquée en un point* A *d* 0,1792 *du centre de gravité* S *de la poutre; on demande les taux de travail des matières* (fig. 82).

On a, en superposant les efforts :

Compression dans le béton

$$\sigma_d = \frac{sM}{I} + \frac{P}{F} = \frac{10 \times 358\,400}{183\,030} + \frac{20\,000}{2\,024} = 30 \text{ kg. par centim. carré.}$$

Extension dans le béton

$$\sigma_z = \frac{25 \times 358\,400}{183\,030} - \frac{20\,000}{2\,024} = 49 - 10 = 39 \text{ kg. par centim. carré.}$$

La position de la fibre neutre est déterminée par la formule

$$SN = \frac{I}{F \times AS} = \frac{183\,030}{2\,024 \times 17{,}92} = 5{,}05 \text{ centimètres.}$$

Le centre de compression de la partie comprimée qui s'étend jusqu'à l'horizontale passant par N se détermine comme suit :

Section comprimée :

$$F = 150 \times 15.05 - 134 \times 5{,}05 = 2\,258 - 677 = 1\,581 \text{ cm}^2.$$

Moment statique :

$$S = 2\,258 \times \frac{15{,}05}{2} - 677 \times \frac{5{,}05}{2} = 16\,991 - 1\,709 = 15\,281 \text{ cm}^3.$$

Moment d'inertie :

$$I = 16\,991 \times \frac{2 \times 15{,}05}{3} - 1\,709 \times \frac{2 \times 5{,}05}{3} = 170\,496 - 5{,}753$$

$$= 164\,723 \text{ cm}^4.$$

d'où l'on déduit :

$$DN = \frac{164\,723}{15\,282} = 10{,}78 \text{ centimètres.}$$

$$AD = 17{,}92 + 5{,}05 - 10{,}78 = 12{,}19 \text{ centimètres.}$$

$$DL = 35 - 5 - 10 + 10{,}78 = 25{,}73 \text{ centimètres.}$$

Et comme l'on a, en prenant les moments par rapport au point D

$$P \times AD = Z \times Dz.$$

On en déduit :

$$Z = \frac{20\,000 \times 12{,}19}{25{,}73} = 9\,475 \text{ kilogrammes.}$$

D'où

$$\sigma_e = \frac{9\,475}{2 \times 6{,}2} = 7{,}64 \text{ kilogrammes par centimètre carré.}$$

Quatrième exemple. — *Une poutre rectangulaire de* 0m,20 *de largeur, de* 0m,10 *de hauteur est munie de deux barres d'égale section* (0,77 *centimètre carré*) *à* 2 *centimètres de distance, l'une de l'arête supérieure, l'autre de l'arête inférieure ; on demande les taux de travail des matières pour un moment de* 10 120 *kilogrammes-centimètres* (*fig.* 83).

L'axe neutre passant par le milieu de la poutre, on a :

$$I = \frac{20 \times \overline{10}^3}{12} + 10 \times 2 \times 0,77 \times \overline{3}^2 = 1\,666 + 139 = 1\,805 \text{ cm}^4.$$

Les efforts de compression et d'extension sont égaux dans ce cas particulier :

$$\sigma_d = \frac{5 \times 10\,120}{1\,805} = 28 \text{ kilogrammes par centimètre carré.}$$

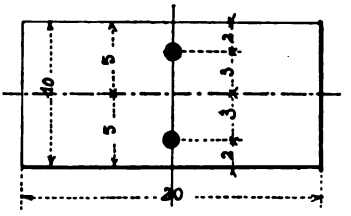


Fig. 83

La distance z qui sépare le centre de compression du centre d'extension a pour valeur

$$z = 10 - 2 - \frac{5}{3} = 6,33 \text{ centimètres.}$$

L'effort total d'extension dans le fer est par suite

$$z = \frac{10\,120}{6,33} = 1\,599 \text{ kilogrammes.}$$

et l'effort par centimètre carré

$$\sigma_e = \frac{1\,599}{0,77} = 20,77 \text{ kilogrammes.}$$

Cet effort étant notablement trop élevé, il y a lieu d'augmenter l'armature.

CINQUIÈME EXEMPLE. — *On suppose que l'on remonte dans le hourdis une des deux armatures (la plus élevée) prévue dans le deuxième et le troisième exemple ; la poutre ainsi constituée est sollicitée par un moment négatif de* 358400 *kilogrammes-centimètres. On demande les taux de travail des matières (fig.* 84).

$$F = (16 \times 35) + (134 \times 10) + 10 \times 6{,}2 + 10 \times 6{,}2$$

$$= 560 + 1\,340 + 62 + 62 = 2\,024 \text{ centimètres.}$$

$$S = \left(560 \times \frac{35}{2}\right) + \left(1\,340 \times \frac{10}{2}\right) + (62 \times 32) + (62 \times 3)$$

$$= 9\,800 + 6\,700 + 1\,984 + 186 = 18\,670 \text{ centimètres carrés.}$$

$$I = \left(9800 \times \frac{2 \times 35}{3}\right) + \left(6700 \times \frac{2 \times 10}{3}\right) + (1\,984 \times 32) + (186 \times 3).$$

$$= 228\,667 + 44\,667 + 63\,488 + 588 = 337\,380 \text{ cm}^4.$$

$$s = \frac{18\,670}{2\,024} = 9{,}22 \text{ centimètres.}$$

$$I_s = 337\,380 - 2\,024 \times 9{,}22 = 165\,323 \text{ cm}^4.$$

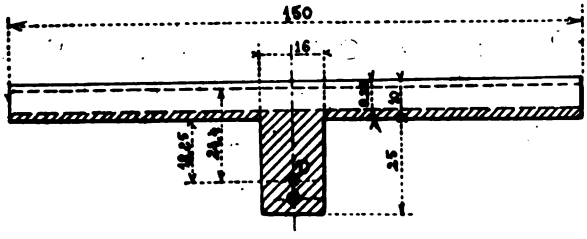


Fig. 84

Les efforts maxima sont :

Compression dans le béton

$$\sigma_d = \frac{25{,}78 \times 358\,400}{165\,323} = 56 \text{ kilogrammes par centimètre carré.}$$

Extension dans le béton

$$\sigma_s = \frac{9{,}22 \times 358\,400}{165\,323} = 20 \text{ kilogrammes par centimètre carré.}$$

Pour déterminer le centre des compressions dans la partie compressive, on calculera :

$$F' = (16 \times 25,78) + (134 \times 0,78) + (10 \times 6,2)$$
$$= 412 + 104 + 62 = 578 \text{ centimètres carrés.}$$

et par rapport à la fibre neutre

$$S' = \left(412 \times \frac{25,78}{2}\right) + \left(\frac{104 \times 0,78}{2}\right) + (62 \times 22,78)$$
$$= 5311 + 41 + 1412 = 6764 \text{ centimètres cubes.}$$

$$I' = (5311) + \left(\frac{2}{3} \times 25,78\right) + \left(41 \times \frac{2}{3} \times 0,78\right) + (1412 \times 22,78)$$
$$= 91278 + 21 + 32166 = 126465 \text{ cm}^4.$$

$$DS = \frac{123465}{6764} = 18,25 \text{ centimètres.}$$

La distance entre les centres de compression et d'extension est par suite :

$$z = 9,22 + 18,25 - 3 = 24,47$$

L'effort de traction total étant de

$$Z = \frac{358400}{24,47} = 14645 \text{ kilogrammètres.}$$

Le taux de travail ressort à

$$\sigma_e = \frac{14645}{6,2} = 2362 \text{ kilogrammes par centimètre carré.}$$

Comme dans l'exemple précédent, l'armature est trop faible.

Efforts tranchants. — La poutre à simple té étudiée dans l'exemple n° 2. supporte des efforts tranchants dont le maximum se trouve au droit des appuis. Ce maximum a pour valeur :

$$Q = \frac{1}{2} \times 3500 \times 3,2 = 5600 \text{ kilogrammes.}$$

L'effort maximum, par unité de section, τ. se produit vers la fibre neutre et a pour valeur :

$$\tau = \frac{Q}{tz},$$

formule dans laquelle t représente la largeur de la pièce au droit de la fibre neutre, et z la distance qui sépare le centre de compression de celui d'extension.

Dans l'exemple (2), on a :

$$\tau = \frac{5\,600}{2 \times 16 \times 26.67} = 13 \text{ kilogrammes par centimètre carré.}$$

Cet effort est assez élevé pour être dangereux ; il y aurait donc lieu d'élargir la section ou de prévoir des armatures verticales.

M. Ritter est d'avis que le rôle de ces armatures, attaches ou étriers, est plutôt d'augmenter la résistance du béton dans la direction des efforts de plus grande tension et par suite d'empêcher la formation des fissures prématurées (1).

Calcul des piliers. — M. Ritter calcule comme suit les efforts produits par les charges sur des piliers.

On amplifie la section des armatures dans le rapport de $\frac{E_f}{E} = 10$, et on l'ajoute à la section du béton ; le quotient de la charge par la section fictive donne le taux de travail du béton ; le taux de travail du métal est 10 fois plus grand.

Dans les piliers d'une certaine hauteur, il y a lieu de tenir compte du danger de flexion par compression et par suite, il convient de réduire le taux admissible 30 à 35 K dans une certaine proportion, définie par la formule de Rankine. On aura en désignant par σ_K le taux de travail à la compression permis pour une barre dont la longueur est l, le plus petit rayon de gyration i étant égal à $\sqrt{\frac{\Gamma}{F}}$,

$$\sigma_K = \frac{\sigma}{1 + 0{,}0001 \left(\frac{l}{i}\right)^2}.$$

Quand le pilier est en partie encastré à ses extrémités, la longueur libre l qui entre dans cette formule est d'environ les 3/4 de la longueur totale.

Application. — Effort que peut supporter un pilier à section

(1) Cette opinion a été confirmée par les toutes récentes expériences de la Commission du Ciment armé.

carrée de $0^m,40$ de côté, armé de 4 barres rondes de 36 millimètres de diamètre ; longueur totale $7^m,20$. Taux de travail permis : 30 kilogrammes par centimètre carré (fig. 85).

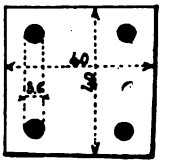


Fig. 85

On a :

Section fictive

$$= \overline{40}^2 + 10 \times \frac{4\pi \times \overline{3,6}^2}{4} = 1\,600 + 407 = 2\,007 \text{ cm}^2.$$

Moment d'inertie

$$I = \frac{\overline{40}^4}{12} + 407 \times \overline{15}^2 = 213\,333 + 91\,575 = 304\,908 \text{ cm}^4.$$

Rayon de giration

$$i = \sqrt{\frac{304\,908}{2\,007}} = 12,3 \text{ centimètres.}$$

Longueur libre

$$l = \frac{3}{4} \times 720 = 540 \text{ centimètres.}$$

Effort permis

$$\sigma_K = \frac{30}{1 + 0,0001 \times \left(\frac{540}{12,3}\right)^2} = 25 \text{ kilog. par cm}^2.$$

Effort cherché

$$P = 25 \times 2\,007 = 50\,175 \text{ kilogrammes.}$$

75. Association des Fabricants allemands de Ciment [1]. — Les lois de la déformation des ciments, mortiers et bétons

[1] D'après la brochure de 1902.

de ciment soumis à la compression ont été étudiées récemment par C. Bach et permettent de déterminer la stabilité des ouvrages en ciment armé. L'auteur s'en tient cependant à sa théorie première d'après laquelle le béton ne doit supporter que des efforts de compression et non des efforts d'extension lesquels doivent être équilibrés uniquement par l'armature dont la section sera prévue largement à cet effet. Il résulte de cette hypothèse non seulement une plus grande marge de sécurité, mais encore une simplification considérable des calculs, deux avantages recherchés par les constructeurs.

Compression. — *a*) *Compression axiale.* — On considère un prisme en béton de section F_b, armé de barres parallèles à sa longueur et de section cumulée F_e, soumis à une compression P uniformément répartie sur toute la section et l'on suppose que la section transversale est suffisamment grande par rapport à la hauteur du prisme, pour qu'il n'y ait pas à craindre d'efforts de flambage ; les seuls efforts à équilibrer sont des efforts longitudinaux se répartissant uniformément aussi bien sur le béton que sur les armatures. Dans ces conditions les lois de déformations du béton et du fer permettent de déterminer les taux de travail des deux matières.

Si l'on désigne par α et β les affaissements par mètre de longueur sous l'unité d'effort du béton et du fer, par σ_b et σ_e, les taux de travail du béton et du fer, on a :

$$\alpha \sigma_b^m = \beta \sigma_e$$

et si l'on admet approximativement $m = 1$

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_e} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Le rapport des travaux du béton et du fer est donc indépendant de la grandeur de la section ; ces travaux sont inversement proportionnels aux affaissements par mètre de longueur sous l'unité d'effort, en d'autres termes, plus une des matières est compressible par rapport à l'autre, et moins elle subit de fatigue par rapport à cette dernière.

Les fractions de l'effort total relatives aux sections F_b et F_e, sont respectivement $\sigma_b F_b$ et $\sigma_e F_e$; en se rapportant à l'équation précédente, on a donc :

$$\frac{\sigma_b F_b}{\sigma_e F_e} = \frac{\beta F_b}{\alpha F_e}.$$

Ces fractions donc proportionnelles aux sections des matières et inversement proportionnelles aux coefficients d'affaissement. En d'autres termes le corps le plus compressible cédant plus facilement à l'effort, subit un effort unitaire moindre.

On admet pour le fer $\beta = \frac{1}{2000000}$ et pour le mortier de ciment au dosage de 1 : 4,5, $\alpha = \frac{1}{230000}$; d'où $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{23}{200} = \frac{1}{9}$ en nombre rond, et par suite :

$$\frac{\sigma_b F_b}{\sigma_e F_e} = \frac{1}{9}\frac{F_b}{F_e}.$$

Si les deux matières étaient également compressibles, on aurait $\frac{\beta}{\alpha} = 1$ et non $\frac{1}{9}$, et l'effort de compression se répartirait simplement d'après les sections prévues pour le béton et pour le fer, mais comme le fer est environ 9 fois plus rigide, il faut le soumettre à un taux de compression 9 fois plus fort pour qu'il subisse la même déformation.

On posera :

$$\sigma_b F_b + \sigma_e F_e = P \qquad \text{et} \qquad \frac{\alpha}{\beta} = n$$

d'où :

$$(12) \qquad \sigma_b = \frac{P}{F_b + nF_e} \qquad \text{et} \qquad \sigma_e = \frac{P}{F_e + \frac{1}{n} F_b}.$$

Autrement dit on obtient le taux de travail du béton en remplaçant le fer par une section de béton n fois plus grande, et le taux de travail du fer en remplaçant la section de béton par une section de fer n fois plus petite.

Compression excentrique. — Quand l'effort ne coïncide pas avec l'axe de la pièce, il y a lieu de considérer en outre le moment de

flexion P_e, comme il a été indiqué pour le béton (p. 107). Il y a lieu d'ajouter comme il a été dit aux efforts de compression calculés d'après (12), les compressions et extensions résultant du moment de flexion P_e.

Extension. — Du moment que l'on ne veut pas tenir compte du concours apporté par le béton à la résistance à l'extension, on attribuera toute la fatigue au fer d'après la relation

$$\sigma_e = \frac{P}{F_e}. \tag{13}$$

Flexion. — Se reportant aux considérations développées pour le béton, il suffit d'ajouter l'effet des armatures et de négliger la résistance du béton à l'extension.

Supposons que le corps soit armé à la fois du côté tendu et du côté comprimé, parallèlement à l'axe longitudinal de ce dernier. Soient (fig. 86) F_e et F_e' les sections des barres cumulées d'armatures, assez petites par rapport à la section du corps en béton pour que l'on puisse admettre les efforts de tension ou de compression que ces barres subissent soient uniformément réparties sur toute l'étendue de la section. Soit σ_e, σ_e' les taux de travail du fer à l'extension et à la compression, ω, ω' les distances à l'axe neutre de leurs points d'application ; leurs moments de résistance $\sigma_e F_e \omega$ et $\sigma_e' F_e' \omega'$ agiront de manière à faire tourner les fibres dans le même sens.

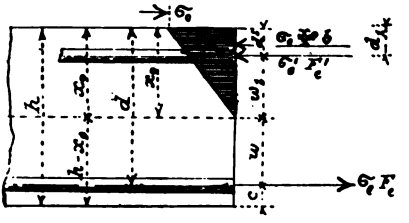


Fig. 86

Si l'on admet la simplification de la loi des déformations, considérée approximativement comme représentée par une droite, comme il a été dit pour le béton, ce qui augmente la sécurité, on aura comme moment résistant total :

$$M = \frac{\sigma_0 x_0}{2} b \times \frac{2}{3} x_0 + \sigma_e F_e \omega + \sigma_e' F_e' \omega'$$

ou

$$M = \frac{\sigma_0 x_0^2}{3} b + \sigma_e F_e (d - x_0) + \sigma_e' F_e' (x_0 - d') \tag{1}$$

en appelant d et d' les distances respectives des centres de gravité des armatures à l'arète supérieure du corps.

La détermination des 4 inconnues σ_0, σ_e, σ_e' et x_0, exigent 3 autres relations.

Une est donnée par l'égalité des efforts d'extension et de compression :

$$\sigma_e F_e = \frac{\sigma_0 x_0}{2} b + \sigma_e' F_e'. \tag{2}$$

Les deux autres résultent des lois de la déformation, savoir :

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_e'} = \frac{d - x_0}{x_0 - d'}; \tag{3}$$

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_0} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{d - x_0}{x_0}. \tag{4}$$

Ces 4 équations permettent de déterminer les 4 inconnues susmentionnées.

Dans la plupart des cas, on se borne à n'armer que la partie tendue ; les quantités F_e', σ_e', ω', d' disparaissent des équations ci-dessus, il ne reste que 3 inconnues et 3 équations :

$$M = \frac{\sigma_0 b x_0^2}{3} + \sigma_e F_e (d - x_0) \tag{1}$$

$$\sigma_c F_e = \frac{\sigma_0 x_0}{2} b \tag{2}$$

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_0} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{(d - x_0)}{x_0} \tag{3}$$

et remplaçant le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ par n, on tire des deux dernières équations

$$x_0 = \frac{F_e}{b} \left(\sqrt{1 + \frac{2bd}{nF_e}} - 1 \right) \tag{14}$$

et des deux premières

$$\sigma_0 = \frac{2M}{b x_0 \left(d - \frac{1}{3} x_0 \right)} \tag{15}$$

et de l'équation (2)

$$(16) \qquad \sigma_e = \sigma_0 \frac{bx_0}{2F_e} = \frac{M}{F_e\left(d - \frac{1}{3}x_0\right)}.$$

Les relations (15) et (16) auraient pu être trouvées directement d'après la figure 86 en songeant que $\sigma_0 \frac{bx_0}{2}$ et $\sigma_e F_e$ représentent les efforts totaux de compression et de traction, que $\frac{d - x_0}{3}$ représente le bras de levier de la force dont le moment doit faire équilibre au moment de sollicitation.

Il ressort en outre de l'équation (2) mise sous la forme $\frac{\sigma_e}{\sigma_0} = \frac{bx_0}{2F_e}$, que pour un même rapport $\frac{\sigma_e}{\sigma_0}$, la position de la fibre neutre est d'autant plus basse, à largeur b égale que la section du fer est plus grande.

Cisaillement. — Quand un prisme de béton, de section F_b de béton et F_e d'armature est sollicité par un effort de cisaillement direct Q parallèle à une section transversale de ce prisme, on peut admettre que cet effort se répartit uniformément dans chacune des sections des deux matières, d'après une loi analogue à celle qui a été énoncée pour les efforts de compression. Si donc les résistances élastiques du béton et du fer sont dans le rapport n, on aura pour les taux de travail au cisaillement :

$$\tau_b = \frac{Q}{F_e + nF_e} \qquad \text{et} \qquad \tau_e = \frac{Q}{F_e + \frac{1}{n}F_b}.$$

Dans la flexion le cisaillement peut se produire soit au droit de l'axe neutre du corps, soit le long de la surface de contact des armatures avec le béton. Dans les deux cas le cisaillement commence tout d'abord vers les appuis au droit desquels la force transversale est maxima.

Le calcul ne diffère pas essentiellement de celui qui a été donné pour le béton non armé (v. p. 61). On a trouvé sur l'appui la relation $Da = A \times 1{,}00$.

Pour la valeur de a, il y a lieu d'introduire la valeur connue de $\frac{x_0}{3}$ (voir fig. 87).

$$D = \frac{A \times 1{,}00}{a - \frac{x_0}{3}}.$$

Le taux de travail maximum de cisaillement sera donc évidemment au droit de la fibre neutre pour une largeur b

$$(20) \qquad \tau = \frac{D}{1{,}00 \times b} = \frac{A \times 1{,}00}{\left(d - \frac{x_0}{3}\right) b \times 1{,}00} = \frac{3A}{(3d - x_0)\, b}.$$

L'effort vertical τ', lié à τ sera égal à τ.

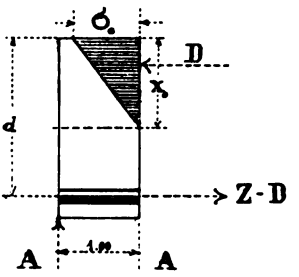


Fig. 87

Le taux de résistance au glissement, ou l'adhérence de la barre métallique s'obtiendra en divisant par la surface de contact de l'armature l'effort d'extension Z = D. Si donc on représente par u la surface totale de contact des armatures tendues, et par τ_u le taux de glissement par unité de surface des armatures, on aura :

$$u \times 1{,}00 \times \tau_u = Z = D$$

d'où

$$(20) \qquad \tau_u = \frac{3A}{(3d - x_0)\, u}.$$

Flexion composée avec une compression axiale sans crainte de flambage (*voutes*). — Bien qu'une disposition dissymétrique de

l'armature n'empêche pas la compression totale de se répartir uniformément, le point m d'application de la compression axiale P ne coïncide pas avec le centre de gravité s du béton (lequel peut être sans erreur sensible remplacé par le centre de gravité de l'ensemble du béton et de l'armature quand la section de cette dernière est relativement faible). La valeur de cette déviation e est donnée par l'équation (v. fig. 88)

$$P_e = \sigma_e F_e e$$

et d'après une remarque faite déjà pour le béton (v. p. 108)

$$\sigma_e = \frac{P}{F_e + \frac{1}{n} F_b}$$

$$e = \frac{c}{1 + \frac{1}{n} v}$$

si l'on exprime par v le rapport $\frac{F_b}{F_e}$.

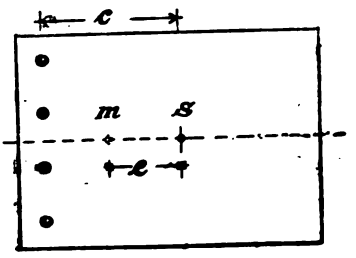


Fig. 88

Une compression axiale P ayant son point d'application en s produit donc en dehors des compressions totales uniformément réparties un moment de flexion P_e qu'il y a lieu d'ajouter aux moments de flexion déjà trouvés. Dans le calcul des voutes, il faut donc augmenter de e le bras de levier des efforts tangentiels pris par rapport à l'axe moyen de la voute.

Se reportant aux considérations développées pour le béton, on a par suite :

$$\sigma_b = \frac{2M + P_e j}{bx_0\left(d - \frac{1}{3}x_0\right)} + \frac{P}{F_b + nF_e} \tag{21}$$

pour la compression totale

$$\sigma_e = \frac{M + P_e}{F_c\left(d - \frac{1}{3}x_0\right)} - \frac{P}{F_c + \frac{1}{n}F_b} \tag{22}$$

pour la tension du fer.

Si l'on a prévu des armatures F'_e également du côté comprimé, on trouvera de la même façon, décrite plus haut

$$\sigma_b = \sigma'_b + \frac{P}{F_b + n(F_e + F'_e)} \tag{23}$$

$$\sigma_e = \sigma'_e - \frac{P}{(F_e + F'_e) + \frac{1}{n}F_b}. \tag{24}$$

Compression avec danger de flambage (poteaux). — La formule bien connue d'Euler donne pour une matière homogène

$$P = \frac{r}{s}\,\frac{1}{\alpha}\,\frac{In^2}{l^2}$$

l représente ici la longueur axiale du prisme comprimé, I, le plus petit des moments d'inertie de la section, s, un coefficient de sécurité, r, un coefficient dépendant de la nature de la matière, et α, comme plus haut la déformation par mètre de longueur sous l'unité de compression.

Pour un prisme de béton armé longitudinalement de barres de fer, α est pour le béton ce que β est pour le fer ; I_b et I_e sont les parties du plus petit moment d'inertie relatives respectivement aux sections de béton et de fer, dont les centres de gravité sont supposés coïncider.

On aura soin de prévoir des liaisons métalliques transversales entre les barres métalliques à faible distance les unes des autres, de manière que la position relative de ces dernières puisse être considérée comme immuable ; dans ces conditions on pourra supposer que la résistance de la pièce au flambage, sera égale à la somme des résistances au flambage du béton et du fer. Soit :

$$P = \frac{r}{s}\,\frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{I_b}{\alpha} + \frac{I_e}{\beta}\right) = \frac{r}{s}\,\frac{\pi^2}{l^2\beta}\left(I_e + \frac{1}{n}I_b\right)$$

en posant $n = \frac{\alpha}{\beta}$ comme plus haut.

Généralement I_b sera donné par la forme et les dimensions de la section ; on déduira donc de l'équation précédente :

$$I_e = \frac{s}{r} \frac{Pl^2}{\pi^2} \beta - \frac{1}{n} I_b. \tag{25}$$

Pour un coefficient de sécurité de 10, pour la valeur maximum de n qui, d'après les expériences de Bach est $n = 9$ et remplaçant approximativement π^2 par 10, β par $\frac{1}{2000000}$, il vient :

$$I_e = \frac{10}{r} \frac{Pl^2}{2} - \frac{1}{9} I_b \tag{26}$$

ou

$$P = \frac{1}{5} r \frac{I_e + \frac{1}{9} I_{b1}}{l^2}$$

formule dans laquelle P est exprimé en tonnes, l en mètres, mais I_e et I_b cependant en centimètres.

En admettant que les poteaux sont bien maintenus dans leur axe, condition toujours réalisée en pratique, on prend pour r suivant que les deux extrémités sont libres ou encastrées le nombre 1 ou 4.

Dans le premier cas avec un coefficient de sécurité de 10

$$I_e + \frac{1}{9} I_b = 5Pl^2. \tag{27}$$

Avec les deux extrémités encastrées

$$I_e + \frac{1}{9} I_b = \frac{5}{4} Pl^2. \tag{28}$$

Avec une seule extrémité encastrée

$$I_e + \frac{1}{9} I_b = \frac{5}{2} Pl^2. \tag{29}$$

Une extrémité encastrée, l'autre complètement libre

$$I_e + \frac{1}{9} I_b = 20 Pl^2. \tag{30}$$

On retrouve ici la même forme que celle obtenue pour les équations relatives à la compression simple, puisque les binomes $F_e + \frac{1}{n} F_b$ dans lesquels entrent les sections sont remplacés par $I_e + \frac{1}{n} I_b$ dans lesquels entrent les moments d'inertie.

Flexion des poutres à simple té. — Généralement l'armature est prévue sur la face tendue (v. 89 et 90). Les considérations relatives à la section rectangulaire et notamment les relations (14), (15) et (16) sont applicables ici, étant supposé que x_0 n'est pas plus grand que l'épaisseur de la dalle, c'est-à-dire que l'axe neutre ne sorte pas de l'épaisseur du hourdis. A la limite $x_0 = d_0$, et l'on a :

$$\sigma_0 = \frac{2M}{bd_0\left(d - \frac{d_0}{3}\right)}. \tag{31}$$

$$\sigma_e = \frac{M}{F_e\left(d - \frac{d_0}{3}\right)} \tag{32}$$

formules que l'on peut déduire directement de la figure, attendu que $\frac{\sigma_0 b d_0}{2}$ et $\sigma_e F_e$ sont les compressions et tensions totales, et $d - \frac{d_0}{3}$ le bras du levier correspondant.

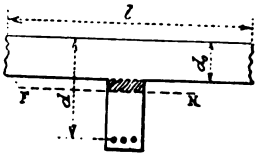


Fig. 89

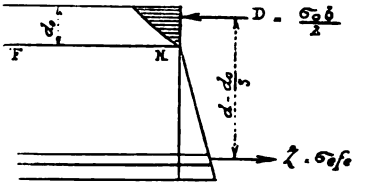


Fig. 90

Le troisième cas possible est celui où l'axe neutre entre dans la nervure, cas pour lequel il y a lieu d'établir de nouvelles formules faciles à trouver.

Ici, comme dans la section rectangulaire, si l'on néglige la faible résistance à la tension de la nervure, les valeurs obtenues donnent un excédent de sécurité. On peut cependant, pour être tout à fait tranquille, adopter comme bras de levier de l'armature du fer la valeur limite $d - \frac{d_0}{2}$, au lieu de $d - \frac{d_0}{3}$.

Les équations 14 et 16 sont encore applicables quand l'extension se produit vers la face supérieure, comme il arrive vers les extrémités des pièces encastrées.

76. Théorie du professeur Melan (1). — M. Le professeur Melan dont les procédés de construction en ciment armé sont appliqués sur une très large échelle dans l'Amérique du Nord, a basé sa théorie sur les considérations suivantes :

1° Le coefficient d'élasticité du béton à la compression n'est pas le même que son cofficient d'élasticité à l'extension ; il est un peu plus petit ;

2° Tant que la résistance du béton à la compression n'a pas été dépassée, ces deux coefficients peuvent être considérés comme constants.

Cette variabilité du coefficient d'élasticité ne doit pas être considérable entre les limites sus-mentionnées, car, comme le montrent de nombreux essais, les déformations calculées concordent bien avec celles observées, ce qui prouve que la limite de proportionnalité dans le béton se confond pratiquement avec la résistance à l'extension.

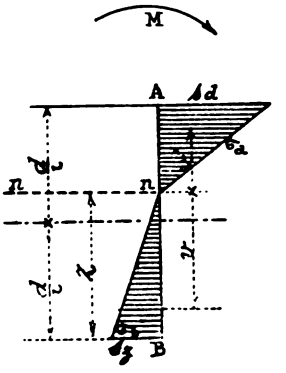


Fig. 91

Nous considérons une dalle plane (fig. 91) dont la section AB éprouve un moment de flexion M, soit :

nn l'axe neutre ; z sa distance à la face tendue.

Δd la déformation angulaire transversale, la distance des deux sections étant ds.

Ez et Ed les coefficients d'élasticité du béton à l'extension et à la compression.

μ le rapport $\frac{Ed}{Ez}$.

v et v' les distances des fibres tendues et comprimées à l'axe neutre.

d l'épaisseur de la dalle de largeur 1.

(1) Wochenschrift des Oester. Ingenieur und Architekten. — Vereines du 13 juin 1890.

D'après la loi de Navier les tensions dans les fibres tendues et comprimées sont exprimées respectivement par :

$$(a) \qquad \sigma_z = E_z \frac{\Delta d\varphi}{ds} v$$

$$(b) \qquad \sigma_d = - E_d \frac{\Delta d\varphi}{ds} v'.$$

L'équilibre entre les forces intérieures et les forces extérieures exige que l'on ait :

$$0 = \frac{1}{2} \left[E_z z^2 - E_d (d - z)^2 \right] \frac{\Delta d\varphi}{ds}$$

$$M = \frac{1}{3} \left[E_z z^3 + E_d (d - z)^3 \right] \frac{\Delta d\varphi}{ds}.$$

La première de ces équations permet de déterminer l'axe neutre, et l'on a :

$$(1) \qquad z = \frac{\sqrt{E} d}{\sqrt{E_z} + \sqrt{E_d}} \qquad d = \frac{\sqrt{\mu}}{1 + \sqrt{\mu}} d$$

cette valeur de z portée dans la seconde équation donne $\frac{\Delta d\varphi}{ds}$, et cette valeur portée dans (a) et (b) donne les tensions maxima des fibres extrêmes

$$(2) \qquad s_z = \frac{3M}{d^2} \frac{1 + \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}$$

et

$$(3) \qquad s_d = \frac{3M}{d^2} (1 + \sqrt{\mu}).$$

Pour déterminer μ, on peut utiliser une expérience citée dans la brochure de M. G. A. Wayss sur le système Monier. La deuxième dalle portant le numéro 8 a $4^{cm},5$ d'épaisseur, elle est en béton non armé ; largeur 60 centimètres ; elle s'est rompue sous une charge de $310^{kg},5$, répartie sur une portée libre de 1 mètre, soit 517 kilogrammes par mètre carré. Par suite $M = \frac{1}{8} 517 = 64^{kgm},63$ ou kg. cm par centimètre de largeur.

La résistance du béton à l'extension étant prise égale à 12 kg. cm² on a pour (2)

$$s_z = 12 = \frac{3 \times 64,63}{4,5^2} \times \frac{1 + \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}$$

d'où

$$\sqrt{\mu} = 3,95 \text{ ou } 4$$

approximativement et par suite

$$\mu = \frac{E_d}{E_z} = 16. \tag{4}$$

2° Nous considérons une dalle du système Monier, de section AB, soumise à un moment de flexion M (fig. 92).

D'après l'expérience, l'adhérence du ciment au fer est telle que dans les déformations pour lesquelles la résistance à l'extension du ciment n'est pas dépassée, il n'y a pas séparation et pas de glissement entre les barres de fer et le béton.

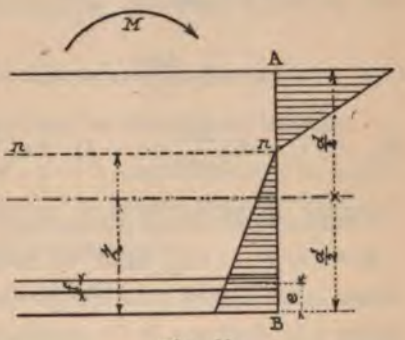


Fig. 92

On désignera par :

E_z, E_d les coefficients d'élasticité du béton ;

E_1, les coefficients d'élasticité du fer ;

f, l'épaisseur constante d'une bande de fibres métalliques supposées réparties uniformément dans la dalle par le treillis ;

e, la distance moyenne de cette bande à la partie inférieure de la dalle

s_1, la tension des fibres métalliques.

On aura avec les mêmes notations que plus haut

$$\sigma_z = E_z \frac{\Delta d\varphi}{ds} v ; \quad \sigma_d = - E_d \frac{\Delta d\varphi}{ds} v' ; \quad s_1 = E_1 \frac{\Delta d\varphi}{ds} (z - e).$$

Les équations d'équilibre donnent :

$$O = \frac{1}{2} \frac{\Delta d\varphi}{ds} \left[E_z z^2 - E_d (d - z)^2 + 2E_1 f (z - e) \right]$$

$$M = \frac{1}{3} \frac{\Delta d\varphi}{ds} \left[E_z z^3 + E_d (d - z)^3 + 3E_1 f (z - e)^2 \right].$$

La première équation permet encore de déterminer la position de l'axe neutre, et en posant $\frac{E_d}{E_z} = \mu$; $\frac{E_1}{E_d} = \nu$, on obtient :

$$(5) \quad z = \frac{u}{\mu - 1}\left[d + \nu f - \sqrt{(d + \nu f)^2 - \frac{\mu - 1}{\mu}(d^2 + 2\nu f e)}\right]$$

L'auteur prend couramment $E_d = 100000$ kg. cm²
d'où :

$$(6) \qquad \nu = \frac{E_1}{E_d} = \frac{2000000}{100000} = 20.$$

On obtient donc pour la tension maxima du béton à l'extension et à la compression et du fer à l'extension

$$(7) \qquad s_z = E_z \frac{\Delta d\varphi}{ds} z = \frac{3Mz}{\mu\left[d(d - z)^2 - \nu f(z - e)(3e - z)\right]}$$

$$(8) \qquad s_d = - E_d \frac{\Delta d\varphi}{ds}(d - z) = - s_z \frac{d - z}{z}\mu$$

$$(9) \qquad s_1 = E_1 \frac{\Delta d\varphi}{ds}(z - e) = s_z \frac{z - e}{z}\mu\nu.$$

Plusieurs des essais permettent de contrôler ces formules.

Essai n° 8. — Une dalle de mêmes dimensions que la précédente, mais armée d'un treillis de barres de 6 millimètres de diamètre à la distance de 10 centimètres a supporté avant de rompre 2763 kilogrammes par mètre carré

On a ici :

$$d = 4{,}5 ; \quad f = \frac{1}{10} \times \frac{\overline{0{,}6}^2}{4} \times \pi = 0{,}028 \text{ centimètres};$$
$$e = 1 \text{ centimètre.}$$

l'équation (5) donne par suite :

$$z = 2{,}88 \text{ centimètres},$$

et si l'on fait $M = \frac{2763}{8} = 345{,}4$ kilogrammes centimètre par centimètre de largeur dans (7), on a :

$$s_z = 15{,}8 \text{ kilogrammes (cm}^2\text{)} ; \quad s_d = 148 \text{ kilogrammes (cm}^2\text{)}.$$

chiffres sont bien un peu plus forts que la résistance du ne le comportait. Mais il se serait produit une fissure déjà une charge plus faible ; d'autre part la portée libre ne e pas avoir été exactement 1 mètre, mais 0m,90 environ.

ai 5. — Dalle continue système Monier de 5 centimètres sseur posée sur 4 appuis distants de 1m,5 d'axe en axe, charge répartie sur une travée ayant amené les premières es a été de 1 631 kilogrammes sur 0m,60 de largeur, soit kilogrammes par mètre Il y a lieu d'observer que ode de chargement a dû ire un soulèvement au droit

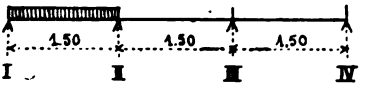


Fig. 93

ppui III (fig. 93), car la pression résultant du poids propre ogrammes par mètre carré, est de 1,1 $ql = 122{,}1\ l$, de sorte a charge ci-dessus comporte une pression négative de $= -181{,}2\ l$.

n résulte que le moment fléchissant maximum est :

$= 0{,}105\ ql^2 = 428$ kilogr. (cm) par centimètre de largeur.

r cette dalle, on a en outre : $d = 5$ centimètres ; $f = 0{,}057$ nètre (section totale des fils sur 60 centimètres de largeur 24 centimètres carrés) ; $e = 1{,}5$ centimètre.

n résulte :

$z = 3$ centimètres,

$s_z = 14{,}8$ kilogrammes centimètres carrés.

$s_d = -1.47$ kilogrammes centimètres carrés.

$s_1 = 2\,208$ kilogrammes centimètres carrés.

chiffres concordent assez bien avec les résistances admis- du béton, ce qui montre que les valeurs de μ et de ν admises cartent guère de la vérité. La concordance entre les défor- ns le confirme.

charges ci-dessus résulterait une flexion au milieu de la le :

$$\eta = \frac{1}{96} - \frac{ql^4}{Ed}\,\frac{3}{[d(d-z)^2 - \nu f(z-e)(3e-z)]}$$

ou

$$\eta = \frac{1}{96} \frac{1\,812 \times \overline{150}^4 \times 3}{100 \times 100 \times 100\,000 \times 17,436} = 16,4 \text{ millimètres.}$$

L'observation a donné 16 millimètres.

Pour une charge de $1\,077^k,5$ ou 1 197 kilogrammes par mètre carré cette dalle a fléchi de 8,5 millimètres. Le calcul donne dans ces conditions

$$\eta = \frac{17}{1\,920} \frac{1\,197 \times \overline{150}^4 \times 3}{100 \times 100 \times 100\,000 \times 17,436} = 8,7 \text{ millimètres.}$$

D'après M. Christophe (ouvrage déjà cité) M. Mélan calculerait ses voûtes en supposant que la charge se répartit entre le béton et l'armature qu'il y incorpore dans le rapport

$$\sigma = \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2}$$

où E_1 et I_1 sont les coefficients d'élasticité et moments d'inertie du béton seul et E_2 et I_2 les valeurs correspondantes pour le fer. La part prise par le béton serait par suite $\beta = \frac{\gamma}{1 + \gamma}$ et la part prise par le fer $\varepsilon = \frac{1}{1 + \gamma}$. Chaque élément pourrait dès lors se calculer séparément.

77. Théorie de P. Planat. — La théorie de M. P. Planat a été développée par l'auteur dans un volume d'une certaine importance [1], nous ne pouvons donc en quelques pages qu'en donner un aperçu des plus sommaires.

Considérant une poutre droite en ciment, armée de tendeurs en fer et posée sur deux apppuis, on distingue différentes phases, au fur et à mesure que les charges augmentent.

Première période. — Au début, sous de faibles charges, l'adhérence du fer et du ciment subsistant et la limite de résistance à la tension n'étant plus atteinte, le ciment et le fer travaillent soli-

[1] Théorie des poutres droites en fer et ciment par P. Planat, directeur de la *Construction Moderne*, Aulanier et Cie Editeurs, Paris.

dairement et prennent partout le même allongement. Il s'en suit que la tension du métal et celle du ciment sont entre elles dans le rapport de leur coefficient d'élasticité, rapport qu'il désigne par $r = \frac{R'}{R_2}$ (R' et R_2 tensions par unité de surface du barreau de fer et du ciment à l'extension).

Pendant cette période, tout se passe absolument comme si l'on remplaçait la section des barreaux par une section r fois plus grande du ciment, placée à la même hauteur.

Cette période est très courte et cette proportionnalité ne peut être admise que dans des limites très étroites, généralement dépassées en pratique.

Deuxième période. — La limite de résistance a été dépassée, le ciment se désagrège d'une façon imperceptible. Par suite, dans la région médiane, la section de ciment se trouve affaiblie, et cette partie de la pièce fléchit davantage sous la charge. Les bords de la région qui commencent à se désagréger s'écartent par suite de ce surcroît de flexion et le barreau, qui reste scellé à droite et à gauche, dans les parties intactes, prend une plus grande tension.

Grâce à ce surcroît de tension, et malgré l'affaiblissement de la section de ciment, l'équilibre se rétablit, car la tension horizontale augmentant, les charges verticales restant les mêmes, le sommet du polygone des résultantes s'abaisse à mesure que croît la tension.

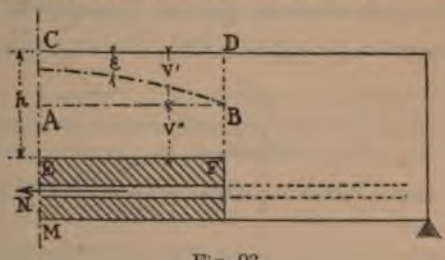


Fig. 93

Troisième période. — Soit CDEF (fig. 93, le prisme de béton qui reste intact et h sa hauteur, ε la distance du plan supérieur CD au point où passe le polygone des résistances, N la tension du barreau, on peut déterminer pour une section quelconque la hauteur h sus-mentionnée, c'est-à-dire celle pour laquelle la tension atteint la limite de résistance, on a :

$$h = \frac{N}{R_2} \times \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{6 R_2 \varepsilon}{N}}\right].$$

a) Lorsque ε est plus petit que zéro, h ne pouvant être négatif, n'a qu'une valeur qui décroît à mesure que ε diminue en valeur absolue.

b) Lorsque ε est nul, h peut avoir deux valeurs, l'une nulle, l'autre $h = \frac{2N}{R_2}$.

c) Lorsque ε est plus grand que zéro, h peut avoir deux valeurs positives, symétriques par rapport à la valeur moyenne $h = \frac{N}{R_2}$.

d) Enfin si ε devient plus grand que $\frac{N}{6R_2}$, h devient imaginaire. Quand le polygone s'abaisse au-dessous d'une certaine limite, la limite R_2 de résistance à la tension n'est atteinte nulle part.

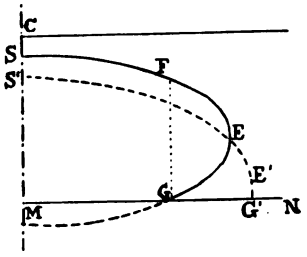


Fig. 94

La troisième période commence lorsque ε cesse d'être négatif (*b*). La courbe qui relie les diverses valeurs dans chaque section a alors 2 branches utilisables ; elle limite la région SFEGM à l'intérieur de laquelle le ciment peut se désagréger (fig. 94).

Ensuite sous une charge plus forte encore, la désagrégation d'abord localisée pour ainsi dire en un point se propage de plus en plus vers les appuis, bien que la région s'abaisse comme le montre la courbe S'E'C'. *C'est la quatrième période.*

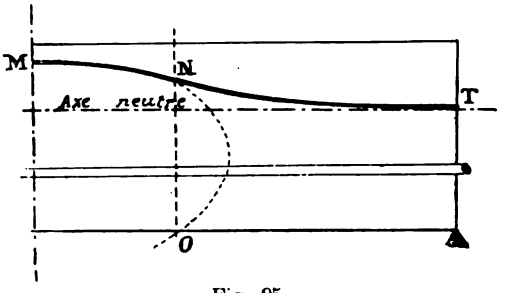


Fig. 95

A droite et à gauche de cette région centrale, le ciment est intact, l'adhérence et la cohésion subsistent. Mais que se passe-t-il au-delà de la droite NO limite de la désagrégation ? Les moments de flexion décroissent régulièrement depuis le point N où le mo-

ment est le produit de la tension du barreau par la distance du point N à l'axe neutre, jusqu'à l'extrémité T où le moment est nul (fig. 95).

C'est en se basant sur ces remarques que M. Planat détermine le travail du fer et celui du ciment dans une pièce dont les dimensions sont données, ou les dimensions qu'il convient à donner à ces pièces pour que le travail soit celui qu'on a fixé à l'avance.

Si on appelle n la distance à l'axe des barreaux d'une dalle à la face supérieure de celle-ci, ω la section totale des fers, on arrive à des formules telles que :

$$n = A\sqrt{\frac{\mu}{b}}; \qquad \omega = B\sqrt{b\mu}.$$

dans lesquelles μ est le moment des forces extérieures, b la largeur de la dalle, A et B des coefficients variables suivant le coefficient de sécurité, et suivant que la limite est prise sur la branche supérieure de la courbe des h ou sur la branche inférieure ou sur une moyenne des deux, enfin suivant la valeur admise pour R_2.

Les valeurs de A et de B sont résumées dans le tableau suivant:

R_2 . . . . . =	200 000 kilogrammes					
Coefficient de sécurité.	$\frac{1}{7}$			$\frac{1}{5}$		
Branche.	Supérieure	Inférieure	Moyenne	Supérieure	Inférieure	Moyenne
Valeur de A . . .	0,00521	0,00448	0,0048	0,00452	0,00364	0,0041
» de B . . .	35,0	37,9	36,5	30,5	34,2	32,4
R_2 . . . . . =	300 000 kilogrammes					
Coefficient de sécurité.	$\frac{1}{7}$			$\frac{1}{5}$		
Branche.	Supérieure	Inférieure	Moyenne	Supérieure	Inférieure	Moyenne
Valeur de A . . .	0,0036	0,00325	0,00342	0,00312	0,00270	0,00291
» de B . . .	54,0	51,4	52,7	46,7	46,1	46,4

Pour les poutres armées de nervures saillantes, les calculs étant compliqués, M. Planat a résumé sous forme de tableaux graphiques les résultats des calculs, en adoptant diverses données.

78. Méthode F. von Emperger (1). — Soit une dalle ou une poutre (fig. 96) de largeur b et dont la distance des centres de gravité des armatures à la fibre comprimée extrême est d. Soit $F_b = bd$ la section de la dalle, sans déduction du béton qui recouvre les armatures; F_e la section totale des armatures correspondant à la largeur b; et posons $\chi = \frac{F_e}{bd}$, ce rapport étant ce que l'on appellera le pourcentage en métal de la dalle.

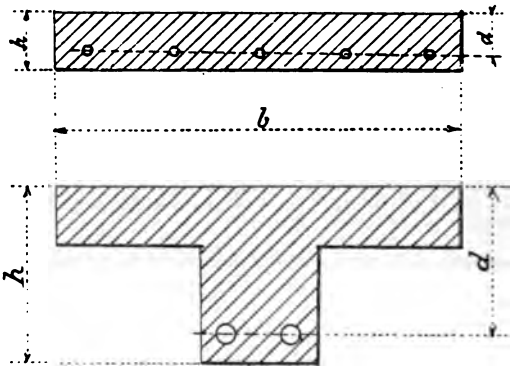


Fig. 96

A noter que s'il s'agit d'un élément de plancher, nervure avec le hourdis afférent, pour conserver les mêmes notations, le pourcentage sera toujours le rapport de la section totale des armatures prévues dans la nervure, au produit bd qui ici est fictif, puisque le béton de la nervure a moins de largeur que celui du hourdis.

Si l'on néglige le béton tendu et si l'on désigne par ν le rapport entre le coefficient d'élasticité du métal au coefficient d'élasticité du béton et par d' l'épaisseur du béton comprimé, la distance ζ

(1) Docteur Fritz von Emperger, directeur du Beton und Eisen, de Vienne (voir notamment le fascicule III de 1903 de ce journal).

de la fibre neutre au centre de gravité de l'armature (fig. 97) est donnée par l'équation géométrique [1]

$$\frac{bd'^2}{2} = \nu F_e \zeta \tag{1}$$

ou

$$\frac{bd'^2}{2} = \nu\chi bd\,(d - d'). \tag{2}$$

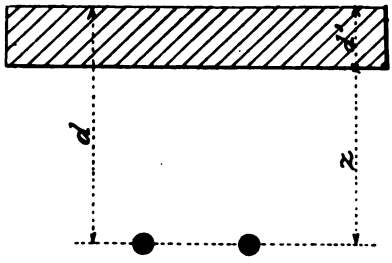


Fig. 97

Cette équation (2) permet de dégager d' et l'on tire

$$d' = \nu\chi d + \sqrt{\nu\chi d\,(2d + \nu\chi d)}$$

$$d' = dA \tag{3}$$

ou

$$\frac{d'}{d} = A$$

en faisant :

$$A = -\nu\chi + \sqrt{\nu\chi\,(\nu\chi + 2)}. \tag{4}$$

Cette expression A une fois trouvée (et on peut la déterminer

[1] Ou si l'on veut par les équations d'équilibre dans une section :

$$\frac{bd'}{2}\,\sigma_d = \nu F_e\,\sigma_e$$

et

$$\frac{\sigma_d}{\sigma_e} = \frac{d'}{\zeta}$$

d'où

$$\frac{bd'^2}{2} = \nu F_e \zeta.$$

pour une valeur de χ donnée (pourcentage) et pour $\nu = 15$ par exemple), toutes les autres inconnues du problème sont données sous une forme simple. Ainsi :

Distance ζ de la fibre neutre au centre de gravité des armatures.

$$\zeta = d - d' = d - dA$$

$$\zeta = d(1 - A)$$

ou

$$\frac{\zeta}{d} = 1 - A. \tag{5}$$

Remarque. — Les valeurs trouvées en (3) et (5), montrent que :

A est la distance *relative* de la fibre extrême comprimée à la fibre neutre ;

1 — A est la distance *relative* de la fibre neutre au centre de gravité des armatures.

Distance m des centres de compression et de tension.

$$m = \frac{2d'}{3} + \zeta = \frac{2}{3}dA + d - dA$$

$$m = d\left(1 - \frac{A}{3}\right) \tag{6}$$

Moment d'inertie I *de la pièce.*

$$I = \frac{bd'^3}{3} + \nu Fe\zeta^2$$

et d'après (1)

$$\left\{\begin{array}{l} I = \nu Fe\zeta\left(\frac{2d'}{3} + \zeta\right) = \nu Fe\zeta m \\ \text{ou} \\ I = \frac{\nu Fed^2}{3}(1 - A)(3 - A) \end{array}\right. \tag{7}$$

$\frac{I}{v}$ *de la poutre par rapport au métal* (W_e).

$$W_e = \frac{I}{\nu\zeta}$$

$$W_e = \frac{\nu F e \zeta m}{\nu\zeta}$$

ou

(8) $$W_e = Fem.$$

Ce qui veut dire que le $\frac{I}{v}$ de la pièce par rapport au métal est égal au produit de la section des armatures par la distance des centres de compression et d'extension :

$\frac{I}{v}$ *de la poutre par rapport au béton* (W_b)

$$W_b = \frac{I}{d'}$$

ou d'après (7) :

$$W_b = \frac{1}{d'}\left(\frac{bd'^3}{3} + \nu F e \zeta^2\right)$$

mais d'après (1), on peut écrire comme suit l'expression précédente :

$$W_b = \frac{1}{d'} \times bd'^2 \left(\frac{d'}{3} + \frac{1}{2}\zeta\right)$$

$$W_b = bd'\left(\frac{d'}{3} + \frac{d - d'}{2}\right)$$

$$W_b = \frac{bd'}{b}\left(d - d\frac{A}{3}\right)$$

(9) $$\begin{cases} W_b = b \times \frac{dA}{2} \times d\left(1 - \frac{A}{3}\right) \\ \text{ou} \\ W_b = \left(b\frac{d'}{2}\right)m \end{cases}$$

C'est-à-dire que le $\frac{I}{v}$ du béton est égal à la demi-section du béton comprimé multipliée par la distance des centres de compression et d'extension.

Taux de travail du métal et du béton. — Métal :

$$\sigma_e = \frac{M}{W_e} = \frac{M}{Fem}$$

Béton :

$$\sigma_b = \frac{M}{W_b} = \frac{2M}{bd'm}$$

Ce double calcul s'applique aux deux parties dans lesquelles la poutre se divise : l'épaisseur de béton comprimé trouvée par le calcul et l'armature supposée ancrée comme celle d'une poutre armée bois et fer.

M. von Emperger montre ensuite par des essais comparatifs à la rupture que les poutres armées aussi à la compression n'ont pas donné de résultats bien supérieurs à ceux obtenus avec les poutres armées seulement à la tension ; il en déduit que pratiquement l'on peut faire usage des relations sus-mentionnées pour le calcul des poutres à double armature symétrique et a fortiori à armatures dissymétriques.

La différence n'est plus négligeable bien entendu pour le calcul des déformations dont l'exactitude ne se réalise que pour les charges de rupture.

Pour déterminer la déformation d'une poutre en ciment armé sous l'action des charges limites permises, on ne saurait négliger l'influence du béton tendu qui a été rendue manifeste par un grand nombre d'essais entrepris un peu partout. Afin de simplifier le problème, l'auteur suppose un seul et même coefficient d'élasticité pour le béton tendu et le béton comprimé, et il divise le diagramme en 3 parties :

I. — *Partie travaillant avec le concours du béton tendu ;*
II. — *Partie travaillant sans le secours du béton tendu ;*
III. — *Partie où se manifestent des signes de rupture.*

La partie I n'est pas réalisée avec des poutres trop jeunes ou en béton maigre ; à moins que la portée soit très faible, le poids propre suffit pour faire disparaître cette première phase. Une indication tout-à-fait certaine est donnée par la direction du diagramme dans la seconde phase pendant laquelle la poutre ne cesse d'être complètement saine. Au-delà commence la période des grandes fissures. Un calcul exact montre que les directions I, II et III sont raccordées par des courbes.

I. — *Déterminer les taux de travail du béton et du métal d'une dalle de 12 centimètres, armée de 10 barres rondes de 12 millimètres par mètre, dont les axes se trouvent à 2,5 centimètres de la face tendue. Cette dalle porte 400 kilogrammes sur une portée de 3 mètres* (on suppose $\nu = 15$).

Poids propre de la dalle = 0,12 × 2500 kilogr.	=	300 kilogr.
Surcharge par mètre carré	=	400 kilogr.
Charge totale	=	700 kilogr.

$$M = \frac{700^k \times 3^2}{8} = 788 \text{ kgm. ou } 78800 \text{ kg. par cm}^2.$$

$$d = 12 - 2,5 = 9,5$$

$$F_e = 10 \times 1,13 = 11,3$$

$$b = 100$$

$$\nu = 15$$

$$\chi = \frac{Fe}{bd} = \frac{11,3}{100 \times 9,5} = 0,0119$$

$$A = -15 \times 0,0119 + \sqrt{15 \times 0,0119\,(2 + 15 \times 0,0119)} = 0,445.$$

$$m = d\left(1 - \frac{A}{3}\right) = 9,5\left(1 - \frac{0,445}{3}\right) = 8,09$$

$$d' = dA = 9,5 \times 0,445 = 4,23$$

$$W_e = F_e m = 11,3 \times 8,09 = 91,42$$

$$\sigma_e = \frac{M}{W_e} = \frac{78800}{91,42} = 862 \text{ kilogrammes par centimètre carré.}$$

$$W_b = b\,\frac{d'}{2}\,m = 100 \times \frac{4,23}{2} \times 8,09 = 1711$$

$$\sigma_b = \frac{M}{W_b} = \frac{78800}{1711} = 46^k,1.$$

11. — *Déterminer les taux de travail d'un élément de plancher de 250 centimètres entre axes de nervures, armé dans la nervure de deux barres rondes de 30 millimètres dont les axes se trouvent à 25 centimètres des fibres extrêmes comprimées* (on suppose $\nu = 15$).

L'élément supporte 4000 kilogrammètres

$$d = 25$$
$$F_e = 2 \times 7^{cm^2},07 = 14,14$$
$$b = 250$$
$$\nu = 15$$
$$\chi = \frac{F_e}{bd} = \frac{14,14}{250 \times 25} = 0,00226$$
$$A = -15 \times 0,00226 + \sqrt{15 \times 0,00226(2 + 15 \times 0,00226)} = 0,228$$
$$m = d\left(1 - \frac{A}{3}\right) = 25(1 - 0,076) = 23,1$$
$$d' = dA = 25 \times 0,228 = 5,70$$
$$W_e = F_e m = 14,14 \times 23,1 = 326,6$$
$$\sigma_e = \frac{M}{F_e m} = \frac{4000 \times 100}{326} = 1\,227 \text{ kcm}^2$$
$$W_b = b\,\frac{d'}{2} \times m = 250 \times \frac{5,70}{2} \times 23,1 = 16\,460$$
$$\sigma_b = \frac{M}{W_b} = \frac{4000 \times 100}{16\,460} = 24^{kg},3.$$

Méthode graphique. — On a trouvé plus haut pour le $\frac{I}{v}$ du fer :

$$W_e = F_e m$$
$$W_e = F_e \frac{d}{3}(3 - A)$$

et comme $F_e = \chi bd$

$$W_e = \frac{bd^2}{6} \times 2\chi(3 - A).$$

Désignant le $\frac{I}{v}$ connu $\frac{bd^2}{6}$ par W_0, le $2\chi(3 - A)$ par C_e

$$W_e = W_0 C_e.$$

On a trouvé de même :

$$W_b = b \times d^2 \frac{A}{2}\left(1 - \frac{A}{3}\right)$$

$$W_b = \frac{bd^2}{6} A(3 - A).$$

Désignant l'expression A(3 — A) par C_b

$$W_b = W_0 C_b$$

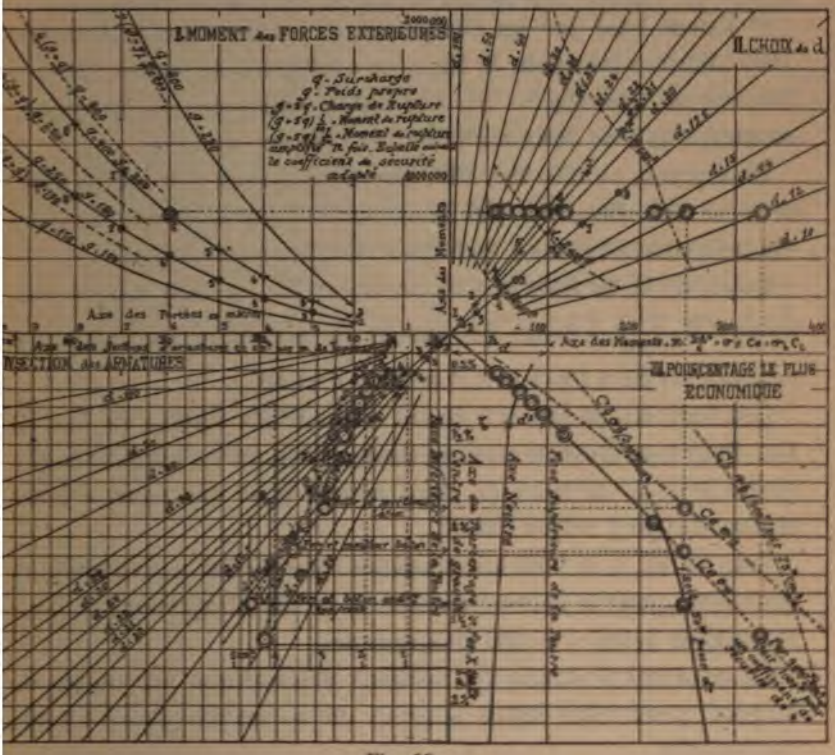


Fig. 89

C_v et C_b sont les coefficients numériques (qui ne dépendent que du pourcentage χ et de la valeur de ν que l'auteur admet généralement comme égale à 15) et qui multipliés par le $\frac{I}{v}$ de la dalle ou de la nervure armées, supposées homogènes, donnent respectivement le $\frac{I}{v}$ par rapport au fer, ou celui par rapport au béton. Ceci posé on résoudra tous les problèmes par le graphique (fig. 98).

Graphique pour le calcul des pièces fléchies en ciment armé. — La planche est divisée en 4 quadrants, marqués I à IV dans le sens des aiguilles d'une montre.

Quadrant I, en haut et à gauche donne la grandeur des moments dépendants du poids mort, de la surcharge et de la portée. On les disposera suivant ses habitudes. Les méthodes principales sont :

1° Calcul du moment de rupture en ajoutant au poids mort g de 3 à 10 fois la surcharge q. Ici on a pris : $Q = g + 5q$.

2° Calcul basé sur un coefficient de sécurité de n. Exemple 1 000 kilogrammes pour le fer et un coefficient de sécurité de 4. — Dans ce cas $Q = 4(g + q)$. Les lignes ponctuées du graphique montrent que les deux méthodes ne diffèrent que peu.

On a pris $g_c = 150, 250, 400, 800$ kilogrammes par mètre carré et $g = 150, 180, 200, 240$ kilogrammes correspondant aux ouvrages usuels exposés à de faibles vibrations seulement.

Quadrant II, en haut et à droite, a pur but de ramener le moment à $W_0 \left(\frac{I}{v}\right)$, à l'aide des rayons de réduction correspondant aux valeurs de d (on a pris $d = 20$ et $d = 30$).

Quadrant III, en bas et à droite, donnant les valeurs de $C_e\sigma_e$ et $C_b\sigma_b$. Pour bien illustrer cette méthode, une poutre s'y trouve représentée avec la variation de l'axe neutre pour des pourcentages croissants (On y relève ζ et d').

Pour le fer, $\sigma_e = 4\,000$ kilogrammes ; pour l'acier, $\sigma_e = 5\,000$ kilogrammes ; pour le béton ordinaire, $\sigma_b = 200$ kilogrammes ; pour le meilleur béton $\sigma_b = 300$ kilogrammes.

Le quadrant IV donne les sections d'armatures par mètre de largeur ; pour toute autre largeur, on se servira d'une échelle convenable.

Premier Exemple. — Plancher de 6 mètres de portée et 400 kilogrammes de surcharge. On veut employer le fer et le béton ordinaire.

Le quadrant I donne le moment de rupture dans l'hypothèse répondant à $\frac{(g + 5q)l^2}{10}$ point marqué par double cercle. On projette cette grandeur sur le quadrant II. On voit que les limites convenables d'une telle poutre se trouvent comprises entre

$d = 14$ et $d = 45$. Si l'on n'est tenu par aucune autre considération, on prendra $d = 45$, solution évidemment la plus économique. Cette hauteur répond à un pourcentage de 0,2 %, comme le montre la projection faite sur le quadrant III.

Pour des applications ne permettant pas cette hauteur, on se servira de $d = 40$, 30, 28, 26, 24, 22, 20, 15, 14, 12 ou 10, toutes valeurs marquées par un double cercle.

La projection sur le quadrant III donne les valeurs de $C_e\sigma_e$ et $C_b\sigma_b$ correspondantes.

Autre Exemple. — *On donne une poutre de hauteur* h, *d'où une valeur de* d, *et une section d'armature* F_e *par mètre de largeur. On demande son moment de résistance.*

Marquons F_e sur l'axe des y du quadrant IV, traçons le rayon correspondant à la valeur de d, et nous obtiendrons un point qui en se servant des quadrants III, II et I, donnera la valeur du moment de rupture pour une portée déterminée ou pour un coefficient de sécurité donné.

CHAPITRE VI

—

A. MAUREL

77. Théorie de M. A. Maurel. — M. A. Maurel, un des auteurs de ce traité, avait tiré de quelques-unes des premières expériences, mentionnées à l'Appendice, certaines conclusions, dans un rapport administratif présenté en 1896. On y trouvera plusieurs points communs avec les conclusions ultérieures que MM. Souleyre, Anglade et Considère ont tiré de leurs remarquables travaux.

Voici les divers faits énoncés dans ce rapport.

1° La première courbe de flexion ne ressemble pas aux suivantes. Peu inclinée au début, elle se redresse bientôt, pour augmenter à peu près régulièrement. L'angle formé par ces deux allures disparaît dans les chargements suivants pour lesquels la flexion augmente à peu près sensiblement aux charges. Ce dernier phénomène est particulièrement vrai quand les efforts se sont élevés une première fois à un taux voisin de la limite de rupture.

2° Quand l'effort s'est élevé à un taux voisin de la rupture, les flèches mesurées dans les expériences suivantes sont plus fortes que celles obtenues précédemment.

3° Un effort même faible par rapport à la charge de rupture produit une flèche permanente. Dans la première expérience de Genève cette flèche permanente augmente d'abord légèrement, puis diminue et devient même négative et enfin paraît croître d'une façon régulière. Lors de la répétition de l'expérience, elle reprend de suite la valeur maxima qu'elle avait précédemment et revient au bout d'un certain temps à sa valeur primitive.

4° Le travail du fer présente comme la flèche, dans la première expérience, deux parties distinctes. Ces deux parties tendent à s'égaliser dans les expériences suivantes. Pour un effort assez faible le fer conserve un certain travail extérieur, une fois la charge enlevée.

5° Les courbes d'allongement du fer augmentent à partir d'un certain point beaucoup plus rapidement que celles des flexions de la poutre.

6° A partir d'une certaine valeur de la surcharge, le travail du fer et la flexion augmentent avec la durée de la charge et avec le nombre de répétitions des efforts.

7° La résistance du fer dans les expériences de Lausanne et de Genève s'est élevée à un taux tel que l'on doit supposer ou l'emploi d'un métal de qualité supérieure ou une élévation artificielle de son taux de rupture. Il peut en effet se produire, par suite de l'adhérence du ciment au fer, une gêne dans ses contractions latérales, phénomène analogue à celui que l'on observe dans une section étranglée où le coefficient de rupture s'élève à 50 °/₀ au-dessus de sa limite habituelle (expériences de M. Baclé sur les barreaux métalliques). La même hypothèse peut s'appliquer au ciment dont le fer gêne aussi les déformations. Il y a là tout un domaine à explorer où l'on trouvera l'éclaircissement de bien des points.

8° La résistance du ciment à la compression paraît également très élevée. Ce fait peut s'expliquer par les obstacles que met l'adhérence de la partie tendue au flambage et au glissement.

9° Les expériences semblent montrer qu'il n'y a pas eu décollement des fers à l'intérieur des poutres, du moins jusqu'à la limite de grande extension.

10° Les premières fissures se sont produites à Lausanne sous une charge égale aux $\frac{9}{25}$ de la charge de rupture et à Genève sous une charge égale aux $\frac{6}{7}$ de la même limite.

On peut encore tirer d'autres conclusions de ces expériences, mais nous nous arrêterons à ce qui vient d'être dit, en reconnaissant toutefois catégoriquement que ces conclusions ne peuvent pas encore être généralisées.

Nous renonçons à chercher dans ce qui précède des arguments en faveur de l'une ou l'autre des théories exposées. Nous y voyons un accord naturel et simple avec l'hypothèse qui consiste à adopter pour le ciment, par analogie avec ce que l'on a observé dans les fontes et dans les fers, *une limite d'élasticité à l'extension beaucoup plus basse que celle à la compression*. Nous allons montrer que cette hypothèse explique complètement les faits ci-dessus mentionnés.

Dans une première période, l'élasticité du ciment à la compression est à peu près la même que celle à l'extension ; le travail du fer et les déformations de la poutre augmentent proportionnellement à l'effort. A partir d'un certain point la limite d'élasticité du ciment à l'extension est dépassée ; la poutre moins raide fléchit davantage, le fer moins soutenu travaille à un coefficient plus élevé et sa courbe d'allongement augmente beaucoup plus rapidement que celle de la flexion de la poutre.

La réciproque n'est pas toujours vraie, car la compression du ciment dans la partie supérieure (qui laisse subsister la déformation), la tension du tirant et la tension extérieure des fibres simplement tendues et non brisées tendent à ramener la fibre déformée à sa place primitive. Le frottement des joints rompus est le seul obstacle qui s'y oppose. Il est donc possible de voir ces surfaces qui ne frottent pas ensemble, se rapprocher séparément et la flèche permanente revenir au zéro. En poussant le premier chargement jusqu'à un taux voisin de la rupture, on brisera un grand nombre de joints parallèles à l'effort, on diminuera la résistance intérieure et on augmentera par suite la flexibilité de la poutre. Les déformations deviendront proportionnelles aux efforts, car elles ne seront dues qu'aux allongements des fibres. A excepter toutefois le début de la surcharge où les frottements des joints rompus produiront un certain retard dans les déformations et où la flèche permanente acquise dans la première expérience reprendra pour un effort très faible sa valeur primitive.

L'hypothèse d'une rupture normale à l'effort a son importance, car d'un côté elle pourrait permettre une dissociation (un glissement) du béton et du fer, analogue à celle qu'a supposé

M. Planat, et d'un autre elle rendrait le béton, travaillant à une tension un peu élevée, beaucoup plus perméable que celui travaillant à un taux plus faible. (Les expériences de M. Considère ont montré que ces craintes n'étaient pas fondées).

Vu la grande analogie des bétons avec le fer, on peut faire sur leur constitution les mêmes hypothèses que celles que l'on a faites pour le fer. Le ciment jouerait dans un mortier le même rôle que la *cementite* de MM. Rose et Osmond ; il lierait entre eux les grains de sable. Lorsque le travail croît et dépasse la limite d'élasticité, les couches de ciment séparant ces grains se rompent normalement aux efforts ; la matière prend la forme fibreuse qui se prête mieux aux allongements que la forme grenue [1]. La rupture suivant les plans normaux n'est pas soudaine ; elle met un certain temps à se produire.

Si l'on soulage la poutre, les particules déformées peuvent ne plus reprendre leur place primitive ; les ruptures intérieures leur laissent cette liberté. La conséquence qui en découle est évidente : *la poutre présentera une déformation permanente et le fer une tension intérieure.*

Fig. 99

Toutes les fois donc qu'on observera une déformation permanente, c'est que la limite d'élasticité aura été dépassée dans certaines parties. Toutes les probabilités semblent en faveur des parties tendues, pour le siège de ces phénomènes.

L'application de cette théorie aux expériences de Genève (partie n° 1) et de Lausanne montrent clairement la succession des phénomènes mentionnés.

Expériences de Genève (partie n° 1) (fig. 99)

Poids de la poutre par mètre courant : 90 kilogrammes ;

Portée : $2^m,80$;

Moment produit par la charge permanente :

$$\frac{90 \times \overline{2,80}^2}{8} = 8\,820 \text{ kilogrammes-centimètres.}$$

[1] Voir à ce sujet l'ouvrage de M. J. Résal, *Fontes, fers et aciers.*

La surcharge s'exerce sur une longueur de $1^m,60$ (fig. 100). Le moment maximum qu'elle produit est

$$\frac{P}{4}\left(280 - \frac{160^2}{2 \times 160}\right) = 50 \text{ kilogrammes-centimètres.}$$

La section de la poutre est représentée au croquis. Les 2 fers ronds de 20 millimètres qui en forment l'armature peuvent être remplacés par 2 fers carrés de 18 millimètres de côté.

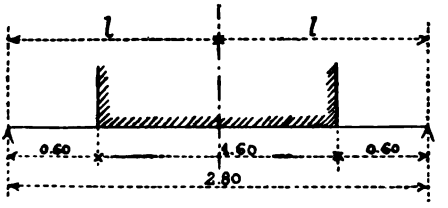


Fig. 100

Calcul de la flèche. — La flèche peut se calculer facilement en supposant la poutre encastrée en son milieu, supposition admissible puisque la tangente à la fibre neutre déformée est horizontale en ce point. La flèche sera formée de 3 parties (fig. 101).

1° De la flèche en $A = Ac' = Bc = \frac{1}{8}\frac{P'a^3}{EI}$.

2° De $DC = (l - a)\ \text{tg}\ \alpha$.

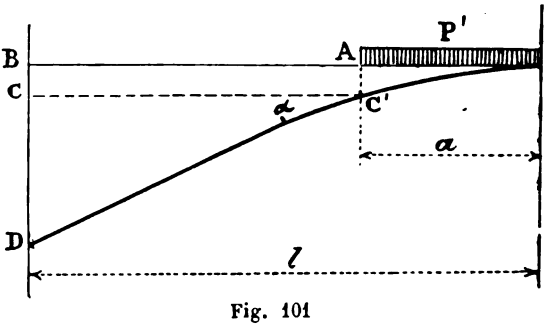


Fig. 101

L'angle α s'obtient en faisant dans l'équation de la dérivée de la fibre neutre

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{P'}{6a}\left[a^3 - (a - x)^3\right]$$

$$x = a$$

il vient

$$EI \operatorname{tg} \alpha = \frac{P'a^3}{6a} = \frac{P'a^2}{6}$$

d'où

$$Dc = P' \frac{a^2}{6EI} (l - a)$$

et

$$BD = \frac{P'a^2}{24EI} (4l - a) ;$$

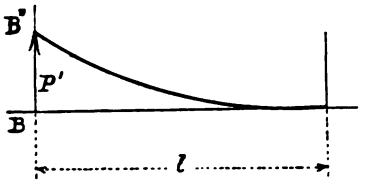


Fig. 102

3° De la flèche produite par une force P' appliquée en B (fig. 102)

$$BB'' = \frac{1}{3} \frac{P'l^3}{EI} .$$

La flèche totale sera donc

$$f = \frac{1}{3} \frac{P'l^3}{EI} - \frac{P'a^2}{24EI} (4l - a)$$

dans le cas particulier

$$P' = \frac{P}{2} ; \quad l = 1^m,40 ; \quad a = 0,80$$

$$f = \frac{P}{48EI} (8l^3 - 4la^2 + a^3) = 0,393 \frac{P}{EI} .$$

On a consigné dans le tableau suivant la valeur des efforts calculés de façon que les flèches théoriques coïncident avec les flèches mesurées dans la première expérience ou plutôt les dépassent légèrement pour tenir compte de l'inégalité de la valeur de E dans les divers points de la poutre.

I

P	Moments maxima	Coefficients d'élasticité			Distance au c.d.g.		Moments d'inertie	Flèches		Moments résistants		Efforts maxima		
		Fer	Ciment		Fibre supérieure	Fibre inférieure		théorique	réelle	$\frac{I}{v}$	$\frac{I}{v'}$	Ciment		Fer par mm²
			comprimé	tendu (¹)								comprimé par cm²	tendu par cm²	
	cm. kg.	m²	m²	m²	cm.	cm	cm⁴			cm²	cm²			
00	8 820	22 × 10⁹	10 × 10⁹	10 × 10⁹	18,5	17,5	49 764	»	»	2 690	2 843	3,3	3,1	0,07
900	53 820	22 »	10 »	5 »	15,8	20,2	36 482	0,11	0,10	2 309	1 806	23,3	14,9	1,31
1 800	98 820	22 »	10 »	2, 5 »	13,6	22,4	26 671	0,265	0,25	1 961	1 191	50,4	20,7	1,66
3 600	188 820	22 »	10 »	1,67 »	12,7	23,3	22 505	0,63	0,60	1 772	966	106,6	32,6	4,30
5 400	278 820	22 »	5 »	0,83 »	13,7	22,3	28 300	1,50	1,45	2 065	1 269	134,4	36,6	9,66
7 200	368 820	22 »	4 »	0,50 »	12,3	23,7	28 294	2,41	2,35	2 300	1 194	160,4	38,6	17, 0
9 000	458 820	22 »	3,2 »	0, 4 »	14,4	21,6	32 411	3,41	3,35	2 251	1 502	203,9	38,2	21, 0
10 800	548 820	22 »	2,8 »	0,35 »	14,8	21,2	33 612	4,51	4,35	2 271	1 585	241,7	43,2	27, 2
12 600	638 820	21 »	2,2 »	0,26 »	15,6	20,4	39 067	6,03	5,75	2 504	1 915	255,5	41,7	33, 4

(¹) Les lois de décroissance du coefficient d'élasticité sont déduites des expériences de MM. Coignet et de Tédesco (Voir page 56).

Remarque 1. — Les majorations dans le calcul des flèches sont trop faibles ; un calcul postérieur à ceux du tableau a montré que — vers la rupture — elles auraient dû être majorées du 1/13 environ de la valeur mesurée.

Remarque 2. — Pour calculer le centre de gravité, on a ramené la section à la forme de la figure 103 ; puis pour calculer le moment d'inertie, on a supposé que l'étranglement était déplacé et commençait à la hauteur du centre de gravité.

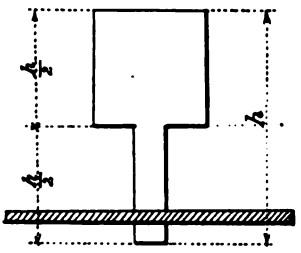


Fig. 103

L'hypothèse que nous avons faite sur la constance du coefficient d'élasticité dans toute la partie tendue et dans toute la partie comprimée d'une section, n'est pas exacte. La surface ramenée à une section à coefficient d'élasticité variable ne présente pas la forme que l'on a supposée, mais bien celle des figures hachurées (fig. 104). Les coefficients d'élasticité que l'on a introduits dans les formules pour établir les flèches et les efforts sont des coefficients moyens et non ceux des bords supérieurs ou inférieurs.

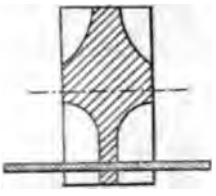


Fig. 104

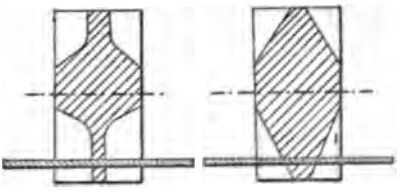


Fig. 105

Les efforts maxima indiqués dans le tableau sont donc trop forts et il y *a lieu de les diminuer*. Une étude théorique faite pour un effort voisin de la rupture a montré que le travail dans ces fibres s'obtenait approximativement [1] en calculant les efforts pour une flèche triple de celle que l'on a mesurée. On trouvera dans le tableau suivant les efforts correspondants à cette nouvelle hypothèse.

[1] On serait probablement plus exact en ramenant la section à celle des figures 105.

II

P	Moments maxima	Coefficients d'élasticité			Distances au c.d.g.		Moments d'inertie	Flèches		Moments résistants		Efforts maxima		
		Fer	Ciment		Fibre supérieure	Fibre inférieure		théorique	réelle	$\frac{I}{v}$	$\frac{I}{v'}$	Ciment		Fer par mm²
			Comprimé	tendu								comprimé par cm²	tendu par cm²	
kg.	cm kg.	m	m	m	cm.	cm.	cm⁴	cm.	cm.	cm³	cm³	kg.	kg.	kg.
00	8 820	20 × 10⁹	2, 0 × 10⁹	2, 0 × 10⁹	20,0	16,0	59 352	»	»	2 968	3 710	3,0	2, 4	0,11
900	53 820	20 »	2, 0 »	2, 0 »	20,0	16,0	59 352	0,31	0,10	2 968	8 710	18,2	14, 5	1,82
1 800	98 820	20 »	2, 0 »	0, 70 »	17,4	18,6	45 868	0,77	0,25	2 636	2 467	37,3	14, 2	4,06
2 700	143 820	20 »	2, 0 »	0, 50 »	16,6	19,4	45 478	1,85	0,35	2 740	2 344	52,5	15, 4	6,16
3 600	188 820	20 »	1, 7 »	0, 40 »	19,9	17,0	48 240	1,81	0,60	2 540	2 840	74,3	15,65	7,82
5 400	278 820	20 »	0, 8 »	0, 20 »	20,2	15,8	65 500	4,29	1,35	3 144	4 020	88,7	17,30	17, 3
7 200	368 820	20 »	0,55 »	0, 17 »	22,2	13,8	74 548	7,05	2,35	3 358	5 402	109,8	21, 1	24, 8
10 800	548 820	17,2 »	0,43 »	0,108 »	22,4	13,6	76 667	13,08	4,35	3 423	5 637	160,0	24, 4	39, 0
14 400	728 820	8 »	0,20 »	0, 0 »	22,7	13,3	»	»	»	3 410	6 911	213,7	rupture	42,10
On a trouvé d'autre part, pour P = 14 400 en se basant sur des mesures directes												217,0	»	41, 4

L'examen des deux tableaux montre que la différence des résistances n'est pas aussi grande qu'une variation de flèche du simple au triple ou d'un coefficient d'élasticité de 2 à 10 aurait pu le faire supposer : on peut donc en conclure qu'une petite erreur dans l'estimation de ces valeurs sera sans importance pour la pratique.

Que va-t-il se passer quand on soumettra la poutre à une série de surcharges ? L'armature qui avait conservé un certain effort par suite des déformations permanentes acquises dans les premières expériences, comprime toujours la masse ; les surcharges ne reprendront donc leur jeu régulier de déformation qu'après avoir annulé les efforts anormaux produits par ces tensions intérieures. L'examen du troisième tableau montre que cela a lieu pour une surcharge de 5400 kilogrammes environ et que 550 kilogrammes sont absorbés par ce travail.

Les valeurs du 2e tableau paraissent plus exactes que celles du premier.

On calculera les efforts qui vont se produire dans la 2e série d'expériences au moyen de la même hypothèse. Nous admettrons que les coefficients d'élasticité se sont abaissés : pour le fer à $17,2 \times 10^9$; pour le ciment comprimé à $0,32 \times 10^9$ et pour le ciment tendu à $0,08 \times 10^9$.

III

Charges x_1	Allongements en millimètres				Résistances en kilogrammes		
	totaux	permanents	élastiques	théoriques	Ciment comprimé par cm²	Ciment tendu par cm²	Fer par mm²
0,0	»	»	»	»	— 8,6	— 1,04	+ 2,30
1 800	1,00	0.50	0.50	3 × 0,58	17,1	2, 1	9,19
3 600	1,75	0.55	1,20	3 1,46	42,8	5, 2	16,08
5 400	2,60	0,50	2,10	3 2,37	68,5	8, 4	22.97
7 200	3.60	0,40	3,20	3 3,22	94,2	11, 5	29,86
9 000	4,50	0.40	4,10	3 4,10	119,9	14, 6	36.75
10 800	5,50	0,45	5,05	3 4,98	145,6	17, 7	43 64
12 600	6,50	0,50	6,00	3 5,86	171,3	20, 9	50,53

Charges P	Moments au point M (sans charge permanente)	Coefficients d'élasticité			Distances au c.d.g.		Moments d'inertie	Flèches		Moments résistants		Efforts calculés en kg.			Résistance du fer par mm² Chiffres maxima pressions
		Fer par m²	Ciment		Fibre supérieure	Fibre inférieure		théorique	réelle	$\frac{I}{v}$	$\frac{I}{v'}$	Ciment		Fer par mm²	
			comprimé par m²	tendu par m²								comprimé par cm²	tendu par cm²		
kg.	kg. cm.				cm.	cm.	cm⁴	mm.	mm.	cm³	cm³	kg.	kg.	kg.	
1 000	60 400	22 × 10⁹	5 × 10⁹	5 × 10⁹	7,7	21,3	99 598	0, 4	0,4-0,5	12 467	4 507	4, 9	13,4	0,45	0,08 0,81
2 000	120 800	22 »	5 »	2, 8 »	6,8	22,2	67 670	1,12	1,0-1,2	9 950	3 048	12, 1	22,3	1,35	0,74-1,78
3 000	181 200	22 »	5 »	1, 9 »	7,2	22,8	56 389	2,0	1,7-2,0	7 832	2 473	23,13	27,5	2,93	2,25-2,92
4 000	241 600	22 »	5 »	1,25 »	5,9	23,1	51 175	2,96	2,5-3,0	8 674	2 215	27, 9	27,3	3,76	3,41-4,41
5 000	302 000	22 »	5 »	1,10 »	5,8	23,2	45 421	4,06	3,5-4,0	8 048	2 012	37, 5	33,8	4,89	4,62-5,51

Expériences de Lausanne. — Portée de la poutre, $5^m,26$; surcharge totale, uniformément répartie, P : flèche maximum,

$$\frac{5Pl^3}{384EI} = 189,5\,\frac{P}{EI}$$

où P est compté en kilogrammes, E en facteur de 10^9 et I en centimètres carrés à la quatrième puissance.

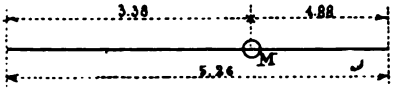


Fig. 107

Le moment au point M (fig. 107) où est mesurée la tension du fer est

$$\frac{P}{526} \times \frac{3,38 \times 188}{2} = 60,4\,P.$$

Le moment maximum en diffère très peu, il est égal à 66 P.

On trouvera dans le tableau suivant les résultats du calcul comparés aux valeurs mesurées dans les 3 premières séries de surcharges.

Le calcul des efforts supportés par une section a été fait comme suit :

Moment au point M, pour une charge de 5000 kilogrammes $= 5000 \times 60,4 = 302000$ kg. cm.

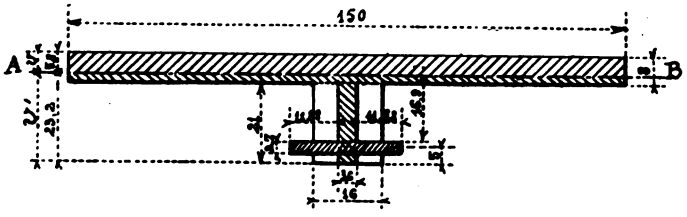


Fig. 108

La figure 108 donne la section transformée en une surface équivalente de béton comprimé dont le coefficient d'élasticité serait uniforme et égal à 5×10^9. La section de l'armature a été amplifiée dans le sens de la largeur dans le rapport de $\frac{22 \times 10^9}{5 \times 10^9}$ et la

section de la nervure dans le même sens dans le rapport $\frac{5,1 \times 10^9}{5 \times 10^9}$. 22×10^9 et $1,1 \times 10^9$ étant les coefficients d'élasticité supposés du fer et du béton.

Le centre de gravité calculé pour cette section, par les méthodes ordinaires est à $0^m,058$ du bord supérieur.

Le moment d'inertie de la section, calculé par rapport à l'axe AB passant par le centre de gravité que l'on vient de déterminer est en centimètres carrés

$$I = \frac{150}{3}\left(\overline{5,8}^3 + \overline{2,2}^3\right) + \frac{3.6}{3}\left(\overline{23,2}^3\right) + \frac{23,76}{3}\left(\overline{19,6}^3 - \overline{16,9}^3\right) = 46677.$$

Les moments résistants sont par suite

$$\frac{I}{v} = \frac{46\,677}{5,8} = 8048 \text{ centimètres carrés}$$

$$\frac{I}{v'} = \frac{46\,677}{23,2} = 2012 \text{ centimètres carrés.}$$

Et les efforts maxima :

Béton à la compression :

$$\frac{302\,000}{8048} = 37^{kg},5 \text{ par centimètre carré}$$

Béton à l'extension

$$\frac{302\,000}{2012} \times \frac{3.6}{16} = 33^{kg},8$$

Fer

$$\frac{302\,000}{2012 \times 100} \times \frac{2,2}{5} \times \frac{17,2}{23,2} = 4^{kg},9 \text{ par millimètre carré.}$$

Nous n'avons rien à ajouter à cette analyse ; nous répéterons toutefois notre réserve du début : *les résultats ci-dessus s'appliquent exclusivement aux cas examinés.* Il faudrait qu'ils fussent corroborés par d'autres expériences pour qu'ils pussent être généralisés. Nous ne pouvons pas nous empêcher de regretter que les importantes expériences exécutées par M. Hennebique dans les bâtiments annexes des écuries du Bon Marché à Paris, n'aient pas été publiées ; nous les avons suivies avec le plus vif intérêt dans l'espoir que leur intelligente disposition permettrait enfin de donner des bases sérieuses à l'étude du ciment armé.

CHAPITRE VII

—

CONSIDÈRE

80. Théorie et expériences de M. Considère. — Nous croyons devoir résumer aussi complètement que possible les diverses études de M. Considère, Inspecteur général des Ponts-et-Chaussées, parce que, à notre avis, elles constituent la base la plus solide qui ait été édifiée jusqu'ici pour le calcul rationnel des ouvrages en ciment armé [1].

Le large emprunt que nous allons faire, non seulement aux idées émises par M. Considère, dans les diverses notes aux Sociétés savantes, mais souvent même à ses propres expressions, à son langage auquel on ne saurait rien changer sans nuire à la clarté de l'exposition, cet emprunt qui a tout l'air d'une compilation grossière, disons-nous, ne laisse pas que de nous embarrasser. Nous avons cependant une excuse, c'est que nous ferons suivre cette analyse, où les citations textuelles seront fréquentes et étendues, d'une longue discussion des formules que M. Considère a si heureusement proposées, nous permettant d'aboutir à des méthodes de calculs entièrement basées sur les principes qui découlent de ses remarquables expériences, et cependant réduites au maximum de simplicité.

(1) I. *Génie civil*, nos des 4, 11, 18 et 25 février 1899. — II. Communication à l'Académie des Sciences, 18 septembre 1899. — III. Communication au Congrès des Méthodes d'essais des matériaux de construction de 1900. — IV. *Annales des Ponts-et-Chaussées*, 4e trimestre 1900. — V. Communication au Congrès de Budapest de 1901.

Ces études, que nous résumons par ordre chronologique, donneront lieu parfois à quelques répétitions; on nous excusera en raison de la valeur des documents recueillis.

MM. Harel de la Noë et M. Considère se sont rencontrés parfois au point de vue des idées émises ; c'est là une coïncidence que nous avons déjà fait remarquer à propos d'autres théories ayant une grande analogie entre elles, bien qu'émanant d'auteurs différents. Il en est ainsi pour les considérations, que l'on va lire, sur les allongements du béton ; mais M. Harel de la Noë a bien voulu reconnaître l'antériorité de M. Considère.

Nous venons de voir ainsi, avec M. Harel de la Noë, que les mortiers ou bétons de ciment usuels ne peuvent supporter sans se rompre des efforts supérieurs à 0,01 millimètre en moyenne et que le travail du métal qui répond à cette déformation n'est que de 2 kilogrammes par millimètre carré. Il semblerait donc que les pièces en ciment armé, sièges d'efforts unitaires de 6 à 10 kilogrammes par millimètre carré d'armature, devraient fatalement se fissurer. Pratiquement il n'en est rien. Quelques constructeurs ont bien parlé de fentes imperceptibles qui se produiraient à la surface du ciment, mais cette observation nous paraît avoir été mal interprétée, attendu que s'il en était ainsi, il ne serait pas possible de réaliser l'étanchéité dans un réservoir en ciment armé.

I et II

81. — M. Considère a d'ailleurs étudié la question de très près en procédant à un grand nombre d'expériences conduites de manière à lever toute indétermination au point de vue du mode de répartition et par suite de l'effet des charges. Ces expériences ont porté sur des prismes moulés de $0^m,60$ de longueur et de $0^m,06 \times 0^m,06$ de section. Les uns étaient en béton dépourvu d'armatures, les autres étaient armés, du côté de la face tendue, de barres rondes dont le diamètre a varié de 1,9 à 7,7 millimètres. Le plus grand nombre ne comportait aucune liaison métallique transversale.

Le prisme d'essai est disposé verticalement (fig. 109), son pied encastré et sa tête coiffée d'un fléau horizontal portant à son extrémité un plateau destiné à recevoir des poids. La longueur du

bras de levier était de $0^m,70$. En chargeant le plateau, on donne naissance à des *moments constants, sans efforts tranchants*, dans toute la partie comprise entre les bords intérieurs des encastrements.

Voici la monographie d'un de ces essais (les autres ont donné des résultats concordants). Les diverses éprouvettes avaient été fabriquées avec la même gachée de béton dosé à raison de 433 kilogrammes de ciment Portland et 160 litres d'eau, par mètre cube de bon sable de mer quartzeux ; les unes n'étaient nullement armées ; les autres étaient armées, soit de 17 fils de 1,9 millimètre, soit de 3 fils de 4,25 millimètres ou enfin d'une seule barre ronde de 7,7 millimètres.

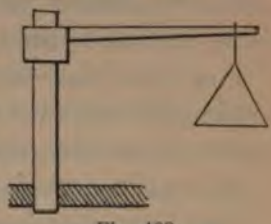


Fig. 109

Le prisme non armé s'est rompu après avoir soutenu pendant plusieurs minutes un moment de flexion de 11,48 kilogrammètres, qui a produit un raccourcissement de 0,131 millimètre des fibres comprimées et un allongement de 0,201 millimètre des fibres tendues : cet allongement paraît même avoir atteint 0,266 millimètre au moment de la rupture.

Les 3 groupes de prismes armés ont donné des résultats identiques. Le prisme armé de 3 barres de 4,25 millimètres dont les axes se trouvaient à 7 millimètres de la face extérieure, a subi *sans se rompre* un premier moment de flexion de 78,60 kilogrammètres et *des allongements de* 1,98 millimètre, soit 20 *fois plus grands* que ceux observés dans les essais usuels à la traction des bétons non armés. Puis le même prisme a été soumis à 139052 moments de flexion variant de zéro à une valeur comprise entre 34,58 kilogrammes et 55,58 kilogrammètres les répétitions de charge ont donné lieu à 139052 allongements variant de 0,545 millimètres à 1,270 millimètres. On a ensuite détaché à la scie la partie du béton comprise entre l'armature et la face extérieure tendue, sous forme de baguettes de 15 × 12 millimètres de section et de 80 à 120 millimètres de longueur. Ces baguettes ont résisté sans sans se rompre à des efforts d'extension allant jusqu'à 22 kilogrammes. Ces efforts résultaient de la production d'un moment fléchissant.

Ces expériences montrent donc bien que les *agglomérats de ciment peuvent supporter dans les pièces armées des allongements dépassant de beaucoup* (20 *fois supérieurs*) *ceux qui sont généralement reconnus comme devant produire la rupture dans les pièces non armées.*

Comme nous l'avons dit plus haut, c'est M. Considère qui a le premier signalé ce fait dont l'importance est considérable pour le calcul du ciment armé.

Pour lever toute indécision à ce sujet, M. Considère a déterminé, pour une série de charges, la partie du moment total supportée par le béton seul. Les calculs consistaient à mesurer dans chaque cas la déformation des faces tendue et comprimée; de la valeur de ces déformations, il a déduit la position de l'axe neutre le centre de compression et le travail du métal. En prenant les moments des forces par rapport au centre compression, il obtenait le moment supporté par l'armature, et par suite, par différence avec le moment total, le moment supporté par le béton tendu. Les résultats de ces calculs sont consignés dans le tableau suivant

TABLEAU N° 1

Moments de flexion supportés par le prisme	Distance de l'axe neutre à la surface		Allongements		Valeur de E pour le fer	Tension du fer		Bras de levier de cette tension	Moments produits par le fer	Moments produits par le béton — Différences des colonnes 1 et 10
	comprimée	tendue	constatés du béton	calculés du fer		par mm²	totale			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
kgm.	mm.	mm.	mm.	mm		kg.	kg.	m.	kgm.	kgm.
5,18	28,7	32,3	0,038	0,031	$2,17 \times 10^9$	0,67	28	0,0450	1,28	3,90
11,48	28,7	32,3	0,092	0,075	2,17 »	1,63	69	0,0450	3,12	8,38
19,88	28,7	32,3	0,186	0,145	2,17 »	3,15	134	0,0450	6,03	13,85
30,38	27,4	33,6	0,424	0,337	2,15 »	7,25	309	0,0450	13,90	16,48
40,88	25,5	35,1	0,775	0,620	2,11 »	13,10	558	0,0445	24,83	16,05
49,28	25,3	35,7	1,050	0,840	2,10 »	17,60	750	0,0442	33,15	16,13
63,98	24,4	36,7	1,520	1,230	2,06 »	25,34	1079	0,0440	47,48	16,50
78,68	24,4	36,6	1,980	1,600	2,00 »	32,00	1363	0,0440	59,97	18,71

La pièce avait une section rectangulaire de 0,061 de hauteur et

0,062 de largeur ; les axes des armatures supérieures se trouvaient à 7 millimètres de la face supérieure.

La colonne 11 montre que le moment résultant du béton tendu a d'abord crû régulièrement, puis plus lentement et qu'il a conservé la valeur de 16 kilogrammètres jusqu'à la fin de l'opération. On est donc conduit logiquement à admettre que si le béton a pu se rompre en quelques points, sa résistance n'a pas varié sur la presque totalité de la pièce et cela sans rupture. Ce fait a été encore confirmé par l'essai direct des éprouvettes.

D'ailleurs ce fait, paradoxal en apparence, s'explique très bien quand on réfléchit au phénomène connu sous le nom de *striction des barres* métalliques. Si on tend jusqu'à rupture une tige cylindrique d'acier doux, on constate d'abord un allongement croissant d'une façon uniforme jusqu'à une valeur comprise entre 18 et 22 % de la longueur totale ; on observe ensuite un étranglement subit de la section, dans lequel l'allongement atteint le double, le triple de la longueur primitive de la partie rétrécie. Pendant toute la durée de ce phénomène, l'effort total d'extension se maintient à peu près constant.

Si cette tige avait été rendue solidaire d'une autre barre plus résistante et plus élastique, il est probable qu'on aurait observé, au lieu d'un grand allongement localisé sur une petite longueur, le même allongement réparti sur toute la longueur de la barre, de sorte que celui-ci aurait pu atteindre une valeur double ou triple de la longueur primitive. Il est probable aussi que l'effort total supporté par la barre n'aurait pas crû sensiblement à partir du commencement de la période de grande déformation [1].

Les armatures permettent donc au béton de développer toute sa ductilité et par suite le maximum de sa résistance dans une grande partie de ses fibres tendues ; elles ont encore un autre effet ; elles compensent les inégalités de résistance entre les diverses sections de la barre. Les différences de résistance obser-

[1] Dans le béton armé, l'armature jouerait le rôle de la barre plus résistante et plus élastique, laquelle contraindrait le béton à prendre sur toute sa longueur des allongements de striction considérable. Cette ingénieuse comparaison qui fait bien comprendre le rôle de l'armature a été développée par plusieurs auteurs, notamment par M. Résal.

vées dans le béton non armé (moment de rupture 11,48 kilogrammètres) et dans le béton armé (moment de rupture 16 à 18,71 kilogrammètres) trouvent donc une explication satisfaisante avec ces deux hypothèses.

Dans l'expérience ci-dessus, dans laquelle l'allongement du béton a atteint 2 millimètres par mètre, l'armature était formée de fils recuits dont la limite d'élasticité atteignait 38 kilogrammes. La limite d'élasticité des fils employés en pratique oscille entre 18 et 23 kilogrammes pour le fer, entre 20 et 26 kilogrammes pour l'acier doux. On sait que dès que le métal travaille au-dessus de cette limite, son coefficient d'élasticité tombe brusquement au $\frac{1}{10}$ et même au $\frac{1}{50}$ de sa valeur primitive ; le mortier cesse donc d'être soutenu dans la même proportion et l'on ne doit pas être surpris de voir des fissures se manifester bien avant que l'allongement n'ait atteint la valeur indiquée par l'expérience précédente.

Le tableau mentionné plus haut permet de déterminer les coefficients d'élasticité du béton et même à l'aide de quelques tâtonnements les efforts approximatifs qu'il supporte. Les coefficients d'élasticité sous faible charge ont été trouvés de $2,44 \times 10^9$ pour la partie tendue et de $3,85 \times \overline{10}^9$ pour la partie comprimée. Cette différence provient uniquement d'une différence de pilonnage, une série d'expériences ayant montré que ces coefficients sont égaux pour de faibles charges, quand les mortiers sont identiques. Les efforts supportés sont consignés dans le tableau suivant :

Allongements du mortier (millimètres)	0,04	0,10	0,25	0,50	1,00	»	1,50	1,98
Tensions des armatures (kilogrammes)	9,70	16	18	21	21,1	»	21,2	21,3
Raccourcissements du mortier (millimètres)	0,04	0,10	0,25	0,50	1,00	1,23	»	»
Compressions correspondantes (kilogrammes)	15,60	35	66	108	177	207	»	»

Portant ces allongements (ou raccourcissements) en abscisses et les efforts correspondants en ordonnées, on obtient des courbes analogues à celles représentées figures 114 et 115.

Ces chiffres correspondent à des prismes préparés avec des soins tout particuliers. M. Considère propose d'employer les valeurs suivantes pour les mortiers de fabrication courante, contenant au plus 300 kilogrammes de ciment au mètre cube.

Allongements ou raccourcissements. (millimètres)	0,04	0,10	0,25	0,50	1,00	1,50
Tensions (kg. cm²)	7,5	11	12	12	12	12
Compressions (kg. cm²).	7,5	18	40	65	105	150

Cette proposition nous a paru plutôt timide, nous nous sommes déterminés à adopter 20 kilogrammes comme tension limite des bétons tendus exécutés en pratique au dosage de 300 kilogrammes de ciment pour $0^{m3},400$ de sable et $0^{m},850$ de gravillon, les applications de ces valeurs aux formules Considère nous ayant donné des résultats très voisins de ceux que l'on obtient en pratique.

Détermination du module de résistance d'une section. — Nous ferons abstraction tout d'abord de la résistance aux efforts tranchants et nous nous occuperons uniquement de la résistance aux moments de flexion.

Il résulte de ce qui précède que les premières fissures n'apparaissent dans le béton tendu que lorsque l'armature travaille à sa limite d'élasticité.

En dehors de ce souci, il n'y a donc plus que celui qui concerne la résistance du béton à l'écrasement, ce qui montre la sécurité, si ce n'est l'économie des prismes en béton armés à la fois vers leurs faces tendue et comprimée.

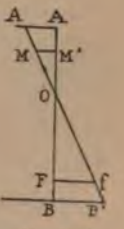


Fig. 110

Nous considérerons comme sensiblement exacte l'hypothèse de la conservation des sections planes (les déformations croissent proportionnellement à leur distance à la fibre neutre).

Soit AB (fig. 110) la section d'une poutre en ciment armé ; F le point où se trouve l'armature d'un métal dont la limite d'élasticité est de 16 kilogrammes (on suppose que cette armature travaille à cette limite).

Portons en F, normalement à AB, une longueur

$$Ff = \frac{16 \times 1000}{20000} = 0^{mm},8$$

égale à l'allongement par mètre du métal travaillant à 16 kilogrammes. Menons ensuite par f une droite fA', telle qu'elle représente le lieu des déformations des différentes fibres de AB. L'effort produit en un point quelconque M s'obtiendra en mesurant l'allongement MM' et en recherchant sur la figure à quel effort correspond cet allongement. On déterminera ainsi tel autre effort que l'on voudra, produit sur un point quelconque de AB et faisant la somme de ces forces intérieures on pourra vérifier si elle s'écarte peu de zéro; s'il en est ainsi c'est que la droite A'B' a été bien tracée; s'il n'en est pas ainsi on changera la direction de la droite fA', jusqu'à ce que la condition ci-dessus soit satisfaite. Cette direction déterminée ainsi par tâtonnements, il suffira de faire la somme des moments des forces appliquées à tous les points de la section à AB, pris par rapport à l'axe neutre (qui passe par le point O).

Cette opération un peu longue ne peut donner satisfaction à l'ingénieur toujours pressé, chargé de l'étude des projets. M. Considère fait donc remarquer très judicieusement que *si l'on réfléchit à l'irrégularité des propriétés du béton on pensera qu'il n'y a pas lieu de rechercher au prix de complications une exactitude absolue dans les procédés de calcul des dimensions*, et il propose la méthode rapide, mais approximative suivante :

On suppose que le prisme a une section rectangulaire, de hauteur h, d'épaisseur e (exprimées en centimètres).

Soit :

p, le pourcentage du métal;

hu, la distance du centre de gravité des armatures à la face tendue du prisme;

hx, la distance de l'axe neutre aux fibres tendues extérieures du béton [1];

t, le taux de travail à la tension qui s'exerce dans le béton tendu, dès que son allongement atteint $0^{mm},15$ à $0^{mm},20$, tension qui reste constante pour des déformations croissantes ;

C, le taux de travail maximum à la compression ;

[1] On verra par la suite combien sont heureuses ces notations auxquelles on s'habitue bien vite, les dimensions absolues étant exprimées par h, hu, hx, les dimensions relatives sont exprimées par : 1, u et x.

l, la limite d'élasticité du métal, exprimée en kilogrammes par millimètre carré ;

k le rapport $\frac{Eb}{Ef}$ du coefficient d'élasticité du béton comprimé à celui du métal. On a approximativement

$$Eb = 1{,}9 \times 10^9 ; \quad Ef = 19 \times 10^9 \quad \text{et par suite } k = \frac{1}{10}.$$

Dans cette première étude, M. Considère remplace la courbe vraie des efforts *poqm*, dans la partie comprimée par la droite *ro*, dans la partie tendue par l'horizontale *hm* (fig. 112).

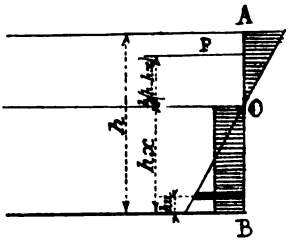


Fig. 111

On supposera donc en d'autres termes que les efforts sont proportionnels aux déformations du béton, dans la partie comprimée, et qu'ils sont constants au contraire dans la partie tendue, suivant le diagramme de la figure 111 cotée d'après les notations ci-dessus.

D'après ce diagramme, le taux de travail maximum à la compression C est exprimé par

$$C = kl \frac{h - hx}{hx - u} = kl \frac{1 - x}{x - u}$$

et en exprimant que les forces horizontales de compression font équilibre aux forces horizontales d'extension, on a, en représentant la section métallique par *peh*

$$tx \times eh + 100lp \times eh = \frac{kl}{2} \frac{1 - x}{x - u} (h - hx)e$$

(la valeur de l est multipliée par 100, parce que M. Considère a suivi l'usage d'exprimer les taux de travail des métaux en kilogrammes par millimètres carrés, et non en centimètres, unité choisie pour le ciment armé).

On a donc en divisant par *eh*

$$tx + 100\, lp = \frac{kl}{2} \frac{(1 - x)^2}{x - u}.$$

On aura aussi en égalant le moment des forces extérieures M à la somme des moments des forces intérieures pris par rapport au centre de compression P, dont la distance à l'axe neutre est exprimée par $\frac{2(h-hx)}{3}$.

$$M = tx \times eh\left[\frac{2(h-hx)}{3} + \frac{hx}{2}\right] + 100lp \times eh\left[\frac{2(h-hx)}{3} + hx - hu\right]$$

ou

$$M = eh^2\left[tx\,\frac{4-x}{6} + 100lp\,\frac{(2+x-3u)}{3}\right].$$

Le facteur commun eh^2, est égal à l'unité pour $e = 1$ et $h = 1$. Le tableau suivant résume les résultats des calculs obtenus à l'aide de ces formules pour $eh^2 = 1$, et diverses valeurs de l, k et p.

Numéros	Matériaux employés		Limite d'élasticité du métal	Résistance du béton		Pourcentage du métal	Rapport $K = 100\,\frac{Eb}{Ef}$	Distance de l'axe neutre à la face tendue	Pression réelle du béton	Moment résistant de flexion	Dépense par mètre cube	Dépense par kilogrammètre
	Métal	Béton		à la traction	à la compression							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
			kg.	kg.	kg.				kg.	kgm.	fr.	fr.
1	Fer	à 300k ciment	16	12	150	0.01	7.0	0,57	107	0,157	65	414
2	»	»	16	12	150	0,02	6,5	0,49	143	0,262	85	324
3	»	»	16	12	150	0,03	6,0	0,42	186	0,300	105	291
4	»	à 800k ciment	16	30	360	0,01	10,0	0,57	193	0,216	85	393
5	»	»	16	30	360	0,03	9,0	0,46	231	0,417	125	299
6	»	»	16	30	360	0,04	8,7	0,42	264	0,516	145	281
7	Acier	»	30	30	360	0,01	10,0	0,60	226	0,327	87	266
8	»	»	30	30	360	0,02	8,5	0,51	313	0,521	109	209

Pour passer de ces valeurs à celles relatives à un prisme de largeur e et de hauteur h, quelconques, il suffira de multiplier les moments résistants M donnés par la colonne 11, par le produit eh^2, (e et h étant exprimés en centimètres).

Les chiffres des colonnes 12 et 13 ont été établis sur la base des prix unitaires suivants :

Béton à 300 kilogr., y compris main d'œuvre et coffrage. .	45 fr.	le mètre cube.
Béton à 800 » » » . .	65 »	»
Fer	20 »	les 100 kilogr.
Acier	22 »	»

On remarquera que la position de la fibre neutre dépend du pourcentage, ce qu'il était facile de prévoir. M. Considère fait observer en outre au sujet de la position de la fibre neutre « qu'elle se déplace le plus souvent d'une manière notable pendant le cours du chargement. Au début, l'élasticité du béton étant parfaite, la partie armée a forcément un coefficient d'élasticité plus élevé que l'autre partie si le béton est homogène, l'axe neutre est donc compris entre l'armature et le milieu de la section. Mais à mesure que les charges augmentent, l'élasticité du béton tendu s'altère de plus en plus, tandis que celle du béton comprimé ne se modifie d'abord que légèrement. L'axe neutre doit donc se déplacer et se déplace, en effet, en s'éloignant de l'armature. C'est ainsi que dans l'essai de nombreux prismes armés à raison de 1 %, l'axe neutre qui était d'abord très voisin du milieu de la section, s'est avancé jusqu'aux 0,58 ou 0,60 de la hauteur à mesure qu'on augmentait la charge. Ces chiffres sont très voisins de la valeur de 0,57 qui donne le tableau pour le pourcentage de 0,01 ».

On ne sait pas grand chose sur la résistance des mortiers aux efforts répétés. « En attendant des expériences concluantes, il est prudent d'admettre que les efforts répétés doivent, en tout cas, rester inférieurs aux deux tiers des charges d'écrasement que nous avons indiquées dans la colonne 6 du tableau. C'est la proportion que Woehler a trouvée pour les métaux. Si l'on admet en conséquence que le béton s'écrase sous les charges indiquées dans la colonne 6 ou sous leurs deux tiers, suivant que l'effort est permanent ou répété, on concluera de l'examen du tableau, et en interpolant, que, pour que l'écrasement du béton comprimé ne se produise pas avant le dépassement de la limite d'élasticité des armatures, il faut que le pourcentage de ces dernières pour un béton de 300 kilogrammes de ciment ne dépasse pas 0,0217, s'il s'agit de pièces soumises à un effort permanent et qu'il doit être inférieur à 0,0082 si la pièce doit subir des efforts répétés ». De même, un béton à 800 kilogrammes de ciment « peut supporter un pourcentage de fer de 0,056, si la charge est permanente, et de 0,033 environ si les efforts sont répétés et des pourcentages d'acier de 0,025 et 0,012. Ces valeurs peuvent d'ailleurs être établies très facilement par des formules spéciales.

Le tableau ci-dessus permet aussi de se rendre compte de l'effet de la substitution de l'acier dur au fer ordinaire ; comme il est employé tel quel dans le béton armé, sans travail et sans préparation, qu'il est protégé contre toute action extérieure, son emploi ne paraît présenter aucun inconvénient.

« L'augmentation de pourcentage du métal donne de la raideur et l'emploi de l'acier, travaillant dans les conditions indiquées, donne, au contraire, aux pièces armées, de l'élasticité et la faculté de supporter sans fissures, des déformations deux fois plus grandes. Si l'on peut faire de sérieuses réserves sur l'emploi de l'acier travaillant à une tension double de celle qu'on admet pour le fer, il semble qu'on ne saurait guère en formuler contre la substitution de ce métal à poids réduit de 1/10 seulement, de manière à obtenir la même dépense. En effet, la limite d'élasticité de l'acier dépasse celle du fer dans cette proportion de 1/10 et, par suite, si l'on emploie de l'acier avec cette réduction de poids, tout se passera exactement de la même façon que si on avait conservé le fer, tant que les armatures subissent des efforts inférieurs à la limite d'élasticité du fer ; mais si cette charge est dépassée, les poutres armées de fer se fissureront et se disloqueront complétement, tandis que celles qui seront armées d'acier n'éprouveront d'avaries que lorsque l'écrasement du béton se produira dans les fibres comprimées.

« Il y a là une supériorité évidente qui semble n'être compensée par aucun inconvénient sérieux ».

Coefficients de sécurité. — Le réglement sur les ponts métalliques du 29 août 1891 prescrit dans les grands ouvrages, où les chocs sont peu à craindre les taux de travail suivants par millimètre carré : $8^{kg},50$ pour le fer et $11^{kg},50$ pour l'acier extra-doux. Ces chiffres se rapprochent du quart de la résistance de ces métaux à la rupture et de la moitié de leurs limites d'élasticité minima.

Si l'on remarque qu'il n'y a pas un seul ouvrage métallique qui ne s'écroulerait dès que la limite d'élasticité serait atteinte surtout dans les pièces comprimées, on doit admettre que le coef-

ficient de sécurité ne dépasse guère 2 dans les grandes constructions métalliques. Dans les petits ouvrages, les efforts maxima sont réduits à $6^{kg},5$ et $8^{kg},50$, mais cette diminution de travail est à peine suffisante pour tenir compte de l'accroissement du danger résultant des trépidations, des chocs et de l'action de la rouille. Ces diverses causes de destruction sont peu à craindre dans le béton armé et par suite, on pourrait être tenté d'adopter pour elles un coefficient de sécurité de 2 par rapport aux moments de rupture que nous avons calculés et au-dessous desquels la ruine de la construction ne paraît pas à craindre.

Il est rare que les constructeurs fassent une différence entre les efforts permanents et les efforts répétés ; il en résulte que les coefficients de sécurité de leur construction par rapport aux formules ci-dessus (travail du fer, 16 kilogrammes ; travail du béton à 300 kilogrammes. 150 kilogrammes pour une charge permanente et 100 kilogrammes seulement pour des efforts répétés) varient suivant le genre de construction considérée. Dans les constructions Hennebique, ce coefficient de sécurité varie de 2,3 à 2,7 pour les efforts permanents et de 1,73 à 2,30 pour des efforts répétés. Il semble donc que l'on pourra « adopter un coefficient de sécurité de 2,5 par rapport aux limites dangereuses que l'on déterminera pour chaque type de construction après avoir fait des essais ou recueilli des renseignements certains sur les matériaux qu'on compte y employer ».

Déformations du béton armé soumis aux efforts répétés. — Un prisme semblable à celui qui a été étudié précédemment, a été chargé à trois reprises différentes de façon à produire respectivement des moments de flexion de 24,08, 38,78 et $51^{kgm},38$. La charge a été enlevée graduellement dans chaque cas et l'on a mesuré les allongements et les raccourcissements produits sur la face tendue et comprimée. Ces allongements sont consignés dans le tableau suivant.

On voit que les allongements présentent de grandes différences suivant les cas et que l'application de charges bien supérieures à la première a eu pour effet d'augmenter les allongements du béton et par suite de doubler presque le travail du fer.

1er Cas de chargement									
Moments de flexion en kilogrammètres	0,57	5,18	11,48	17,78	24,08	17,78	11,48	0,57	»
Allongements du béton en millimètres par mètre . .	0	0,035	0,089	0,149	0,254	0,208	0,143	0,022	»
Raccourcissements du béton en millimètres par mètre .	0	0,008	0,057	0,125	0,213	0,200	0,146	0,026	»
2e Cas de chargement									
Moments de flexion en kilogrammètres	0,57	30,38	38,78	30,38	24,08	13,58	0,57	»	»
Allongements du béton en millimètres par mètre . .	0,022	0,408	0,694	0,597	0,478	0,313	0,084	»	»
Raccourcissements du béton en millimètres par mètre .	0,026	0,322	0,489	0,447	0,346	0,231	0,052	»	»
3e Cas de chargement									
Moments de flexion en kilogrammètres	0,57	24,08	38,78	51,38	38,78	30,38	24,08	13,58	0,57
Allongements du béton en millimètres par mètre . .	0,084	0,432	0,724	1,137	0,929	0,751	0,575	0,386	0,130
Raccourcissements du béton en millimètres par mètre .	0,052	0,296	0,506	0,741	0,647	0,520	0,377	0,276	0,073

On a déterminé à l'aide de ces valeurs et d'après le procédé qui a été indiqué pour le calcul du tableau n° 1, les moments produits par le fer et par le béton comprimé, celui du béton tendu ressortant par différence sur le moment total. Le centre de pression du béton comprimé a été supposé aux 2/3 de la hauteur de la zone comprimée, comptés à partir de l'axe neutre; les centres de tension sont supposés confondus avec les centres de gravité des parties tendues. Les résultats de ces calculs sont consignés dans le tableau suivant, pour le troisième cas de chargement.

Il n'y a pas lieu de compter sur une grande exactitude des chiffres de la ligne 13 et de ceux des lignes 14 et 15 qui en dépendent si l'on se rappelle l'hypothèse faite sur l'uniformité de la tension de la partie tendue. Ces chiffres ne sont donnés qu'à titre d'approximation.

En divisant les variations de tension Δt qui résultent des différences de la ligne 15 par les variations correspondantes des

1	Moments, en kilogrammètres.	51,38	38,73	30,38	24,08	13,58	0,57
2	Distance de l'axe neutre à la face comprimée, en millimètres.	26,2	25,2	25,0	24,3	25,8	22,1
3	» » » tendue »	33,8	34,8	35,0	35,7	34,2	37,9
4	Allongements par mètre du mortier, en millimètres . . .	1,137	0,929	0,751	0,575	0,386	0,130
5	» » du fer » . . .	0,903	0,743	0,601	0,463	0,307	0,106
6	Valeurs de E pour le fer	$2,1 \times 10^9$	$2,1 \times 10^9$	$2,11 \times 10^9$	$2,14 \times 10^9$	$2,16 \times 10^9$	$2,17 \times 10^9$
7	Tension du fer par millimètres carrés, en kilogrammes . .	18,96	15,60	12,68	9,91	6,63	2,30
8	» totale du fer » » . .	807	664	540	422	282	97
9	Bras de levier de cette tension, en mètres.	0,0435	0,0440	0,0440	0,0450	0,0450	0,0460
10	Moments produits par le fer, en kilogrammètres	35,14	29,24	23,77	19,00	12,71	4,51
11	» » mortier »	16,24	9,54	6,61	5,08	0,87	— 3,94
12	Surface du mortier tendu, en centimètre carré	20,96	21,58	21,70	22,13	21,20	23,50
13	Bras de levier de cette tension, en mètres	0,0343	0,0342	0,0341	0,0340	0,0340	0,0337
14	Produits des lignes 12 et 13	718	737	739	746	720	791
15	Tension moyenne du mortier $\frac{\text{ligne 11}}{\text{ligne 14}}$, en kilogrammes . .	22	12	9	6	1	— 5

allongements Δa, on obtient les valeurs successives du *coefficient instantané d'élasticité*. Ces valeurs sont données par le tableau suivant :

Allongements du mortier a	Variations d'allongements Δa	Tensions moyennes du mortier t	Variations de tension Δt	Coefficients instantanés d'élasticité $\frac{\Delta t}{\Delta a}$
mm.	mm.	kg.	kg.	
1,137		22		0,48 × 10^9
0,929	0,208	12	10	0,17 »
0,751	0,178	9	3	0,17 »
0,575	0,176	6	3	0,17 »
0,386	0,189	1	5	0,26 »
0,130	0,256	— 5	6	0,24 »

Il ne faut pas attribuer à ces valeurs une exactitude rigoureuse ; on peut toutefois « en déduire avec certitude ce qui est inscrit en italique et avec vraisemblance les membres de phrases inscrits en caractères ordinaires ».

« *Quand, après avoir subi un moment élevé de flexion le prisme est déchargé progressivement, le coefficient instantané d'élasticité des fibres tendues, a d'abord une valeur assez élevée*, qui peut atteindre au moins le 1/4 ou le 1/5 du coefficient d'élasticité parfaite du béton dont il est formé.

Si le déchargement continue, le coefficient instantané d'élasticité diminue ensuite très rapidement et paraît devenir inférieur au 1/10 du coefficient d'élasticité parfaite du béton.

L'examen de l'avant-dernier tableau montre que le métal est resté en tension, mais que cette tension est assez faible $2^k,30$ par millimètre carré après avoir subi un allongement de 1,137 et un effort de $18^k,96$.

En résumé, la résistance du béton armé aux efforts répétés vient, pour une faible part, de la tension permanente que les déformations donnent aux armatures et, pour la plus grande partie, d'une diminution considérable du coefficient d'élasticité du béton sans diminution corrélative de la résistance à la rupture.

Quand on répète la charge d'un même prisme en l'élevant chaque fois à une valeur voisine de la rupture, on observe chaque fois un accroissement d'allongement. Cet accroissement a été pour le prisme étudié précédemment de 0,023 ; 0,015 ; 0,014 millimètre à chaque répétition du même moment de 51,38 kilogrammètres ; mais il semble diminuer peu à peu et tendre vers zéro quand l'effort reste dans les limites dans lesquelles le prisme armé peut supporter la répétition indéfinie.

Il semble que le béton allongé prend un nouvel état de régime qui lui permettra de supporter les répétitions d'efforts en travaillant le moins possible.

Il résulte de ce qui précède que les répétitions d'efforts seront d'autant plus dangereuses que les *variations auront plus d'amplitude*. Une barre alternativement tendue et comprimée, par exemple, se rompra beaucoup plus facilement qu'une barre ne supportant à chaque répétition que le même genre d'effort.

Le béton suivrait donc apparemment des lois analogues à celles que Woehler a établies pour les métaux. On peut en tout cas affirmer que les « déformations du béton dans les pièces armées lui donnent des propriétés nouvelles, telles qu'on pouvait les souhaiter en vue de la résistance ».

Conséquences possibles des malfaçons. — La résistance du béton à l'extension est très variable, de 21 kilogrammes pour des dosages de 433 kilogrammes de ciment ; elle est descendue à 12 kilogrammes pour des dosages à 300 kilogrammes et même dans ce dernier cas à 8 kilogrammes quand le pilonnage était effectué d'une manière par trop défectueuse. Examinons ce que deviendrait la résistance du prisme quand la partie tendue du béton se romprait jusqu'à la fibre neutre ; faisons pour cela $t = 0$ dans les formules établies précédemment. En donnant au pourcentage p, différentes valeurs, on obtiendra le tableau suivant.

Pour les poutres fissurées, les pourcentages les plus favorables sont pour les armatures en fer de 0,0274 et pour les armatures en acier de 0,033. Dans l'un et l'autre cas les différences entre les moments de résistance des poutres intactes et des poutres fissurées, *diminuent* quand le *pourcentage augmente*, pour s'annuler aux valeurs $p = 0,0300$ et $p = 0,0350$. Cette anomalie apparente

provient du fait que la pression maxima du béton a été supposée constante et du déplacement de l'axe neutre vers la partie comprimée.

Désignation	Béton à 300 kilogrammes et fer				
Valeurs du pourcentage.	0,0100	0,0200	0,0217	0,0240	0,0300
Moments des poutres intactes. . . .	0,157	0,262	0,280	0,290	0,296
Moments des poutres fissurées. . . .	0,121	0,229	0,250	0,274	0,296
Perte de résistance due aux fissures .	$\frac{36}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{5}{100}$	0
Désignation	**Béton à 800 kilogrammes et acier**				
Valeurs du pourcentage.	0,0100	0,0200	0,0250	0,0330	0,0350
Moments des poutres intactes. . . .	0,327	0,521	0,620	0,700	0,725
Moments des poutres fissurées . . .	0,230	0,438	0,540	0,687	0,725
Perte de résistance due aux fissures .	$\frac{30}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{2}{100}$	0

On arrive donc à ce résultat que les fissures du béton tendu diminuent de beaucoup la résistance des poutres faiblement armées, mais n'exercent pour ainsi dire aucune influence sur celle des poutres où le pourcentage du métal est notablement supérieur à la valeur qui procure le maximum d'économie.

Les malfaçons peuvent encore avoir pour conséquence une diminution du coefficient d'élasticité. En supposant dans les formules précédentes que ce coefficient varie de 60 %, on trouve que le moment de rupture ne varie que de 17 à 20 %.

Les conséquences d'une fabrication défectueuse sont donc moins à craindre qu'on aurait pu le supposer et pour y parer complètement, il suffit d'adopter un coefficient de sécurité suffisant : il semble que celui de 2,50 indiqué précédemment présentera toute garantie.

III. — *Note présentée au Congrès international des Méthodes d'essai des Matériaux, tenu à Paris du 9 au 16 juillet* 1900.

82. — Cette note a principalement pour but d'indiquer une *méthode d'épreuve des constructions en béton armé*. L'auteur, après

avoir montré la nécessité de ces épreuves et la difficulté théorique du calcul des flèches, propose *la mesure de déformations locales* et leur comparaison avec les résultats que l'on est normalement en droit d'attendre d'un béton normal et sainement constitué. Nous allons résumer brièvement les divers chapitres dont quelques-uns ne sont du reste que les résultats des expériences qui ont fait l'objet de la note citée précédemment.

Variations du coefficient d'élasticité instantané, à la compression. — Le coefficient d'élasticité instantané diminue quand la pression augmente, *dans une faible mesure*, tant que la pression n'atteint pas le tiers de la charge de rupture, *notablement* quand la pression se rapproche de la moitié de la valeur de la charge de rupture, *très rapidement* au delà, jusqu'à devenir inférieure au vingtième de sa valeur primitive pour des pressions voisines de celles qui occasionnent la rupture.

Loi de déformation du béton soumis à une première traction. — « Tant que le mortier armé ne supporte que des tensions et des allongements inférieurs ou égaux à ceux qu'il pourrait subir sans se rompre dans les prismes non armés, son coefficient d'élasticité reste sensiblement constant et, par suite, les tensions augmentent presque proportionnellement aux allongements. C'est la période d'élasticité de tous les éléments de la construction armée. »

« Lorsque les déformations dépassent cette limite, le mortier s'allonge de plus en plus sans que sa tension s'accroisse notablement, et par suite son coefficient d'élasticité devient presque nul. »

Loi de déformation du béton soumis à des efforts de traction répétés. — Lorsqu'une pièce armée est soumise à des successions de déchargements et de rechargements, le coefficient instantané d'élasticité a, dans l'une quelconque de ces opérations, une valeur à peu près constante et d'autant plus faible que la déformation maximum a été plus grande. »

« La répétition des mêmes efforts produit une diminution du coefficient d'élasticité qui est d'abord notable, mais qui tend vers zéro. »

Déformation d'un prisme fléchi. — Proposons-nous de déter-

miner la déformation d'un prisme ABCD, (fig. 112, en supposant :

1° Que la section CD reste fixe ;

2° Que les sections planes restent planes ;

3° Qu'il n'y a pas d'effort intérieur avant la mise en charge.

On pourrait opérer comme il a été déjà dit dans la note précédente ; c'est-à-dire on supposera que la section AB vient en A'B'. Les ordonnées des triangles OAA' et OBB' représentent les déformations. Les déformations donneront, à l'aide des courbes de compression et de tension les efforts correspondants. Ces efforts connus, on vérifiera si les équations d'équilibre des forces et des moments sont satisfaites. Si cela n'avait pas lieu, on recommencerait l'opération avec une nouvelle ligne A'B.

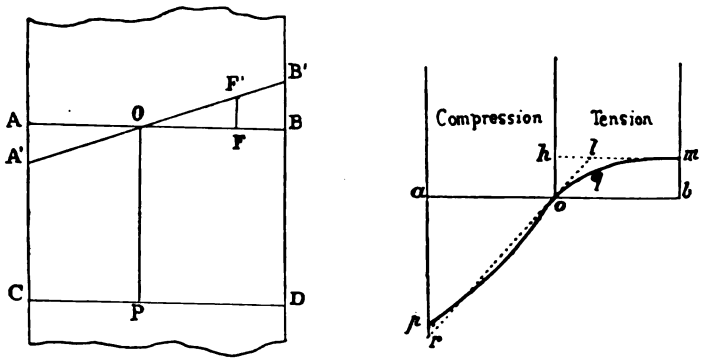


Fig. 112

Cette étude est forcément très longue, il y a donc lieu de la simplifier en substituant au contour réel *poqm*, un contour polygonal. Dans l'étude précédente, le contour réel a été remplacé par le contour *rohm*. Dans l'étude qui suit on lui substituera le contour *rolm*, se rapprochant davantage de la courbe vraie.

Nous aurons en employant les mêmes notations que précédemment et en désignant par *f* la tension du fer :

1° En égalant la somme des tensions du métal et du béton à la somme des compressions du béton (fig. 113) :

$$t.hx.c - \frac{t}{2}\frac{(h-hx)\,t}{c}.e + 100pfch = \frac{c}{2}(h-hx)\,e,$$

d'où, en divisant par he

$$(1) \qquad tx - \frac{t^2}{2c}(1-x) + 100pf = \frac{c}{2}(1-x).$$

2° En égalant le moment des forces extérieures M, au moment des forces intérieures pris par rapport à l'axe neutre :

$$M = t.hxc \times \frac{hx}{2} - \frac{t}{2}\frac{(h-hx)\,t}{c}.e \times \frac{(h-hx)\,t}{3c}$$

$$+ 100\,pfch \times (hx - hu) + \frac{c}{2}(h-hx)\,e \times \frac{2(h-hx)}{3}$$

$$(2) \quad M = eh^2\left[t\frac{x^2}{2} - \frac{t^3}{6c^2}(1-x^2) + 100\,pf(x-u) + \frac{c(1-x)^2}{3}\right].$$

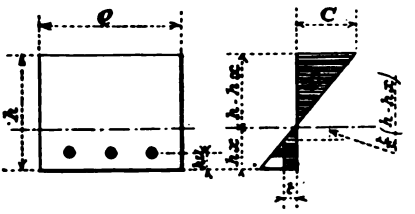


Fig. 113

3° En appliquant la loi de conservation des sections planes

$$(3) \qquad \frac{c}{f} = K\frac{h-hx}{hx-hu} = K\frac{1-x}{x-u}.$$

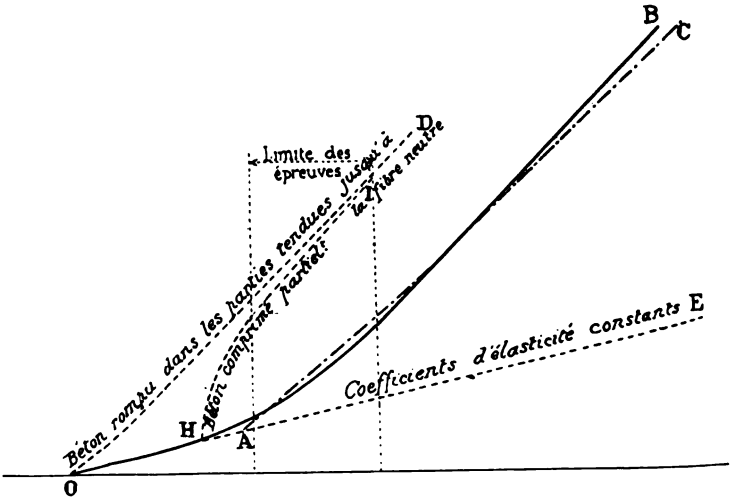
En éliminant f entre les équations 1 et 3, il vient :

$$tx - \frac{t^2}{2c}(1-x) + \frac{100\,pc}{K}\cdot\frac{x-u}{1-x} = \frac{c}{2}\,1-x).$$

On peut, en se donnant des valeurs de c et de K, compatibles avec l'état examiné, déterminer les valeurs de x, de f et de M correspondantes et par suite une série d'états d'équilibre voisins de celui considéré. On trouvera l'état cherché par une simple interpolation. Connaissant c et f il sera facile de déterminer les raccourcissements $\frac{c}{E_2}$ des fibres les plus comprimées et les allongements $\frac{f}{E_f}$ de l'armature métallique. On connaît E'_f, et on sait que $Ec = KE'_f$. Le problème est donc entièrement déterminé.

Pour rendre cette opération pratique, M. Considère conseille de représenter les déformations par des courbes dont les abscisses représenteraient les moments unitaires m, et les ordonnées les valeurs correspondantes des allongements des armatures (fig. 114) et des raccourcissements du béton (fig. 115).

Pendant la première période de la déformation s'étendant de la charge 0, à la charge produisant une altération du coefficient d'élasticité du béton tendu, les déformations théoriques sont représentées par les droites OA ; elles se détermineront par les formules usuelles de la résistance des matériaux.



Courbes des allongements des armatures

Fig. 114

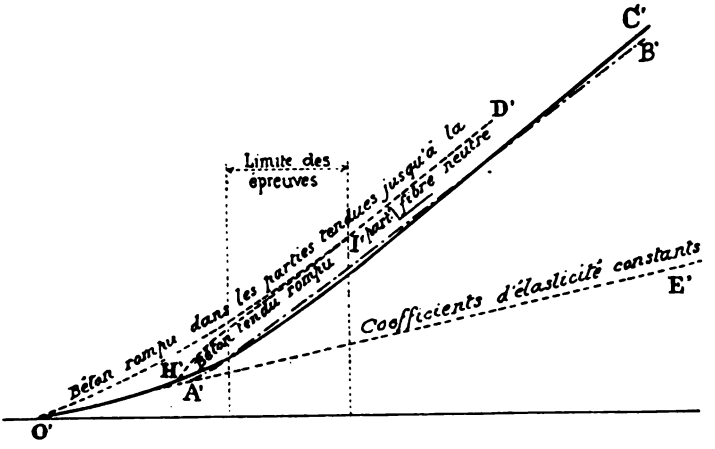
Pendant la deuxième période s'étendant de la limite indiquée ci-dessus à la rupture, les déformations théoriques seront représentées par les droites Ae.

Il est clair qu'en réalité les courbes déformées ne présentent pas en A des jarrets accusés ; elles se rapprocheront des courbes plus arrondies tracées à côté des polygones schématiques.

En répétant cette construction pour des pourcentages et des dosages déterminés, on obtiendra une série de tableaux graphiques et numériques types, auxquels devra se conformer toute construction saine et normalement établie.

La comparaison d'un de ces tableaux avec les résultats d'essais obtenus sur l'un des prismes définis dans la note précédente a donné des résultats très satisfaisants. La différence entre les résultats calculés et les résultats mesurés n'a pas dépassé 5 % pour l'allongement du fer et le raccourcissement du béton. Les erreurs obtenues en calculant les allongements par d'autres méthodes sont beaucoup plus importantes : on aurait eu les différences suivantes pour un coefficient de sécurité compris entre 1 et 2, en supposant :

	Allongements du fer	Raccourcissements du béton
1° Que le coefficient d'élasticité du béton est constant, aussi bien à la compression qu'à l'extension.	45 %	50 %
2° Que le béton tendu se rompt jusqu'à la fibre neutre.	110 »	25 »
3° » » » jusqu'à une section voisine de l'axe neutre où l'allongement ne dépasse pas les valeurs observées dans les essais de traction du mortier non armé	100 »	20 »



Courbes des raccourcissements maxima du béton

Fig. 115

Il est clair que les chiffres ci-dessus n'ont rien d'absolu et qu'ils varient dans un sens ou dans l'autre suivant le pourcentage et la richesse du dosage des mortiers de ciment. Ils varient aussi, comme nous le verrons dans l'examen de la note publiée au Congrès de Budapest, avec le milieu dans lequel s'est effectué le durcissement.

« On sait en effet que, suivant qu'ils ont fait prise et qu'ils sont restés dans l'air ou dans l'eau, les mortiers et les bétons subissent des retraits ou au contraire des dilatations qui atteignent 2 millimètres (par mètre) pour les pâtes de ciment de Portland pur et qui diminuent avec la proportion de ciment mélangée au sable et au gravier sans descendre notablement au-dessous de 0mm,40 pour les bétons les plus maigres que l'on emploie dans les travaux. »

Comme les armatures tendent à conserver leur longueur primitive il s'établit un état d'équilibre complexe « dans lequel il se produit forcément une compression des armatures et une tension du béton si le mortier a été conservé dans l'air, et, au contraire, une tension des armatures et une compression du béton, s'il a été conservé dans l'eau. »

Si l'on désigne par r le raccourcissement des armatures qui se produit dans le premier cas et par d l'allongement qui se produit dans le deuxième cas, on voit que « pour prendre le même allongement absolu a les armatures du prisme à l'air doivent s'allonger de $a + r$, tandis que celle du prisme à l'eau ne s'allongent que de $a - d$ (r et d sont généralement compris entre 0.10 et 0,20 millimètres ». Ces déformations sont en outre accompagnées d'un déplacement de l'axe neutre ; on voit donc que le phénomène devient assez complexe dans ce cas.

Renseignements donnés par les épreuves. — Voici les principales malfaçons qui peuvent se produire dans le ciment armé :

1° Emploi de mauvais sable ou de mauvais ciment.	Diminution de toutes les qualités du ciment.
2° Dosage inférieur au dosage prescrit.	Réduction des résistances de tension, de compression et de la limite d'élasticité Diminution du coefficient d'élasticité, mais dans une moindre mesure que les valeurs précédentes.
3° Excès de la proportion d'eau dans le gâchage du mortier.	Diminution considérable du coefficient d'élasticité ; Diminution plus faible de la résistance.
4° Insuffisance du pilonnage.	Réduction à peu près égale de la résistance et du coefficient d'élasticité.

Les variations du coefficient d'élasticité seront données par les variations d'inclinaison des droites OH et OH' (fig. 114 et 115) qui représentent les déformations qui se produisent sous faible charge pendant la période d'élasticité parfaite. La limite d'élasticité est pro-

portionnelle aux points H et H′ où l'inclinaison des droites change brusquement. « Les ordonnées des lignes OD et OD′ représentent les déformations qui auraient lieu si le béton ne produisait pas de tensions. Les portions d'ordonnées comprises entre ces lignes et les courbes de déformation réellement observées OB, O′B′, sont donc presque proportionnelles aux tensions réelles que produit le béton et qui sont presque identiques à sa résistance à la rupture par traction. »

Nous donnons (fig. 116) les courbes de déformation *mesurées* de quatre prismes de béton, établis dans des conditions différentes.

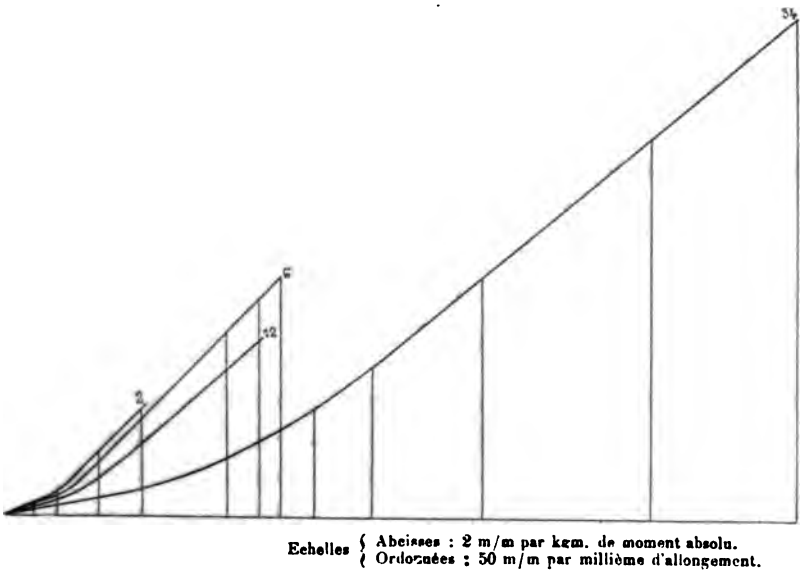


Fig. 116

Prismes	2 : 300k ciment, 0m3,500 sable, 0m3,500 grav.			Excès d'eau.	7 mois dans l'air.
	6 :	»	»	Insuffisance d'eau.	»
	12 :	»	»	Gâchage normal.	»
	34 : 433k de ciment, 1 mètre cube de sable.			»	7 mois dans l'eau.

Déformation des pièces à double armature. — Les méthodes que nous avons exposées s'appliquent naturellement au cas des poutres à double armature ; il suffira dans ce dernier cas, de faire subir aux formules (1) à (4) de légères modifications pour en tenir compte. Dans le cas d'armatures dissymétriques S′ et (F + S) dis-

posées de façon que l'on ait $u'S' = uS$ (fig. 117), OO' étant l'axe neutre de la poutre à armature simple F, on pourra passer du graphique de la poutre à armature simple F au graphique de la poutre à armatures dissymétriques à l'aide d'une simple table de concordance.

Calcul des flèches. — Quand les efforts varient d'une section à l'autre, le calcul de la flèche ne pourra pas facilement se faire à l'aide d'une formule bien définie ; il faudra diviser la poutre en un certain nombre d'éléments, déterminer les déformations pour chacun d'eux et faire la somme de ces déformations en tenant compte de leur liaison aux points fixes.

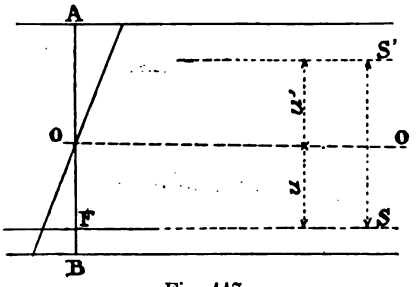


Fig. 117

Ce calcul pourra se faire très commodément par la formule

$$F = \int_0^l \frac{1}{\rho}(l - x)\,dx \tag{1}$$

où l représente la demi-longueur de la poutre et ρ le rayon de courbure qu'a la pièce fléchie à la distance x du milieu, pour une poutre reposant sur deux appuis symétriques par rapport à son milieu et symétriquement chargée.

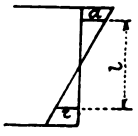


Fig. 118

Le rayon de courbure ρ est donné en fonction de l'allongement a d'une fibre et du raccourcissement r (fig. 118) d'une autre fibre distante de i de la première par la relation

$$\rho = \frac{r}{a + r},$$

on aura donc

$$F = \int_0^l \frac{a + r}{r}(l - x)\,dx, \tag{3}$$

ou en désignant par Δx la longueur de chaque élément

$$F = \sum_{o}^{l} \frac{a + r}{r} (l - a) \Delta a.$$

Le calcul de la flèche sera évidemment fort long et il semble bien préférable de se borner à l'étude des déformations d'une seule section, toutes les fois que l'on disposera d'appareils spéciaux pour cela.

IV. — *Etat de la question du béton armé* (1)

83. — Après avoir rappelé l'objet de ses précédentes notes, M. Considère examine quelques faits récemment établis que nous résumons comme suit :

On a vu que les prismes de ciment, mortier ou béton de ciment durcis à l'air se contractaient, tandis que ceux, durcis par immersion dans l'eau se dilataient. Les efforts résultant de ces déformations sont parfois considérables. Les résultats de l'expérience suivante de M. Considère donneront une idée de leur importance.

Il a armé un prisme de ciment pur, de section rectangulaire (60 × 25 millimètres), d'une barre ronde de 10,2 millimètres de diamètre et a constaté, en mesurant l'allongement de l'armature, que le durcissement avait développé dans le métal une tension de 12 (2) kilogrammes par millimètre carré. Cette tension impliquait pour lui faire équilibre, une compression du ciment de 60 kilogrammes par centimètre carré.

Ce sont très probablement des phénomènes de ce genre qui occasionneraient dans les constructions, en béton armé durcies à l'air, un accroissement lent, mais continu de la flèche, pendant les douze et dix-huit premiers mois qui suivent leur exécution.

« Il est évident *a priori*, qu'il doit en être ainsi, car le retrait de

(1) *Annales des Ponts-et-Chaussées*, 4me trimestre 1900.

(2) Ce chiffre répond sans doute à un ciment extrêmement dilatable, les expériences ultérieures de M. Considère lui ont donné des tensions bien moindres.

prise se fait librement dans les fibres non armées destinées à travailler par compression tandis qu'elles sont réduites, dans une très forte proportion, vers la face opposée, par la résistance des armatures. Ces retraits inégaux des deux faces des poutres produisent forcément des flèches progressives de même sens que celles qui ont les charges pour cause. »

« En outre, pendant la longue durée de la prise, le mortier possède à un degré extrême d'abord, puis décroissant, la faculté indiquée plus haut de céder aux charges qui le sollicitent. »

« De ces deux causes résultent, pour les poutres armées, des courbures qu'on pourrait confondre avec les déformations permanentes produites par les effets des charges sur les poutres suffisamment durcies. Celles-ci sont généralement inférieures au 1/5 et souvent au 1/10 des flèches totales sous charge. »

« Lorsqu'une pièce armée a subi une épreuve, le béton tendu se comporte pendant le déchargement, comme si son coefficient d'élasticité primitif avait été réduit dans une proportion légèrement inférieure (de 1/10 à 1/5 au plus du rapport de l'allongement élastique dont il était capable à l'allongement total qu'il a supporté dans l'épreuve). Si l'on produit des alternatives quelconques de chargements et de déchargements sans dépasser la limite de la première épreuve, le coefficient d'élasticité subit de nouvelles diminutions successives qui tendent rapidement vers zéro. »

Les fissures qui se produisent parfois dans les parties tendues d'une poutre exposée à l'air, sont généralement fort espacées. Dans chaque tronçon qui les sépare, il y a des glissements d'armatures, d'autant plus importants que les armatures sont elles-mêmes plus fortes, présentant par conséquent une surface d'adhérence moins grande.

« Le béton de la face comprimée supporte évidemment, en face des fissures, des pressions d'autant plus fortes qu'elles sont plus ouvertes, c'est-à-dire d'autant plus que les armatures sont formées de barres de plus gros diamètres ». Il y a là un fait très intéressant que M. Considère étudie expérimentalement.

Mentionnons encore qu'à la suite d'expériences très précises, faites par flexion sur le même prisme, M. Considère a été amené

à considérer l'égalité des coefficients d'élasticité à la compression et à l'extension, communément admise, comme bien près d'être certaine.

V. — *Congrès de Budapest de l'Association internationale pour l'essai des matériaux* (1901)

84. — Sous le titre de « Contribution à l'étude des propriétés du béton armé », M. Considère a communiqué au Congrès de Budapest certains résultats nouveaux, qu'il a obtenus expérimentalement.

Effets des variations de volume du béton. — (*a*) *Retrait à l'air.* — En durcissant à l'air sec, les mortiers tendent à prendre un retrait; la diminution de volume est d'autant plus forte que le ciment entre en plus grande quantité dans le mélange. C'est ainsi qu'il atteint 1,5 à 2,5 pour 1000 dans les ciments purs et seulement 0,3 à 0,5 $^0/_{000}$ pour les bétons maigres — le retrait est donc 5 fois moins grand dans le second cas que dans le premier.

La conséquence de ce phénomène est que si le corps éprouve des obstacles à ce retrait, il tendra à se fissurer. C'est ainsi que, lorsque l'on construit une nouvelle assise sur une maçonnerie assez ancienne pour avoir déjà éprouvé son retrait, elle subit par adhérence une certaine gêne dans ses mouvements, et tout se passe comme si elle était tendue par la première maçonnerie — le ciment résistant mal à l'extension se fissure.

Ces phénomènes ont été étudiés par M. Considère dans son laboratoire à l'aide de petits prismes de différents dosages, superposés les uns aux autres. La différence d'âge produit des fissures comme la différence des dosages. C'est ce qui explique les déconvenues subies par les constructeurs venant surcharger après coup des hourdis anciens ou croyant bien faire, en prévoyant des dosages différents pour des parties contiguës du même ouvrage.

Seuls les prismes contenant moins de 800 kilogrammes de ciment par mètre cube de sable peuvent subir ces déformations sans fissures; tandis que pour des prismes exécutés en ciment

pur, la fissure est absolument nette et parfaitement visible à l'œil nu.

Il est à remarquer, que même s'il n'y a pas de fissures visibles quand le retrait n'a pu s'effectuer librement, le ciment n'en a pas moins été le siège de tensions extérieures exagérées, capables, principalement quand le dosage est riche, de compromettre l'élasticité, la résistance et la faculté d'allongement de ce dernier.

Mais si l'on arme intérieurement le ciment, si on exalte sa capacité d'allongement, sans dépasser sa limite d'élasticité, on atténue beaucoup les inconvénients résultant des différences de retrait, principalement pour les mortiers de dosage modéré. C'est ainsi que des prismes en ciment pur, armés, se sont fissurés pour des retraits et par suite des allongements de 0,1 à 0,25 $^0/_{000}$ alors que des bétons au dosage de 300 kilogrammes et même de 600 kilogrammes de ciment par mètre cube, ont supporté sans se fissurer des allongements de 0,8 à 2 $^0/_{000}$.

M. Considère tire de ces observations les conséquences pratiques suivantes :

« L'emploi des dosages riches présente des dangers pour les maçonneries exposées à l'air sec, qu'elles soient ou non armées.

« Toute entrave apportée au retrait diminue les qualités des mortiers et bétons dans une mesure d'autant plus grande que le dosage est plus riche et le retrait plus gêné.

« Les inconvénients qui en résultent, ont relativement peu d'importance pour les bétons maigres ; ils sont très graves pour les mortiers riches conservés à l'air sec.

« Il y a avantage à maintenir les maçonneries humides aussi longtemps et autant que possible. »

b) *Dilatation dans l'eau.* — Les mortiers qui durcissent dans l'eau, immédiatement après leur prise, éprouvent des phénomènes inverses. Ils se dilatent et l'augmentation de volume est plus grande pour les mélanges que pour le ciment pur ; de 2 à 5 $^0/_{000}$ pour les dosages maigres, elle se réduit à 1 à 2 $^0/_{000}$ pour le ciment pur.

Dans ce cas, quand la dilatation ne peut se produire librement les obstacles extérieurs produisent dans le ciment des compressions considérables. Mais le phénomène de dilatation est loin d'être aussi défavorable que celui du retrait, le ciment résistant

beaucoup mieux à la compression qu'à la traction. Il est à remarquer en outre que l'inconvénient des reprises est moindre, attendu que c'est l'assise ancienne qui est tendue, et que son âge plus avancé lui permet de supporter mieux cette fatigue.

Comme conclusion, l'armature des ouvrages en béton immergés sous l'eau est encore plus indiquée que pour les ouvrages exposés à l'air, ouvrages auxquels elle rend déjà des services de grande importance.

Effets des variations hygrométriques. — Les mortiers et bétons de ciment varient également de volume sous l'influence des variations hygrométriques. M. Considère a observé des dilatations considérables par l'effet de l'immersion dans l'eau de prismes non armés, ayant déjà durci deux ans à l'air; ces dilatations ont atteint $^{24}/_{000}$ au bout de 3 semaines d'immersion. Inversement un prisme de mortier non armé, au dosage de 433 kilogrammes par mètre cube de sable, et qui avait durci préalablement dans l'eau pendant 15 mois, s'est raccourci de $^{50}/_{1000}$ au bout d'une exposition de 2 mois à l'air sec.

Ces variations après la prise, diminuent plutôt, quand le dosage est plus riche.

On peut s'expliquer que les effets des variations hygrométriques ne seront pas les mêmes suivant que les mortiers seront plus ou moins avancés au point de vue du durcissement.

Pendant la prise, le mortier possède une plasticité très grande au début, grâce à laquelle il se soumet en grande partie aux efforts que les armatures exercent sur lui-même. Il en résulte que les variations de volume devraient être plus grandes pendant la prise que longtemps après. L'expérience confirme cette prévision, mais ceci n'empêche point que les efforts intérieurs subis sont tout à fait comparables.

M. Considère tient à ajouter cependant que les inconvénients sont sensiblement nuls pour les maçonneries exposées toujours à l'air, dont les variations hygrométriques ont des effets très faibles. La question n'a d'importance que pour les pièces fabriquées à l'air qu'on laisse faire prise avant de les mettre à l'eau, où elles doivent rester définitivement immergées; c'est le cas des pilotis, caissons, etc.

Résistance du béton à la tension. — On a vu comment M. Considère a étudié les variations d'élasticité du béton sur de petits prismes dans le double but de disposer économiquement d'un grand nombre d'observations nécessaires à l'étude de corps hétérogènes et de pouvoir les examiner commodément à la loupe dans son laboratoire. On se rappelle en outre qu'il a eu soin d'éliminer l'action de l'effort tranchant par la disposition prise pour le mode d'action des charges.

Bien qu'il soit vraisemblable d'admettre que les lois qui régissent les corps sont indépendantes de leurs dimensions, il serait téméraire d'appliquer les conclusions tirées d'expériences de laboratoire à des travaux exécutés sur le chantier, si ces dernières n'étaient en concordance avec celles qui résultent de l'expérience des praticiens. Il restait une incertitude à faire disparaître, c'est celle relative à la conservation des sections planes. Dans ce but M. Considère a conçu et exécuté des essais directs à la traction lui permettant de mesurer les allongements des armatures et des mortiers. Les prismes d'essai présentaient une section carrée de 47 millimètres de côté ; ils étaient armés de 4 fils de $4^{mm},4$.

Si l'on représente par S la section totale des 4 fils, par A l'allongement qu'ils éprouvent sous l'effet de la charge P, par E le coefficient d'élasticité du métal, la tension de l'armature sera représentée par SAE et celle du mortier par P — SAE. Dès lors, divisant cette tension du mortier par sa section, le quotient ainsi obtenu représente la tension par centimètre carré répondant à l'allongement A′ du mortier.

Le diagramme 119 résume les résultats obtenus. On a pris comme ordonnées les charges totales appliquées successivement au prisme et pour abscisses les allongements correspondants des armatures. Les allongements du béton ont été sensiblement égaux à ceux de ces dernières dans la partie médiane du prisme soumis à la traction simple, comme ils l'avaient été dans les parties des prismes fléchis assez éloignées des éventrements.

Les allongements ont d'abord cru proportionnellement aux efforts de O en A, puis il y a eu un accroissement rapide et les allongements sont redevenus proportionnels aux déformations

(de A' en B). La charge a été ensuite réduite à zéro et ramenée à la valeur O*b*.

Ces répétitions de chargement et de déchargement ont été progressives de façon à permettre la mesure des déformations et le tracé des courbes correspondantes. Les chargements sont représentés par les traits pleins, les déchargements par les traits pointillés.

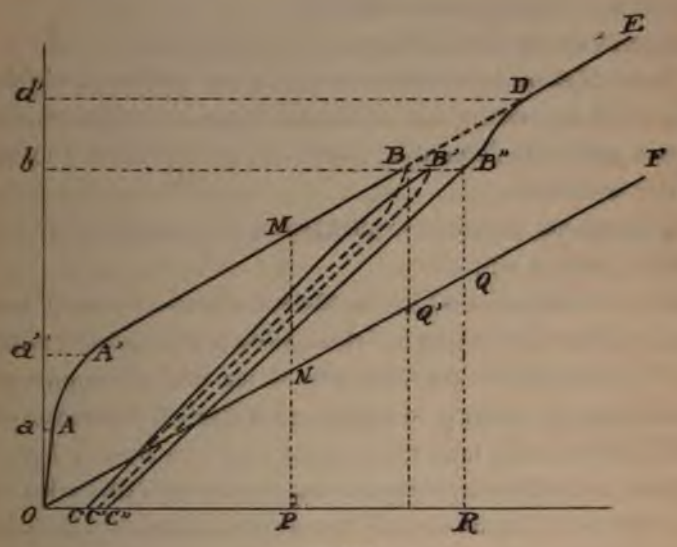


Fig: 119

De O en B 1er chargement.
De B en C 1er déchargement.
De C en B' 2e chargement.
De B' en C' 2e déchargement.
De C' en B" 3e chargement.
. . . . . .

De C_n en B_n droite limite vers laquelle tendent les courbes de chargement et de déchargement.

La valeur finale OC_n a toujours été trouvée inférieure au $^1/_3$ et souvent au $^1/_{10}$ de l'allongement total (bB_n) sous la charge O*b*.

La droite OF représente l'effort fourni par les armatures; la différence avec la courbe des déformations représente donc la résistance fournie par le béton. Comme BQ' est plus grand que B_nQ, on voit que la répétition des efforts amène une diminution de la résistance du mortier, quand celui-ci travaille au-dessus de sa limite d'élasticité. Mais, fait remarquable, la valeur ainsi réduite après des allongements de 0,90 millimètre a été trouvée

« égale aux 70/100 de la tension maximum BQ′ et est *restée sensiblement supérieure à la résistance du béton non armé.* »

Si après avoir soumis un prisme à une série de chargements successifs qui l'ont amené successivement à l'état représenté par la droite C_nB_n, on augmente la charge jusqu'en *od*, la courbe de la déformation devient OB_nD et l'on constate que *le béton retrouve après cette augmentation de charge, la résistance maximum qu'il a eue avant les répétitions d'efforts.*

Au point de vue de l'élasticité, on constate que :

« Le mortier ou béton armé conserve un coefficient d'élasticité égal à celui du mortier non armé, tant que son allongement ne dépasse pas notablement la valeur qui produirait la rupture du mortier non armé.

Si l'on pousse plus loin le chargement, le coefficient d'élasticité devient presque nul.

Dans le déchargement, le coefficient d'élasticité a une valeur d'autant plus réduite que la déformation a été poussée plus loin.

Si l'on répète les chargements et les déchargements avec la même limite de charge, le coefficient d'élasticité diminue encore sensiblement, mais tend rapidement vers une limite. Arrivées à ce point, les pièces armées et soumises à la répétition des mêmes efforts se comportent comme des corps parfaitement élastiques et leurs déformations sont presque rigoureusement proportionnelles aux charges ».

Compression. — La proportionnalité des raccourcissements et la constance du coefficient d'élasticité ne persistent que pour les 2/3 environ de la charge de rupture ; pour de plus grands efforts, les déformations suivent une progression croissante et atteignent des valeurs très fortes, qui sont la cause de la rupture des maçonneries et des bétons armés en particulier.

M. Harel de la Noë, conclut de la résistance plus grande des mortiers en couches minces que l'on augmente aussi cette résistance en lardant le béton d'armatures perpendiculaires à la pression. M. Considère cite quelques-unes de ses expériences qui confirment ce dire. Ayant essayé comparativement deux prismes dont les fibres tendues étaient, suivant l'usage, armées de barres longitudinales, il a constaté que le coefficient d'élasticité des

fibres comprimées était deux fois plus élevé dans l'un des prismes où ces fibres comprimées n'étaient pas armées, que dans l'autre où elles étaient lardées, dans les deux sens perpendiculaires à l'axe, de fils de fer représentant en volume 1/100 de celui du mortier. Il est probable que les résistances à l'écrasement ont varié dans le même sens, sinon dans la même proportion, mais il n'a pu le vérifier, ces prismes ayant péri par glissement des armatures longitudinales. Ce concours des armatures transversales, n'acquérant de l'importance que lorsque la limite d'élasticité est dépassée, il serait intéressant de faire des expériences nombreuses et méthodiques pour déterminer dans quelle mesure la diminution de qualité du ciment produite par ces armatures transversales, contrebalance les effets précédents.

M. Considère a constaté une diminution de qualité analogue, mais moins forte dans les fibres tendues et armées de barres longitudinales. L'axe neutre est toujours situé à l'opposé des armatures par rapport au milieu des pièces à section rectangulaire conservées à l'air, alors que si le béton avait eu le même coefficient d'élasticité dans toute sa masse, l'axe neutre, qui s'éloigne des parties les moins résistantes, aurait dû se rapprocher des armatures dont le coefficient d'élasticité est en moyenne, dix fois plus grand que celui du béton qu'elles remplacent.

Cisaillement et glissement. — Bien qu'ayant quelque analogie, le cisaillement et le glissement présentent des différences essentielles. Dans le cisaillement, la rupture se produit par extension suivant des lignes faisant des angles voisins de 45° avec la direction de l'effort (Expériences de M. Mesnager). Au contraire, les armatures ne peuvent glisser que parallèlement aux efforts longitudinaux qui les sollicitent.

Cisaillement. — Les expériences de M. Mesnager tendent à prouver que la résistance des mortiers au cisaillement dépasse leur résistance à la traction, telle qu'on la constate par les essais usuels. Dans des essais trop peu nombreux peut-être pour permettre d'en tirer une conclusion générale, il a trouvé une différence de 20 à 30 % entre ces deux résistances.

Un fait récent a jeté quelque clarté sur la ductilité du ciment soumis à des cisaillements énormes en même temps qu'à des

efforts complexes où les pressions l'emportaient sur les tensions. On avait placé sur la roche de Gorlé-Bian une balise en fer creux de 19 centimètres de diamètre remplie de pâte de ciment pur. Les vagues ayant ployé cette balise avec un rayon de courbure de $0^m,55$ mesuré sur l'axe de la balise, on devait s'attendre à constater que le ciment avait été pulvérisé. Or en sciant la balise suivant le plan de l'axe ployé, on a constaté que le ciment ne présentait que quelques surfaces de glissement entre lesquelles on trouvait des morceaux intacts dont les déformations accusaient des glissements de fibres les unes sur les autres de 200 millimètres par mètre au moins.

On doit en conclure que de même que les allongements supportés sans rupture par les bétons armés dépassent dans une mesure très forte ce que l'on pensait, de même, les mortiers ou bétons peuvent subir des glissements énormes quand ils sont comprimés.

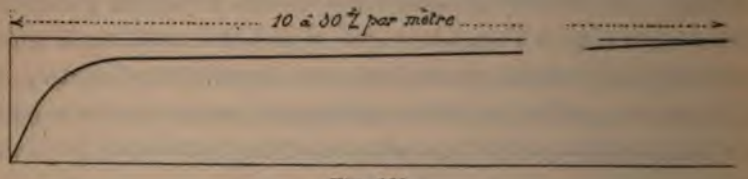


Fig. 120

Glissement. — Les expériences de M. Considère, faites sur des prismes armés, en vue de mesurer les déplacements longitudinaux des armatures, ont montré que les déplacements relatifs des points des armatures et du béton enveloppant, séparés par la minime distance de 5 à 7 millimètres ont été extrêmement faibles tant que les efforts tendant à produire les glissements n'ont pas dépassé certaines valeurs qui correspondent évidemment à la limite d'élasticité, puis presque subitement les glissements ont augmenté rapidement et, pour un accroissement de la charge voisin de 1/10 à 1/5 au plus, ils ont pris des valeurs relativement considérables correspondant à des glissements de 10 à 30 millimètres par mètre.

La figure 120, représentant une de ces courbes, montre la grande analogie avec la courbe de traction. Les déformations sont 10 à

15 fois plus fortes cependant, ce que l'on ne peut révoquer en doute après ce qui a été dit de la balise de Gorlé-Bian.

Ces observations ont plus d'intérêt au point de vue pratique qu'au point de vue théorique très complexe; c'est ainsi par exemple que le glissement mesuré est la résultante de glissements différents survenus dans des anneaux cylindriques plus ou moins éloignés de l'armature et soumis à des efforts variables. Elles ont porté non seulement sur les déformations, mais aussi sur les résistances des armatures au glissement, de prismes de 6 centimètres de largeur et d'épaisseur chargés d'après la figure 1. Faute de mieux, on a admis l'hypothèse de la proportionnalité des efforts de glissement aux efforts tranchants et on a trouvé des résistances au glissement variant de 5 à 12 kilogrammes par centimètre carré de surface de contact pour des prismes conservés à l'air, au dosage de 300 kilogrammes de ciment par mètre cube de bon sable et de même gravier par parties égales. Les armatures étant formées de fils de fer étirés de $4^{mm},4$ à surface nette et brillante. La résistance s'est élevée à 18 kilogrammes pour des prismes de même béton armés de fers laminés de 6 millimètres de diamètre, dont la surface était analogue à celle des barres qu'on emploie en pratique.

Dans une autre série de prismes formés de mortier au dosage de 433 kilogrammes de ciment par mètre cube de sable, conservé dans l'eau et armés de fils de fer de $4^{mm},25$ légèrement rouillés, on a trouvé 23 à 35 kilogrammes. Dans 3 prismes identiques, mais dont le béton a été gâché tour à tour avec un excès d'eau, avec la quantité d'eau normale, et avec trop peu d'eau, 11, 12 et 5 kilogrammes.

Toutefois ce que ces bétons plus mouillés gagnent en adhérence, ils le perdent en partie en résistance à la tension et à la compression.

Ces résistances sont bien inférieures à celles trouvées par MM. Bauschinger et de Jolly. On peut attribuer une partie de cette différence à ce que les armatures des pièces travaillant par flexion sont entourées du béton qui supporte des tensions très fortes et généralement bien supérieures à la limite d'élasticité, tandis que les expériences portant sur des barres scellées dans des blocs de

béton ne sont entachées que par des efforts négligeables en dehors du glissement. Les glissements rencontrent deux résistances, l'une produite par la dureté de la matière, l'autre par les frottements qui sont proportionnels aux pressions normales sur les joints de glissement. Il est donc naturel que les résistances au glissement et au cisaillement soient influencées par les efforts de tous genres qui s'exercent sur le béton armé, et qu'elles soient plus fortes dans les scellements que dans les parties de prismes armés dont le béton dépense une partie de sa cohésion dans les allongements dépassant sa limite élastique que lui imposent les moments de flexion.

Si l'on remarque donc que les glissements des armatures et les déformations des sections planes augmentent les flèches, on arrive à cette conclusion contraire aux notions élémentaires et courantes de la résistance des matériaux que les efforts des moments de flexion peuvent influer beaucoup sur la résistance du béton aux efforts tranchants et aux glissements et que les effets des efforts tranchants sur les déformations ne sont pas absolument négligeables.

Effets des fissures. — On a admis jusqu'ici que le béton armé était continu et prenait sans se rompre les allongements que les charges lui imposaient. Or il en est souvent autrement, surtout dans les constructions exposées à l'air. Croyant éviter tout mécompte à ce sujet, les praticiens se bornent à supposer nulle la résistance du béton à la tension, et déterminent d'une manière arbitraire la position de l'axe neutre et par suite l'épaisseur des fibres comprimées dont dépend la détermination de la fatigue maximum. M. Considère trouve cette hypothèse inadmissible.

Dans la première période critique, et c'est évidemment celle dont on doit se préoccuper, il ne se forme généralement qu'un petit nombre de fissures assez espacées.

La tension du béton tombe à zéro au droit de la fissure, celle des armatures, dont l'augmentation doit compenser la suppression graduelle de celle du béton, s'élève. La différence des tensions des sections voisines implique des efforts longitudinaux fournis par l'adhérence du métal et du béton qui mettent en jeu la résistance au glissement.

Comme tout effort implique un déplacement relatif, la fissure s'ouvre, la courbure de la pièce s'exagère dans le voisinage et l'axe neutre se déplace du côté des fibres comprimées dont la section est par suite diminuée et la pression unitaire augmentée.

Ces prévisions ont été confirmées par des expériences faites en produisant dans chaque prisme armé une fente interrompant les fibres tendues à l'aide d'une petite plaque de fer-blanc enduite de cire qui n'avait pas d'adhérence avec le mortier.

Mais M. Considère ajoute les restrictions suivantes :

Si dans une pièce travaillant par flexion, les parties tendues et comprimées n'ont pas des résistances bien proportionnées, la plus faible se déforme beaucoup plus que l'autre. L'axe neutre s'en éloigne par suite, et il en résulte une augmentation de la section des fibres qui ont à résister à l'effort le plus dangereux.

En outre, et c'est par ce point que ces considérations intéressent la question des fissures, si par suite des retraits ou de toute autre cause, l'élasticité est, d'avance, altérée dans une partie d'une pièce, les déformations y augmentent, l'éloignement de l'axe neutre s'accentue et d'autres fibres viennent au secours de celles qui ont une moindre qualité.

Il convient toutefois d'indiquer une restriction très importante aux heureux effets de la solidarité des fibres des pièces armées. On sait que la rupture est produite par la répétition d'efforts inférieurs à ceux dont une seule application brise le béton (les 2/3, peut-être parfois la moitié). Or, c'est surtout pour des charges voisines de la résistance à un effort unique que s'accentue la convexité des courbes de déformation, de sorte que les effets de la solidarité moléculaire semblent devoir être bien moins marqués au point de vue de la résistance aux efforts répétés qu'à celui des charges à outrance.

Autant qu'il est permis de hasarder des prévisions, il paraît donc probable que les fissures diminuent la résistance des pièces armées aux efforts répétés bien plus qu'aux chargements à outrance. L'expérience seule peut fixer sur ce point et nous y procèderons bientôt.

Enfin il faut remarquer que nos expériences n'ont porté que

sur les fentes faites pendant la fabrication. Celles qui se produisent pendant le chargement, ne provoquent pas d'altération du béton. Il est donc probable que les effets qui en résultent, même pour les pièces conservées dans l'air sont analogues à ceux qui ont été constatés dans les prismes mis successivement à l'air et à l'eau de manière à y annuler sensiblement les efforts intérieurs préexistants et les altérations correspondantes d'élasticité. Ces effets seraient donc modérés et bien inférieurs à ceux que nous avons observés dans les prismes laissés à l'air.

CHAPITRE VIII

—

MÉTHODES SEMI-EMPIRIQUES
HENNEBIQUE — RABUT

85. Méthode de M. Hennebique. — L'importance des méthodes de calcul de M. Hennebique, ne réside pas autant dans les principes sur lesquels ses formules sont basées, que dans le grand nombre de constructions qui ont été calculées à l'aide de ces formules. Ces dernières peuvent donc jusqu'à un certain point servir de pierre de touche pratique aux théoriciens, dont les études plus scientifiques, perdraient de leur valeur, si elles conduisaient à des dimensions très différentes de celles qui ont été consacrées par des années de pratique.

Les méthodes semi-empiriques et celles qui résultent de la théorie pure se confirmant les unes les autres, l'esprit se trouve absolument satisfait ; le praticien est flatté d'avoir eu une intuition si saine des lois de la résistance, sans un emploi exagéré des mathématiques, et le théoricien peut, en toute confiance, appliquer *à tous les cas* ses équations rationnelles, qui seules lui permettent de déterminer *a priori* et sans tâtonnements les dimensions les plus convenables des divers éléments du projet.

On n'essaiera pas autant de donner une explication plausible des formules Hennebique au point de vue théorique, que de fournir un moyen mnémonique de les retenir. On remarquera qu'en général elles sont indéterminées, c'est-à-dire qu'elles laissent le soin au praticien de déterminer d'instinct, une dimension, ou la position de la fibre neutre, ou de choisir dans un barème parmi les nombreuses solutions possibles, celle qui semble lui convenir le mieux au cas particulier qu'il a en vue.

Pièces comprimées. — Si B est la section de la pièce comprimée, sans déduction de la fraction occupée par les armatures de section F, si P est la pression que l'on peut appliquer en toute sécurité à cette pièce, M. Hennebique pose :

$$P = 25\,B + 1000\,F. \tag{1}$$

Cette équation est indéterminée, puisqu'elle contient deux inconnues, B et F. Mais le constructeur se réserve le choix convenable du rapport $\frac{F}{B}$ qui n'est autre chose que le pourcentage, pour enlever cette indétermination. Les paramètres 25 et 1000 ne représentent pas à vrai dire les taux de travail respectifs du béton et du fer. Pour déterminer ceux-ci, il y a lieu de comparer la formule (1), avec ses valeurs arbitraires de B et de F, mise sous la forme :

$$\frac{P}{B} = 25 + 1000\,\frac{F}{B}$$

avec la formule théorique

$$\frac{P}{B} = C + nC\,\frac{F}{B}$$

dans laquelle C représente le taux de travail à la compression du béton et n le rapport des coefficients d'élasticité du fer et du béton.

Eliminant en effet $\frac{P}{B}$ entre ces deux équations et tirant la valeur de C, on obtient :

$$C = \frac{25 + 1000\,\frac{F}{B}}{1 + n\,\frac{F}{B}} \tag{2}$$

et

$$f = nC \tag{3}$$

f étant le taux de travail du fer.

Ces équations (2) et (3) donnent pour diverses valeurs de n et divers pourcentages, les taux de travail suivants répondant à la formule (1).

Valeurs de n	Valeurs des pourcentages $\frac{F}{B}$					
	2,5 %		5 %		7,5 %	
	c par cmq.	f par mmq.	c par cmq.	f par mmq.	c par cmq.	f par mmq.
10	40	4	50	5	57,1	5,71
20	33,4	6,68	37,5	7,50	40	8
30	28,6	8,58	30	9	30,8	9,24
40	25,0	10	25	10	25,0	10

Ce tableau montre que la formule (1) n'est rationnelle, quelles que soient les valeurs relatives de F et de B, que si la valeur admise pour n est de 40.

Il démontre également la différence qui existe entre une règle empirique et une formule théorique ; la première ne vaut que par l'expérience du praticien qui l'applique ; la seconde ne vaut que par le bien fondé de la valeur pratique admise pour n.

Pièces fléchies. — Les formules employées par M. Hennebique pour le calcul des pièces fléchies semblent impliquer que leur auteur en les établissant a fait les hypothèses suivantes :

1° Que la résistance du béton tendu est négligeable.

2° Que l'on peut faire travailler l'armature, dans des conditions normales à 10 kilogrammes par millimètre carré et le béton à 25 kilogrammes par centimètre carré.

3° Que les résultantes des efforts de compression et d'extension passent respectivement par l'axe du hourdis et par le centre de figure de l'armature.

4° Que la position de la fibre neutre n'a pas une importance de premier ordre, et qu'en raison de l'incertitude des valeurs à admettre pour n, de celle qui résulte de l'étendue utilisable du hourdis solidarisé avec la nervure, il est licite de la déterminer à l'œil (du praticien), d'après les indications données par des appa-

reils Manet, sur de nombreux cas de la pratique. De ces indications il ressortirait que l'axe neutre se trouve généralement au-dessus du hourdis.

5° Que les moments résistants de l'armature et du béton comprimé sont égaux entre eux et égaux chacun à la moitié du moment des forces extérieures.

6° Que le moment des forces extérieures pour des charges uniformément réparties sur une pièce reposant sur deux appuis, est égal à $\frac{pl^2}{10}$ quand il y a probabilité d'encastrement partiel.

7° Que les moments d'encastrement résultant de cette dernière hypothèse sont équilibrés par la résistance des extrémités des barres incurvées.

M. Hennebique emploie à la fois, et en quantités égales, des barres droites et des barres incurvées de même section ; dans la partie centrale les deux sections s'ajoutent pour constituer l'armature tendue ; aux extrémités la barre incurvée entre seule en jeu.

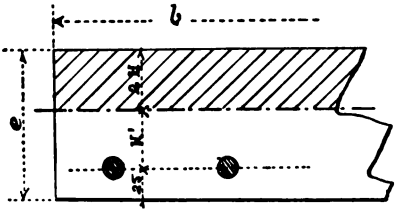


Fig. 121

8° Enfin la résistance au cisaillement est demandée, en parties égales, au béton et aux étriers.

Calcul d'une dalle. — Appliquant ces diverses hypothèses au calcul d'une dalle de largeur b, d'épaisseur e (fig. 121) ; appelant 2H l'épaisseur du béton comprimé, H' la distance du centre de gravité des armatures à la fibre neutre, $M = \frac{pl^2}{10}$ [1], le moment fléchissant relatif à une charge totale p uniformément répartie et à une partie l,

$$\frac{M}{2} = \frac{pl^2}{20} = 2Hb \times H \times 250000 \text{ kilogrammes.}$$

Telle est l'équation retative à la résistance du béton comprimé, qui pour $b = 1$, donne :

$$H = \sqrt{\frac{pl^2}{10\,000\,000}}.$$

[1] $\frac{pl^2}{10}$ dans le cas général.

Ici H est exprimé en mètres, p en kilogrammes par mètre carré, l en mètres ; mais si l'on trouve plus commode d'exprimer H en centimètres, tout en conservant les usages pour p et l, on écrira

$$(1) \qquad H = \sqrt{\frac{pl^2}{1000}}.$$

On en déduit immédiatement :

$$(2) \qquad H' = e - 2H - 2{,}5$$

dont tous les termes sont exprimés en centimètres.

Enfin pour la résistance de l'armature à la traction, on aura :

$$F \times H' \times 10\,000\,000 = \frac{M}{2} = \frac{pl^2}{20}$$

d'où

$$F = \frac{pl^2}{200\,000\,000\,H'}.$$

Dans cette expression, tous les termes sont à exprimer en mètres, mais si l'on veut écrire H' en centimètres, et trouver F en centimètres carrés, on aura :

$$(3) \qquad F = \frac{pl^2}{200H'}$$

le produit pl^2 étant exprimé comme plus haut d'après les usages courants.

— Ces 3 équations permettent de calculer l'armature d'une dalle très rapidement, si l'on se donne l'épaisseur convenable de cette dernière. L'exemple suivant va le démontrer.

Déterminer l'armature d'une dalle de $0^m{,}08$, *capable de supporter une surcharge de* 600 *kilogrammes sur une portée de* $1^m{,}60$?

Poids propre de la dalle	8×25^{kg} =	200 kilogrammes
Surcharge par mètre carré . . .	=	600 »
p.	=	800 »

$$pl^2 = 800 \times \overline{1{,}6}^2 = 2048 \text{ kilogrammètres}$$

$$b = 1$$

$$H = \sqrt{\frac{2048}{1000}} = 1{,}43 \text{ centimètre}$$

$$H' = 8 - 2 \times 1{,}43 - 2{,}5 = 2{,}64 \text{ centimètres}$$

$$F = \frac{2048}{200 \times 2{,}64} = 3{,}87 \text{ centimètres carrés.}$$

Le pourcentage de l'armature indiqué par ce calcul est ici de :

$$\frac{3,88}{8 \times 100} = 0,00483.$$

On prendra par exemple des barres de 8 millimètres, section 0,50 centimètre carré et l'espacement à prévoir est de

$$\frac{0.50}{3,88} = 0^{m},129.$$

Remarque. — On aurait pu partir d'une épaisseur de 6 ou de 10, le calcul aurait donné une très forte armature pour la première épaisseur, très faible pour la seconde. C'est dans le choix convenable de cette épaisseur que l'expérience intervient.

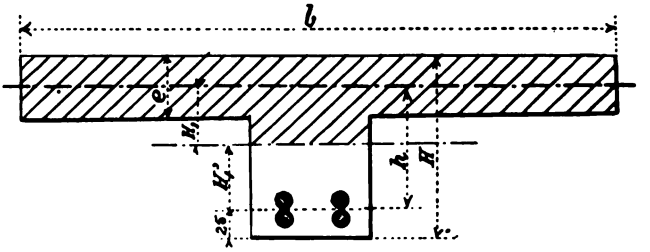


Fig. 122

Calcul d'une poutre à simple té (voir fig. 122). — Soit H la hauteur totale de la poutre, H_1 la distance de l'axe neutre à l'axe du hourdis ; H_1' la distance de l'axe neutre au centre de gravité des armatures ; e l'épaisseur du hourdis ; b l'étendue *utilisable* du hourdis intéressé à la nervure ; F la section de fer armant la nervure, on a :

$$\frac{M}{2} = eb \times H_1 \times 250\,000$$

d'où :

$$H_1 = \frac{M}{500\,000\, eb}$$

H_1, e et b sont ici exprimés en mètres ; si tout en exprimant M en kilogrammètres, on veut exprimer H_1 e et b en centimètres, on écrira :

$$(1) \qquad H_1 = \frac{M}{50\, eb}.$$

On a ici :

(2) $$H_1' = H - H_1 - \frac{e}{2} - 5$$

$$F \times 10\,000\,000 \times H_1' = \frac{M}{2}$$

d'où

$$F = \frac{M}{20\,000\,000\,H_1'}$$

et si on veut que F, H_1' soient exprimés en centimètres, tout en conservant M en kilogrammètres

(3) $$F = \frac{M}{20\,H_1'}.$$

Application. — *Déterminer l'armature d'une poutre de 6 mètres de portée, de 1m,50 de largeur utilisable de hourdis, et de 0m,40 de hauteur totale, devant supporter une charge totale par mètre courant de poutre de 1 600 kilogrammes, uniformément répartie (le hourdis a 0m,08 d'épaisseur)?*

Si l'on suppose cette poutre reposant librement sur deux appuis distants de 6 mètres, sans encastrement possible.

(1) $$\begin{cases} M = \dfrac{1\,600 \times 6^2}{8} = 7\,200 \text{ kilogrammètres} \\ H_1 = \dfrac{7\,200}{1{,}5} \times \dfrac{1}{50 \times 8} = 12 \text{ centimètres} \\ H'_1 = 40 - 12 - \dfrac{8}{2} - 5 = 19 \text{ centimètres} \\ F = \dfrac{7\,200}{20 \times 19} = 18{,}95 \text{ centimètres carrés.} \end{cases}$$

Pratiquement, 4 barres rondes de 25 millimètres de diamètre donneront une section totale de 4 × 4,9 centimètres carrés = 19,63 centimètres carrés.

L'effort tranchant T a pour valeur

(2) $$T = \frac{1\,600 \times 6}{2} = 4\,800 \text{ kilogrammes.}$$

Si l'on veut employer des étriers de fer feuillard de $20 \times 15 = 30$ millimètres carrés de section, se rappelant que seules les barres droites (2 de 25 millimètres) comportent des étriers, on posera :

$$d = \frac{28 \times 2 \times 30\ (12 + 19)}{4\,800} = 10{,}8 \text{ environ.}$$

On prendra :

$$d = 10 \text{ centimètres.}$$

et successivement pour les déplacements ultérieurs 11, 12, 13 centimètres, etc.

Le mode de calcul mentionné est donc des plus simples pour le dessinateur. On a vu qu'on s'est donné la hauteur totale de la poutre, comme on s'est donné précédemment la hauteur du hourdis, et les sections de fer ou de béton des poteaux. Mais cette indétermination ne présente aucune gêne pour la rapidité des calculs, attendu que les tâtonnements se trouvent supprimés par des barèmes, calculés une fois pour toutes avec les données pratiques qui résultent de l'expérience du constructeur.

Comparaison avec les formules théoriques. — Il parait oiseux de comparer les résultats donnés par ces formules semi-empiriques avec ceux des formules purement théoriques. Cette recherche ne présentera de l'intérêt que dans des cas particuliers pour lesquels le constructeur aura fait choix de certaines dimensions et voudra déterminer les taux de travail du béton et du fer d'une construction déjà projetée ou exécutée. En effet, nous ne croyons pas le répéter de trop, les coefficients de travail de 25 kilogrammes pour le béton et de 1 000 kilogrammes pour le fer, ne sont pas réels; ils doivent être considérés comme des valeurs auxiliaires, entrant dans des formules semi-empiriques.

C'est ainsi que pour les dalles, dans l'hypothèse que l'on ne peut rien demander au ciment pour le travail à la traction, on aurait pour l'expression théorique du moment résistant à la compression (v. fig. 123) :

$$\frac{C}{2} \times 2Hb \times \frac{4H}{3} = \frac{4CH^2b}{3},$$

(C étant le taux maximum du travail de compression).

Tandis que M. Hennebique pose $50\,H^2b$.

On en déduit tout d'abord :

$$C = \frac{150}{4} = 37{,}5 \text{ par centimètre carré.}$$

Il en résulterait que le taux moyen de 23 kilogrammes admis par M. Hennebique correspond à un coefficient de travail de $37^k{,}4$ dans les fibres extrêmes.

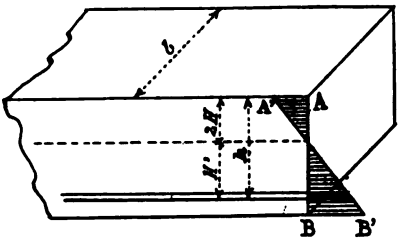


Fig. 123

Ce taux C et le taux f, supposé de 1000 kilogrammes pour le métal répondent à une position déterminée de la fibre neutre.

En supposant en effet que les déformations soient proportionnelles aux efforts, on aurait pour le raccourcissement des fibres extrêmes du béton comprimé $\frac{37{,}5}{E_B}$ et pour l'allongement des armatures, $\frac{1000}{E_F}$; E_B et E_F étant les coefficients d'élasticité respectifs du béton et du fer.

On aura donc en supposant que les sections planes restent planes après déformation.

$$\frac{37{,}5}{E_B} : 2H = \frac{1000}{E_F} : H'.$$

D'où :

$$2H = \frac{37{,}5}{1000} \times \frac{E_F}{E_B} \times H'.$$

Si l'on suppose $\frac{E_F}{E_B} = 10{,}6$, comme le propose M. Résal,

$$2H = \frac{4}{10} H'.$$

Mais on a :

$$2H + H' = h.$$

D'où

$$2H = \frac{4}{10}(h - 2H),$$

et

$$2H = \frac{2}{7}h,$$

$$H' = \frac{5}{7}h.$$

Enfin, l'équilibre des forces horizontales permet de déterminer le pourcentage.

Posant en effet :

$$\frac{37,5}{2} \times b \times 2H = 1000F.$$

on en tire :

$$F = \frac{37,5}{2000} b \times 2H,$$

et remplaçant 2 H par $\frac{2}{7}h$,

$$\frac{F}{bh} = 0,0054 = \text{pourcentage}.$$

La formule semi-empirique concorde donc identiquement avec une formule rationnelle basée sur l'hypothèse d'une résistance nulle du béton à l'extension, quand le pourcentage réalisé atteint 0,0054 ou environ 1/2 %.

Dans ces conditions, le moment total de résistance est :

$$M = \left(\frac{37,5}{2} b \times 2H \times \frac{2}{3} 2H\right) + 1000 FH',$$

ou remplaçant H, H' et F par leurs valeurs trouvées ci-dessus :

$$M = \left(\frac{37,5}{2} b \times \frac{2h}{7} \times \frac{2}{3} \times \frac{2h}{7}\right) + \left(1000 \times 0,0054 bh \times \frac{5}{7} h\right).$$

ou

$$M = 1.020 bh^2 + 3,857 bh^2 = 4,875 bh^2.$$

Cette dernière équation montre combien les résultats donnés par la formule Hennebique des dalles sont rassurants, puisqu'ils ne conduisent qu'à un moment unitaire de $4{,}875\,h^2$, alors que dans l'hypothèse d'un concours important du béton à la traction, on verra que l'on peut prendre $m = 6\,h^2$, avec un pourcentage plus faible encore.

On remarquera que ces résultats satisfaisants ont été obtenus cependant à l'aide d'une hypothèse tout à fait arbitraire : l'égalité des moments à la compression et à l'extension, alors que pour le pourcentage de 0,0054, le moment de compression est de $1{,}02\,h^2$ et celui d'extension est 3,857 soit près de 4 fois plus grand.

M. Considère cherchant à apprécier de son côté les formules Hennebique en faisant entrer en ligne de compte le travail du béton à l'extension a établi le tableau comparatif suivant :

Pourcentage des armatures	Moments de rupture en kilogrammètres calculés à l'aide des premières formules de Considère				Moments pratiques calculés par les formules Hennebique			Coefficient de sécurité
	Tension du béton par cmq.	Compression maxima du béton par cmq.	Tension des armatures par cmq.	Moment fléchissant maxima	Compression moyenne du béton par cmq.	Tension moyenne des armatures par cmq.	Moment pratique	
0,0082	12	100	16	0,140	25	10	0,061	2,3
0,0100	12	107	16	0,157	25	10	0,070	2,3
0,0200	12	143	16	0,252	25	10	0,100	2,6
0,0217	12	150	16	0,280	25	10	0,104	2,7
0,0300	12	150	12,9	0,296	25	10	0,114	2,8

Les limites de rupture sur lesquelles ce tableau est basé, sont un taux de travail du fer de 16 kilogrammes (limite d'élasticité), ou une compression du béton de 150 kilogrammes par centimètre carré.

Nous verrons par la suite que les résultats des formules Hennebique s'écartent encore moins de ceux des formules Considère pour les formules à simple té, ce qui n'est pas étonnant, la section du béton travaillant à la traction étant relativement faible dans ces poutres.

86. Méthode Rabut. — La méthode suivante, attribuée sous toutes réserves à M. Rabut, Ingénieur en chef des Ponts-et-Chaussées, présente un caractère plus scientifique que la précédente.

Calcul des dalles. — 1° Une dalle de hauteur H (fig. 124) est assimilable à une poutre de hauteur h dont la semelle supérieure AB se trouve à une distance $u' = \frac{H}{6}$ des fibres les plus comprimées et dont la semelle inférieure CD passe par le centre de gravité des armatures tendues; la distance u de ce centre de gravité aux fibres tendues extrêmes doit être telle que les fers ronds de diamètre d qui constituent l'armature soient recouverts d'une épaisseur de béton égale au moins à ce diamètre

$$\left(u \geqq \frac{3d}{2}\right);$$

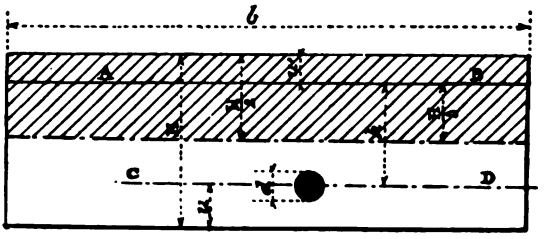


Fig. 124

2° Le béton de la moitié supérieure de la poutre travaille seul à la compression ; on néglige la résistance de la moitié inférieure.

Ceci posé, le calcul se fait de la façon suivante :

$$h = H - u' - u.$$

L'effort moyen F de tension de compression est :

$$F = \frac{M}{h}.$$

Le travail moyen du métal tendu de section s pour la largeur b

$$R_F = \frac{F}{s}.$$

Le travail moyen du béton comprimé de section S est :

$$R_c = \frac{F}{S}.$$

(S étant égal à $\frac{bH}{2}$ pour une largeur b de dalle).

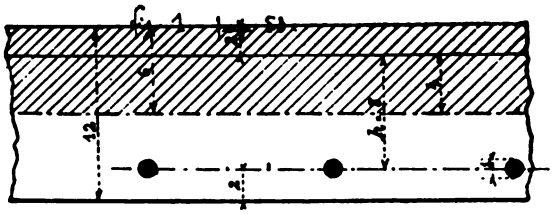


Fig. 125

Applications. — 1° *Une dalle de 12 centimètres d'épaisseur a été armé de 8 barres rondes de 10 millimètres par mètre* (fig. 125) *dont l'axe se trouve à 2 centimètres de la face tendue ; on charge cette dalle de telle façon que le moment fléchissant maximum est de 864 kilogrammètres ; on demande le travail du métal et du béton.*

On a

$$h = H - u' - u \begin{cases} u' = \frac{H}{6} = \frac{12}{6} = 2 \\ u = 2 \end{cases}$$

$$h = 12 - 2 - 2 = 8$$

$$F = \frac{864}{0,08} = 10800 \text{ kilogrammes}$$

$$s = 8 \times 79^{mm^2} = 622$$

$$R_F = \frac{10800}{622} = 17^{kg},36 \text{ par millimètre carré}$$

$$S = \frac{12}{2} \times 100 = 600$$

$$R_c = \frac{10800}{600} = 18 \text{ kilog. par cent. carré ;}$$

2° On demande le moment de résistance normal de la dalle susmentionnée, si l'on ne veut pas dépasser $R_F = 10$ kilogrammes.

$$M = 864 \times \frac{10}{17,36} = 497 \text{ kilogrammètres}$$

$$R_c = 18 \times \frac{10}{17,36} = 10^{kg},37.$$

3° *On demande de déterminer une dalle répondant à une surcharge de* 2500 *kilogrammes sur* $2^m,50$ *de portée : on donne comme limite* $R_c = 30$ kilogrammes, $R_F = 12$ kilogrammes et $H = 13$ centimètres.

$$H = 13, \text{ poids mort } 0,13 \times 2500 = 325 \text{ kilogrammes}$$

$$u = \frac{13}{6} = 2,167$$

u' sera pris égal à 3 *a priori.*

$$H - u - u' = 7,833$$

$$M = \frac{(2500^{kg} + 325) \times \overline{2,50}^2}{8} = 2207 \text{ kilogrammètres}$$

$$F = \frac{2207}{0,07833} = 28175 \text{ kilogrammes}$$

$$S = \frac{13}{2} \times 100 = 650$$

$$R_e = \frac{28175}{650} = 43^{kg},3.$$

Ce taux de travail moyen est évidemment trop élevé ; l'épaisseur de 13 centimètres est donc insuffisante. On essaiera $H = 15$.

Poids mort :

$$0,15 \times 2500 = 375 \text{ kilogrammes}$$

$$u = \frac{15}{6} = 2,5$$

$$u' = 3$$

$$H - u - u' = 15 - 5,5 = 9,5$$

$$M = \frac{(2500 + 375) \times \overline{2,50}^2}{8} = 2243 \text{ kilogrammètres}$$

$$F = \frac{2243}{0,095} = 23610$$

$$S = \frac{15}{2} \times 100 = 750$$

$$R_e = \frac{23610}{750} = 31,48$$

Cette valeur de R_e est encore trop forte. Mais si l'on admet que la dalle subisse un demi-encastrement, on aura

$$M = \frac{2875^k \times 2,50}{10} = 1796 \text{ kilogrammètres}$$

$$F = \frac{1796}{0,095} = 18905 \text{ kilogrammes}$$

$$R_e = \frac{18905}{750} = 25^k,25$$

$$s = \frac{18905}{10^k} = 1891 \text{ millimètres carrés.}$$

Faisant choix de barres de 16 millimètres, section de 200 millimètres carrés, l'écartement à prévoir sera de : $\frac{200}{1891} = 0^m,106$.

La distance $u = 3$ est convenable, puisque l'on peut prendre

$$u = \frac{3}{2} d = \frac{3}{2} \times 1,6 = 2,4.$$

Toutefois, comme l'on a admis un demi-encastrement, il y a lieu de prévoir la barre incurvée d'Hennebique. On aura donc au milieu de la portée 2 sections et l'on prévoira des barres de 12 millimètres, section $2 \times 113 = 226$ millimètres carrés et l'écartement des barres sera de : $\frac{226}{1891} = 0^m,120$.

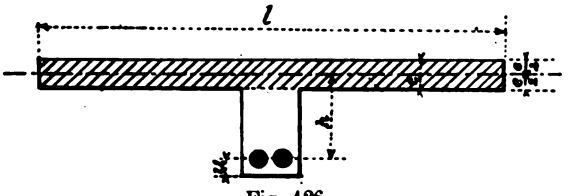


Fig. 126

Calcul des hourdis nervurés — L'élément d'un hourdis nervuré (à la compression) est constitué par le hourdis d'épaisseur e et de largeur l (fig. 126), l étant l'écartement des nervures, si cet écartement n'est pas trop grand pour pouvoir être considéré comme intéressé dans toute son étendue, à l'extension par l'armature tendue.

La hauteur h de la poutre équivalente est la distance entre les axes du hourdis et des armatures.

On a donc :

$$F = \frac{M}{h}$$

$$S = el$$

$$R_c = \frac{F}{el}$$

$$R_F = \frac{F}{s}$$

(s étant la section totale des armatures de la nervure).

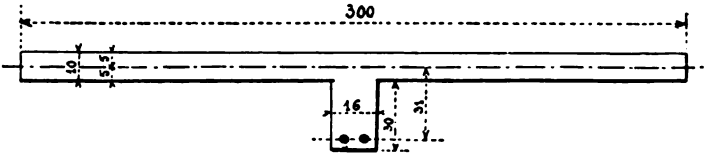


Fig. 127

Application. — *Déterminer le travail d'un hourdis* (fig. 127) *de* 10 × 300, *avec nervure de* 16 × 30, 2 *barres de* 30 *millimètres, dont l'axe se trouve à* 4 *centimètres de la face tendue de la nervure, pour un moment fléchissant de* 7 000 *kilogrammètres.*

$$h = 10 + 30 - \frac{10}{2} - 4 = 31$$

$$F = \frac{7\,000}{0{,}31} = 22\,580 \text{ kilogrammes}$$

$$R_c = \frac{22\,580}{10 \times 300} = 7^{kg},52$$

$$R_F = \frac{22\,580}{2 \times 707} = 16 \text{ kilogrammes environ.}$$

2° Pour ramener le travail du fer à 12 kilogrammes, quel diamètre faudrait-il donner aux armatures du hourdis précédent ou quelle hauteur à la nervure ?

ıi l'on conserve la même hauteur de nervure, on a :

$$R_F = 10 = \frac{22\,580}{s}$$

$$s = \frac{22\,580}{10} = 2\,258.$$

ınds de 38 donneront $2 \times 1\,134 = 2\,268$.

ɔi l'on conserve les mêmes fers, on aura :

$$R_F = 10 = \frac{7\,000}{h \times s},$$

:

$$h = \frac{7\,000}{10\,s} = \frac{7\,000}{10 \times 1\,414} = 0^m,50.$$

LIVRE III

CALCUL DU CIMENT ARMÉ

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS

87. Armatures. — Les armatures employées pour les ouvrages en ciment armé sont des fers ou des aciers contenant au maximum 1 °/₀ de carbone.

Ces métaux peuvent se diviser comme suit, d'après le Congrès métallurgique de Philadelphie [1].

1° *Fers soudés.* — Obtenus par la réunion de masses pâteuses, soit par paquetage, soit par tout autre procédé n'impliquant pas la fusion. Ne durcissent pas sensiblement à la trempe.

2° *Aciers soudés.* — Obtenus généralement par la réunion de masses pâteuses ; prennent la trempe et possèdent ainsi la propriété caractéristique des aciers.

3° *Fers fondus.* — Obtenus à l'état fondu ; ne prennent pas la trempe d'une façon sensible.

4° *Aciers fondus.* — Obtenus à l'état fondu ; prennent la trempe.

L'ouvrage déjà mentionné de M. Résal, ingénieur en chef des

(1) Voir Résal, *Fonte, Fers et Aciers*, p. 246.

Ponts et Chaussées, donne les renseignements suivants sur les fers et les aciers du commerce les plus usuels.

Qualité		Limite d'élasticité par millim. carré kilogr.		Allongement à la rupture % sur 200 millimètres		Limite de rupture par millim. carré kilogr.		Emplois les plus usuels
FERS — Coefficient d'élasticité moyen. $E = 20 \times 10^9$								
Commun, n° 2		17	à 20	3,5	à 6	29	à 34	Fers communs pour boulonnerie, profilés du commerce, tôles.
Ordinaire ou n° 3 . .		18	21	5	9	30	35	Profilés ordinaires, tôles pevant supporter un léger emboutissage.
Fort ou n° 4		19	21,5	8	13	31	36	Fers pour boulonnerie supérieure, rivets.
Fort supérieur ou n° 5.		20	22	12	16	32	34	Tôles à chaudière à haute pression.
Fin, n° 6.		21	23	14	18	33	35	Tôles à chaudière, rivets de machines.
ACIERS — Coefficient d'élasticité moyen. $E = 22 \times 10^9$								
Extra doux soudant.	non trempé.	26	à 29	28	à 32	35	à 40	Tréfilage, tôles minces embouties, rivets, etc.
	trempé . .	30	34	22	28	40	48	
Très doux soudable.	non trempé.	26	29	25	28	40	45	Tôles et profilés pour chaudières, pièces embouties, etc.
	trempé . .	34	40	19	22	48	55	
Doux.	non trempé.	29	33	23	25	45	50	id. id.
	trempé . .	40	50	16	19	55	70	
Mi-doux.	non trempé.	33	35	19	23	50	60	Pièces mécaniques, outils, etc.
	trempé . .	50	60	11	16	70	90	
Mi-dur.	non trempé.	35	38	15	19	60	70	Rails, éclisses, etc.
	trempé . .	60	68	7	11	90	105	

Fils pour câbles, aciers. Coefficient d'élasticité moyen : $E = 22 \times 10^9$. Diamètres du commerce de $0^{mm},5$ à 10 millimètres, Résistance de 60 à 200 kilogrammes par millimètre carré. Le prix de ces fils et leur résistance décroissent quand leur diamètre augmente ; leur limite d'élasticité est à peu près égale à la moitié de leur résistance à la rupture.

Continuité des armatures. — Les barres employées comme armatures se livrent en longueurs de 6 à 10 mètres ou en longueurs fixes quelconques moyennant une petite plus-value, dont la limite résulte surtout des moyens de transport, et du poids considérable qu'elles peuvent atteindre.

Les barres de diamètre inférieur à 6 millimètres sont livrées en *machine*, c'est-à-dire enroulées et présentant par suite de très grandes longueurs.

A noter en passant que lorsque l'on ne dispose pas de barres suffisamment longues pour franchir les portées prévues (plus l'encastrement nécessaire dans les pièces porteuses), le joint devient une question très délicate ; s'il s'agit de profilés, on se sert d'éclisses couvre-joints analogues à celles usitées en charpente métallique.

On n'oubliera pas que l'assemblage par rivets ou par boulons affaiblit la section, et que par suite, il convient de prévoir ces joints dans les sections peu fatiguées relativement.

Les barres rondes comprimées sont simplement mises bout à bout, leurs extrémités tenues latéralement par des bouts de tube métallique dans lesquels elles pénètrent (Système Ed. Coignet).

Les barres rondes soumises à un effort d'extension sont simplement juxtaposées avec un recouvrement suffisant pour que l'effort d'adhérence soit équivalent à l'effort de traction ; de plus les extrémités des tronçons sont repliés en crochets du même côté (fig. 128) ; enfin quelques ligatures s'opposent à tout déplacement relatif pendant le pilonnage (Système Ed. Coignet). Le béton durci entre ces crochets forme une cale qui s'oppose également à la dissociation de ce joint.

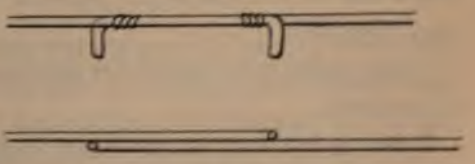


Fig. 128

Toutes autres solutions telles que taraudage aux extrémités, aplatissement des extrémités de manière à permettre un assemblage par couvre-joints, sont plus coûteuses et sans doute moins efficaces.

Il y a lieu de mentionner comme une solution avantageuse d'un

avenir très prochain, la soudure autogène au chalumeau à flamme oxy-acétylénique dont M. Bonna a déjà fait une remarquable application pour la fermeture des tôles et armatures de ses tuyaux en ciment armé.

Loi des allongements des armatures. — Quand on soumet une barre métallique à des efforts de traction dirigés suivant son axe et que l'on mesure les allongements correspondants, on observe qu'ils croissent d'abord proportionnellement aux efforts (période d'élasticité parfaite), puis qu'ils augmentent d'une façon assez irrégulière, mais très rapide (période de ductilité ou de grande extension). La limite entre ces deux périodes n'est pas bien définie ; on lui donne le nom de *limite de proportionnalité ou de limite d'élasticité*. La première dénomination s'applique plus exactement à la fin de la période d'élasticité parfaite, la deuxième à un effort produisant un allongement total deux fois plus grand que l'allongement proportionnel résultant de la première période. Il est clair que cette deuxième limite est un peu plus élevée que la première, mais la différence est suffisamment faible pour qu'on puisse la négliger en pratique.

Voir ce qui a été dit à ce sujet p. 70 et le tableau de M. Considère, p. 71.

Lois de Wœhler. — Si l'on soumet une barre métallique à l'action d'une série d'efforts qui peuvent être répétés indéfiniment, on a observé :

1° Que la barre se rompt dès que les efforts dépassent la limite d'élasticité ;

2° Que la barre ne se rompt pas tant que ces efforts sont inférieurs à cette limite [1].

Béton. — On ne dispose malheureusement pas de renseignements aussi précis sur les résistances du béton, tant à la compression qu'à l'extension pour des dosages déterminés. La résistance

[1] Cette dernière loi n'est pas admise par tous les auteurs. D'après M. Bauschinger des efforts égaux et de signes contraires peuvent rompre la barre dès qu'ils dépassent une valeur à peu près égale aux 3/5 de la limite d'élasticité. M. Résal a fait très justement observer à ce sujet que dans les expériences de Bauschinger, l'effort considéré était un *effort dynamique* capable de produire dans la barre un effort réel supérieur à la limite d'élasticité.

d'un béton diffère notablement suivant les conditions de son exécution, nature des matériaux disponibles, manière d'opérer des ouvriers. Il faut donc en l'état se borner à indiquer des chiffres pratiques moyens, très différents de ceux qui ressortiraient d'essais de laboratoires.

Il sera admis ici pour le mélange usuel (ciment, 300 kilogrammes ; sable, $0^{m3},400$; gravier, $0^{m3},800$) employé pour les ouvrages en ciment armé travaillant à la compression ou à la flexion :

R_c Résistance à la compression, 190 kilogrammes ;

R_t Résistance à la traction, 20 kilogrammes ;

n rapport des coefficients d'élasticité de l'acier doux à celui du béton, 20, ce qui correspond à

$$E_c = \frac{22 \times \overline{10}^9}{20} = 11 \times \overline{10}^9$$

ou 1 100000 en prenant le centimètre pour unité.

Cette valeur de n est celle que M. Ed. Coignet a adoptée à la suite de ses expériences dont il est rendu compte p. 57, pour des charges répondant au quart de celles qui déterminent la rupture.

Faute de renseignements plus précis, on supposera que la limite d'élasticité du béton est égale à la moitié de la résistance de rupture correspondante.

La résistance au cisaillement qui n'a pas été mentionnée plus haut, peut être prise égale aux 4/5 de la résistance à l'extension.

Coefficients de sécurité. — La rupture d'un ouvrage en ciment armé peut résulter de l'insuffisance de résistance, soit du béton, soit du métal. Il est clair qu'il convient de proportionner ces matériaux de manière que la rupture résulte à la fois de l'insuffisance simultanée de l'un et de l'autre.

Le tableau de la page 71 montre que dès que le métal travaille au-delà de sa limite d'élasticité, il s'allonge en s'amincissant ; il y a donc lieu de craindre, (et les expériences de M. de Joly confirment cette hypothèse), que travaillant au-dessus de cette limite, le métal se sépare de sa gaîne et désarme par suite la pièce.

D'autre part, d'après les lois de Wöhler la répétition d'efforts supérieurs à la limite d'élasticité amènerait peu à peu la rupture

de l'armature métallique. On pourra donc admettre que la *limite extrême de résistance du métal correspond à sa limite d'élasticité.*

La limite d'élasticité du béton est moins claire. A défaut également de notions précises sur l'influence de la répétition des efforts sur le béton, on supposera comme pour le métal, que *le travail de compression du béton ne doit pas dépasser dans les conditions les plus défavorables, la moitié de la résistance à la rupture.*

On verra par la suite qu'il n'y a pas lieu de s'inquiéter dans la même mesure de la résistance à l'extension du béton et que l'on peut sans inconvénient lui laisser prendre sa résistance maxima. M. Considère ayant démontré que les armatures avaient la propriété de maintenir constant le taux de travail à l'extension du béton, alors qu'il a atteint sa limite de rupture, tant que l'armature n'a pas dépassé sa limite d'élasticité.

En résumé on admettra ici que la limite extrême de résistance d'une pièce en ciment armé est atteinte, soit quand l'armature travaille à sa limite d'élasticité, soit quand le taux de travail du béton comprimé atteint la moitié de la résistance à la rupture, soit quand l'effort de cisaillement atteint les 4/5 de celui qui répond à la limite d'élasticité à l'extension et qu'il n'y a pas lieu de s'occuper des efforts produits dans le béton tendu, à moins qu'il ne s'agisse d'ouvrages nécessitant une étanchéité absolue.

Le rapport entre les charges totales qui résultent des surcharges prévues au projet, augmentées des poids morts, et la charge de rupture définie par l'une des conditions ci-dessus mentionnées constituera le *coefficient de sécurité.*

La valeur de ce coefficient variera avec la nature des surcharges prévues. On admettra ici des valeurs semblables à celles usitées pour les constructions métalliques, savoir :

2 Pour les constructions exposées accidentellement seulement à la totalité des surcharges prévues au projet, ces surcharges n'étant pas de nature à occasionner de fortes vibrations (*planchers d'habitations*).

2,5 Pour des constructions destinées à supporter des surcharges mobiles avec trépidations modérées (*passerelles à une seule travée, ponts-routes, planchers de cour*).

3 Pour des constructions exposées à des surcharges mobiles occasionnant de fortes trépidations (*ponts pour voies ferrées, planchers d'usines*).

On aura par suite, pour fixer les idées, comme limites des taux de travail permis :

pour le béton usité au dosage 300 kilogrammes de ciment, $0^{m3},400$ de sable, $0^{m3},800$ de gravier de résistance $R_c = 190$ kilogrammes par centimètre carré :

pour des armatures en fer de résistance $R_f = 36$ kilogrammes par millimètre carré ;

et pour des armatures en acier de résistance $R_f = 56$ kilogrammes par millimètre carré ;

les chiffres indiqués au tableau ci-après, suivant la nature des charges :

Désignation	Faibles variations I	Trépidations moyennes II	Trépidations violentes III
	kg.	kg.	kg.
Béton comprimé	47,50	38,00	31,7
» tendu	20,00	20,00	20,00
Fer comprimé, ou tendu	9,00	7,2	6,00
Acier comprimé, ou tendu	14,00	11,2	9,3

CHAPITRE II

—

COMPRESSION

88. Compression. — On détermine les taux de travail du métal et du béton qui constituent une pièce comprimée de faible longueur par rapport à sa section, en ramenant celle-ci à une section homogène composée du béton (généralement sans déduction de la section des armatures) et de la section des armatures amplifiée dans le rapport n du coefficient d'élasticité du métal à celui du béton prévu. Le taux de travail du béton est alors donné par le quotient de l'effort de compression par la section du solide homogène, et le taux de travail du métal est n fois plus grand que celui du béton.

Si nous appelons B la section du béton, ou plutôt celle du béton armé, P l'effort de compression, M la section des armatures, R_c la résistance à la compression du béton R_F le taux de travail du métal on a :

$$R_c = \frac{P}{B + nM}$$

et

$$R_F = nR_c.$$

Exemple. — *On demande les taux de travail du béton et du métal d'un poteau carré de* 20 × 20, *armé de* 4 *barres rondes de* 20 *millimètres, en acier, soumis à un effort de compression de* 30000 *kilogrammes. Le coefficient d'élasticité du béton a été trouvé de*

$$1,2 \times \overline{10}^9.$$

On a :

$$n = \frac{22 \times 10^9}{1,2 \times 10^9} = 18,3.$$

Section du béton	$20 \times 20 =$	400 cmq.
Section transformée des armatures	$4 \times 3,14 \times 18,3 =$	230 »
Section fictive	$=$	630 »

$$R_c = \frac{30\,000^{kg}}{630} = 47^{kg},50 \quad \text{par centimètre carré}$$

$$R_f = 18,3 \times 47,5 = 871^{kg} \quad »$$

La détermination des taux de travail d'un poteau en béton armé déjà projeté, est donc des plus simples, lorsque l'on connaît le coefficient d'élasticité du béton. Mais c'est généralement le problème inverse qui se pose. On donne une charge, on demande de déterminer la section du béton et l'armature correspondante ; le problème est indéterminé, puisque l'on ne dispose que d'une équation, pour deux inconnues. De plus, il faut se donner arbitrairement la valeur de R_c et de R_F que l'on ne veut pas dépasser ; enfin il y a lieu de faire une hypothèse sur la valeur de n.

On admettra une valeur de $n = 20$.

La première équation précédente devient

$$R_c = \frac{P}{B + 20M}.$$

D'où

$$M = \frac{P - BR_c}{20R_c}.$$

Il y a lieu maintenant de faire remarquer qu'il convient presque toujours d'avoir une forte section B et parce que le béton est plus économique à la compression que le fer et parce que le flambage est atténué, et parce que les piliers trop grêles ne satisfont pas à l'œil.

Une bonne règle pratique donnant satisfaction à ces desiderata est de faire $B = \frac{P}{50}$ environ.

L'équation précédente devient dans ces conditions :

$$M = \frac{P - \frac{P}{50} R_c}{20R_c}.$$

Comme on a aussi :

$$\frac{M}{B} = \text{pourcentage } p = \frac{M \times 50}{P}.$$

On déduit de ces deux équations

$$p = \frac{50 - R_c}{20R_c}$$

et

$$R_c = \frac{50}{20p + 1}.$$

On peut dresser ainsi les deux tableaux suivants :

$p = 0$	$R_c = 50^k$	$R_c = 47^k,50$	$p = 0,00278$
$p = 0,01$	$R_c = 41,67$	$R_c = 38,00$	$p = 0,0158$
$p = 0,02$	$R_c = 35,72$	$R_c = 31,67$	$p = 0,029$
$p = 0,03$	$R_c = 31,25$	»	»
$p = 0,04$	$R_c = 27,78$	»	»
$p = 0,05$	$R_c = 25$	»	»

Le maximum de R_f étant de $20 \times 50^{kg} = 10$ kilogrammes, il n'y a pas à craindre de se rapprocher plus vite de la limite d'élasticité du métal (principalement acier), que celle du béton.

Quant aux pourcentages, inférieurs à 3 %, ils ne sont pas exagérés.

Les équations $B = \frac{P}{50}$ et $M = \frac{P - BR_c}{20R_c}$ peuvent donc être employées simultanément et sans inconvénient. On déterminera comme suit les dimensions d'un poteau dans un projet.

Déterminer l'équarrissage et les armatures d'un poteau carré devant supporter une charge de 50000 *kilogrammes.* — (On n'a pas à tenir compte du flambage). On ne veut pas dépasser 45 kilogrammes pour la valeur de R_c.

$$B = \frac{50000^{kg}}{50} = 1000.$$

Le côté du carré a pour valeur $\sqrt{1000} = 31,61$.

On prendra $B = 30 \times 30$, par exemple.

$$M = \frac{P - BR_c'}{20R_c} = \frac{50000 - 900 \times 45^{kg}}{20 \times 45^{kg}} = 11,67.$$

On prévoira 4 barres rondes de 20 millimètres, section 12,56.

La résistance de ce poteau sera :

Pour le béton	$900 \times 45 = 40500$	kilogrammes
Pour les armatures	$12,56 \times 45 \times 20 = 11304$	»
	Résistance totale $= 51804$	»

Comme on ne demande que 50000 kilogrammes, si l'on néglige le poids du poteau lui-même, sur la hauteur duquel il n'a pas été fait d'hypothèse, les taux de travail des matières seront :

$$R_c = 45^{kg} \times \frac{50000}{51804} = 43^{kg},43$$

$$R_f = 900^{kg} \times \frac{50000}{51804} = 43,43 \times 20 = 868^{kg},6$$

Les prismes soumis à la compression sont toujours enlacés d'armatures transversales, continues (en hélices) ou indépendantes, s'opposant au gonflement des barres longitudinales et par suite du béton. M. Considère a montré toute l'importance de ces armatures secondaires, lorsque leur écartement ne dépasse guère 1/7 à 1/10 de la largeur du prisme. Dans ces conditions, le prisme jouit de propriétés toutes spéciales, en raison desquelles ce savant ingénieur a été conduit à donner un nom spécial au béton armé de cette façon — celui de *béton fretté* [1]. Suivant donc que l'on multipliera plus ou moins les attaches ou frettes, le béton armé se rapprochera plus ou moins du béton fretté, c'est-à-dire armé longitudinalement à raison de 1 à 2 %, et fretté transversalement à raison de 2 à 3 %. Si les attaches n'atteignent ni le nombre, ni la section totale sus-mentionnés, les prismes armés étudiés plus haut ne jouiront pas de la résistance du béton fretté qui s'élève à 230 kilogrammes et à 450 kilogrammes même, après

[1] Résistance à la compression du béton armé et du béton fretté, par A. Considère, inspecteur général des Ponts et Chaussées (voir à l'Appendice).

des épreuves graduées (pour des dosages s'élevant, il est vrai, jusqu'à 600 kilogrammes), mais cependant d'un accroissement notable de résistance. Il en résulte donc que les valeurs de R, de 40 à 50 kilogrammes même, n'ont absolument rien d'exagéré et répondent à des coefficients de sécurité à la rupture de 5 et de 4, à condition que l'on prévoie des attaches de 6 millimètres par exemple se répétant tous les 4 ou 5 centimètres.

Flambage. — On sait que lorsque le prisme présente une certaine longueur par rapport à sa plus faible dimension, sa rupture ne se produit pas par compression simple, mais aussi par flexion à la suite d'une déviation axiale qui peut augmenter très rapidement une fois commencée.

D'une façon générale, la résistance P d'une pièce comprimée est donnée par la formule d'Euler :

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

dans laquelle π est le rapport de 3,1416 et l la longueur libre de la pièce. On entend par hauteur libre, non pas la longueur totale entre appuis extrêmes, mais une partie de cette longueur sur laquelle la pièce tend à se déformer, comme si elle était articulée aux extrémités de cette longueur réduite. E est le coefficient d'élasticité de la matière et I le moment d'inertie minimum de la section. Ces deux facteurs ne sont donc pas définis quand il s'agit d'une pièce hétérogène, mais on s'approchera de la vérité en transformant comme il a été dit ci-dessus cette section hétérogène. On opérera alors comme il a été indiqué au paragraphe 54 pour le béton pur.

La formule d'Euler donne en appelant K le rayon de gyration

$$(1) \qquad R = \pi^2 E \frac{K^2}{l^2}$$

ou approximativement :

$$R = 10E \frac{K^2}{l^2}.$$

Mais cette formule n'est applicable que tant que E peut être

considéré comme constant, c'est-à-dire tant que le coefficient de la charge P par la section amplifiée sera inférieur à la limite d'élasticité du béton.

Au-delà, le taux de la limite de rupture pourra être donné approximativement par une formule du genre :

$$R = \sigma - \beta \frac{l}{K}. \tag{2}$$

où σ représente la résistance de rupture du béton par compression et β un coefficient constant que l'on peut poser égal à :

$$\beta = \frac{\sigma^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{79E}}.$$

La première condition est remplie quand le rapport $\frac{l}{K}$ est plus grand que $\pi\sqrt{\frac{2E}{\sigma}}$.

Appliquant ces valeurs aux divers mélanges suivants, on a :

Dosage 1 : 4 : 5 (200 *kilogrammes ciment*, $0^{m^3},565$ *sable*, $0^{m^3},710$ gravier).

$\sigma = 90$ kilogrammes au bout de 28 jours

$E = 80000$

$$\frac{l}{K} < 132; \quad R = 90 - 0,34 \frac{l}{K}$$

$$\frac{l}{K} > 132; \quad R = 10 \times 80000 \times \frac{K^2}{l^2}.$$

Dosage 1 : 2 : 5 (250 *kilogrammes ciment*, $0^{m^3},360$ *sable*, $0^{m^3},910$ *gravier*).

$\sigma = 170$ kilogrammes au bout de 28 jours

$E = 100000$

$$\frac{l}{K} < 108; \quad R = 170 - 0,78 \frac{l}{K}$$

$$\frac{l}{K} > 108; \quad R = 10 \times 100000 \times \frac{K^2}{l^2}.$$

Dosage (300 *kilogrammes ciment ;* $0^{m^3},480$ *sable ;* $0^{m^3},720$ *gravier*).

$$\sigma = 190 \text{ kilogrammes au bout de 28 jours}$$

$$E = 100000$$

$$\frac{l}{R} < 102; \quad R = 190 - 0,93 \frac{l}{K}$$

$$\frac{l}{K} > 102; \quad R = 10 \times 100000 \times \frac{K^2}{l^2}.$$

Dosage 1 : 2 : 3 (333 *kilogrammes ciment ;* $0^{m^3},476$ *sable ;* $0^{m^3}711$ *gravier*).

$$\sigma = 200 \text{ kilogrammes}$$

$$E = 120000$$

$$\frac{l}{R} < 109; \quad R = 200 - 0,92 \frac{l}{K}$$

$$\frac{l}{R} > 109; \quad R = 10 \times 120000 \times \frac{K^2}{l^2}.$$

Les valeurs de R déterminées par les formules ci-dessus sont relatives à la rupture ; il y a donc lieu de prendre des coefficients de sécurité doubles de ceux sus-mentionnés qui sont relatifs à la limite d'élasticité.

89. Applications. — *Quel est le coefficient de sécurité d'un poteau carré de* 15 × 15 *armé de* 4 *barres rondes en fer de* 20 *millimètres. Sa longueur totale est de* 6 *mètres, et il supporte une passerelle lui transmettant une charge de* 8000 *kilogrammes. Le béton est dosé à raison de* 300 *kilogrammes. La distance d'axe en axe des barres est de* 7 *centimètres* (fig. 129).

E_F Coefficient d'élasticité du fer : $= 20 \times \overline{10}^9$

E_c Coefficient d'élasticité du béton : $= 1 \times \overline{10}^9$

$$n = \frac{E_F}{E_c} = \frac{20 \times \overline{10}^9}{1 \times \overline{10}^9} = 20.$$

Section amplifiée du poteau :

$15 \times 15 + 4 \times 3,14 \times 20 = 225 + 251 =$ [illegible]

Moment d'inertie du béton : $\frac{15 \times 15^3}{12} = 4219$

Moment d'inertie du fer : $4 \times 3{,}14 \times \overline{3{,}5}^2 \times 20 = 3077$

Moment d'inertie de la section amplifiée : 7296 cm⁴.

$$K = \sqrt{\frac{I}{S}} = \sqrt{\frac{7296}{476}} = 3{,}92.$$

On peut supposer que le poteau est encastré à ses deux extrémités mais que l'extrémité supérieure peut se déplacer latéralement, sa longueur libre sera par suite (v. p. 54).

$$l = 0{,}70 \times 6 = 4^m{,}20.$$

D'où

$$\frac{l}{K} = \frac{420}{3{,}92} = 107 \quad \text{ou} \quad > 102.$$

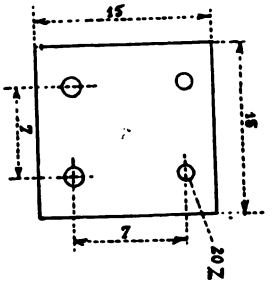


Fig. 129

Le coefficient de rupture par centimètre carré de béton sera donné par suite par la formule (v. p. 92).

$$R = 10 \times 100000 \times \frac{R^2}{l^2},$$

et comme

$$\frac{K^2}{l^2} = \frac{\overline{3{,}92}^2}{\overline{420}^2} = 0{,}0000877$$

$$R = 1000000 \times 0{,}0000877 = 87^{kg}{,}70$$

'a rupture sera par suite

$\times 87{,}7 = 41745$ k ilogrammes.

Et le coefficient de sécurité par rapport à la rupture

$$\frac{41745}{8000} = 5,22$$

ce qui est suffisant.

Déterminer la section d'un poteau en ciment armé capable de résister à un effort de compression P = 25000 *kilogrammes. Ce poteau doit supporter un plancher d'habitation en ciment armé, sa hauteur totale est de* 5 *mètres. Le béton employé sera formé avec un mélange de* 300 *kilogrammes de ciment par mètre cube de sable et de gravier. L'armature sera en fer* (fig. 130).

Coefficient d'élasticité du fer : $E_F = 20 \times \overline{10}^9$

Coefficient d'élasticité du béton : $E_c = 1 \times \overline{10}^9$

$$n = \frac{E_F}{E_c} = 20.$$

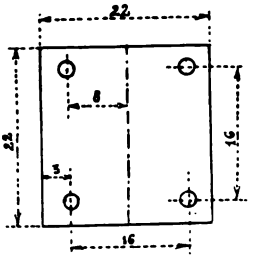


Fig. 130

Le pilier pouvant être considéré comme encastré à ses deux extrémités, sa longueur libre sera $l = \frac{L}{2} = \frac{5,00}{2} = 2,50$.

Posant

$$B = \frac{25000}{50} = 500$$

on a

$$b = \sqrt{500} = 22,4.$$

Prenons 22, et $R_c = 40$ kilogrammes.

D'où

$$M = \frac{P - BR_c}{20R_c} = \frac{25000 - \overline{22}^2 \times 40}{20 \times 40} = 7,05$$

On prendra 4 ronds de 16 millimètres, section 8,00.

Section du béton : $22 \times 22 = 484$
Section du métal : $20 \times 4 \times 2 = 160$
Section amplifiée $= 644$

Moment d'inertie du béton : $22 \times \frac{\overline{22}^3}{12} = 19521$

Moment d'inertie du fer : $4 \times 2 \times 20 \times \overline{8}^2 = 10240$
Moment d'inertie de la section amplifiée $= 29761$

$$R = \sqrt{\frac{I}{S}} = \sqrt{\frac{29761}{644}} = 6,80$$

$$\frac{l}{R} = \frac{250}{6,8} = 37,8 < 102.$$

D'où

$$R = 190 - 0,93 \times 37,8 = 154^{kg},85$$

La charge de rupture est donc :

$$644 \times 154,85 = 99728 \text{ kilogrammes}$$

et le coefficient de sécurité

$$\frac{99728}{25000} = 3,99.$$

ou 4 environ, ce qui est suffisant. Pour des charges avec trépidations, il y aurait lieu de prendre une section de béton plus forte, tout en conservant les mêmes armatures.

Même problème, pour un pilier circulaire de 8 *mètres de hauteur totale* (fig. 131).

$$l = \frac{8}{2} = 4 \text{ mètres}$$

$$d = \sqrt{\frac{500}{4}} = 25,3.$$

Prenons $d = 26$ et $R_c = 40$ kilogrammes.

$$B = \frac{\pi \times 26^2}{4} = 530,92$$

$$BR_c = 530,92 \times 40 = 21237$$

$$M = \frac{25000 - 21237}{20 \times 40} = 4,7.$$

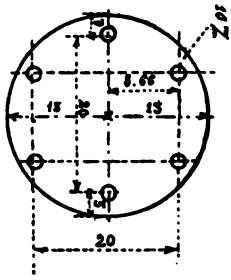


Fig. 131

On prendra 6 ronds de 10 millimètres = 4,71, disposés comme l'indique la figure

Section du béton	530,92
Section de 6 ronds de $10^{mm} \times 20$	94.20
Section amplifiée	625,12

Moment d'inertie du béton : $\frac{\pi}{4} \times 13^4 = 22431$

Moment d'inertie du fer : $20 \times 4 \times 0,785 \times 8,66^2 = 4710$

Moment d'inertie de la section amplifiée $= 27141$

$$R = \sqrt{\frac{I}{S}} = \sqrt{\frac{27141}{625,12}} = 6,6$$

$$\frac{l}{R} = \frac{400}{6,6} = 60,6 \text{ ou} < 102$$

$$R = 190 - 0,93 \times 60,6 = 133,64$$

Charge de rupture $P = 625,12 \times 133,64 = 83541$

Coefficient de sécurité $\frac{83541}{25000} = 3,34$

Que l'on peut considérer comme insuffisant. On portera par exemple le diamètre à 30 centimètres.

CHAPITRE III

—

90. Extension. — *Pour déterminer l'effort unitaire qui se produit dans une section, on ramènera cette section à une surface homogène en amplifiant ou réduisant la section d'une des deux matières dans le rapport des coefficients d'élasticité respectifs, puis on divisera l'effort total par la section totale homogène.*

Si l'effort trouvé est inférieur à celui auquel répond la limite d'élasticité du béton, le problème est résolu. Dans le cas contraire il y aura lieu de recommencer l'opération en adoptant pour le béton un coefficient d'élasticité beaucoup plus petit, pouvant descendre, dans les cas les plus défavorables, au 1/10 de la valeur normale.

91. Applications. — *Quels sont les efforts par unité de section, fer et béton, supportés par une barre en ciment armé de* 30 × 8 *soumise successivement aux tractions suivantes :* P = 2000, 7500, 20000 *kilogrammes. La section de la barre est représentée ci-contre. Le béton est au dosage de* 250 *kilogrammes. Les armatures sont en acier ; elles sont au nombre de* 8 *et ont* 10 *millimètres de diamètre* (fig. 132).

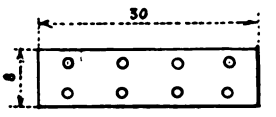


Fig. 132

$$\left.\begin{aligned} E_F &= 22 \times \overline{10}^9 \\ E_c &= 1 \times \overline{10}^9 \end{aligned}\right\} n = \frac{E_F}{E_c} = 22.$$

Section du béton $30 \times 8 = 240$

Section des armatures : $8 \times 0{,}785 \times 22 = 138$

Section totale amplifiée $= 378$ cmq.

On a donc successivement pour

$$P = 2000^{kg} \quad R_t = \frac{2000}{378} = 5^{kg},3,$$

inférieur à la limite d'élasticité et

$$R_F = 20 \times 5,30 = 106^{kg} \text{ par cmq.}$$

$$P = 7500 \quad R_t = \frac{7500}{378} = 19^{kg},85,$$

valeur supérieure à la limite d'élasticité.

$$P = 20000 \quad R_t = \frac{20000}{378} = 53 \text{ kilogrammes}$$

supérieur à la limite d'élasticité.

Il y a donc lieu dans le deuxième et le troisième cas de réduire la valeur du coefficient d'élasticité ; si l'on admet arbitrairement une valeur de $0,4 \times 1 \times \overline{10}^{9}$, n devient $\frac{22}{0,4} = 55$ et la section totale amplifiée devient

$$240 + 8 \times 0,785 \times 55 = 240 + 345 = 585.$$

On aura donc pour le deuxième cas ($P = 7500$ kilogrammes)

$$R_t = \frac{7500}{585} = 12,82$$

et

$$R_F = 55 \times 12,82 = 705^{kg} \text{ par cmq.}$$

et pour le troisième cas ($P = 20000$ kilogrammes).

$$R_t = \frac{20000}{585} = 34,20$$

valeur trop forte, admettant une réduction de 0,2, on a :

$$\frac{22}{0,2} = 110$$

d'où :

$$240 + 8 \times 0,785 \times 110 = 240 + 690 = 930.$$

$$R_t = \frac{20000}{930} = 21^{kg},50$$

encore un peu trop et

$$R_F = 110 \times 21{,}50 = 2365^{kg} \text{ par cmq.}$$

Pour arriver à la limite $R_t = 20$, il faudra n'admettre que 0,18 du coefficient d'élasticité normal, ce chiffre étant donné par le quotient

$$\frac{20 \times 8 \times 0.785 \times 22}{20000 - 20 \times 240}$$

ou d'une façon générale par

$$\frac{20 \times nM}{P - 20B}.$$

Le rapport n' des deux coefficients d'élasticité du métal et du béton étant de

$$n' = \frac{n}{20nM} \times (P - 20B) = \frac{P - 20B}{20M}$$

ici 122.

Le taux de travail du métal sera donc $122 \times 20 = 24^{kg},40$ par millimètre carré, ou

$$\frac{P - 20B}{20M} \times 20 = \frac{P - 20B}{M}.$$

La limite de réduction du coefficient d'élasticité, admise à 1/10 du coefficient d'élasticité du béton comprimé, qui répond pour le dosage sus-mentionné à une valeur $n = 200$, sera utilisée dans le cas

$$\frac{P - BR_t}{R_t - M} = 200.$$

Soit pour

$$B = 200\,(R_t - M) + BR_t$$

et dans le cas présent, si l'on fait $R_t = 20$

$P = 200 \times 20 \times 8 \times 0{,}785 + 240 \times 20 = 25\,120 + 4800 = 29\,920^{kg}$
$R_t = 200 \times 20 = 4000^{kg}$ ou 40^{kg} par millimètre carré

La méthode qui vient d'être exposée est celle que M. Maurel avait indiquée en 1896 dans l'espoir que la loi des variations des coefficients d'élasticité serait bientôt connue. Cette lacune reste encore à combler.

Faute de cette connaissance, on se contente généralement de déterminer la section des armatures, *sans tenir aucun compte de la résistance du béton*, c'est-à-dire comme si l'adhérence du métal et du béton était nulle.

C'est ainsi qu'une armature en fer capable de résister à un effort de 9000 kilogrammes et susceptible d'être soumise à des vibrations sera calculée comme suit :

Limite d'élasticité du métal : 18 kilogrammes.

Coefficient de sécurité : 3.

Taux de travail permis : $\frac{18}{3} = 6$ kilogrammes.

Section : $\frac{9000}{6} = 1500$ millimètres.

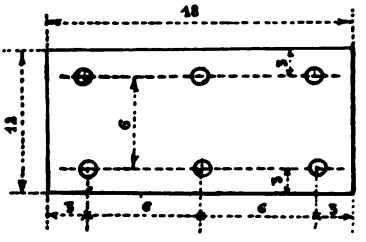


Fig. 133

L'armature sera constituée par 6 barres rondes de 18 millimètres dont la section totale est de $6 \times 254,5 = 1527$ millimètres carrés.

Le béton d'enrobement pourra être réduit au strict nécessaire pour permettre un bon recouvrement et un bon remplissage entre les barres (fig. 133).

Cependant les travaux remarquables de M. Considère permettent de déterminer la résistance maxima d'un prisme tendu en ciment armé.

Si le prisme ci-contre a été fait avec du béton au dosage

333^{kg} ciment ; 0^{m3},476 sable ; 0^{m3},714 gravillon

le béton bien adhérent aux armatures jouira d'une résistance de 22 kilogrammes à la traction.

L'équarrissage prévu par la figure ci-dessus de

$$18 \times 12 = 216 \text{ centimètres carrés}$$

répond à une résistance de

$$216 \times 22 = 4752 \text{ kilogrammes}$$

les armatures donneront d'autre part :

$$R_p = 1800 \times 15^{cmq},27 = 27486 \text{ kilogrammes}$$

$$\text{Total} = 32238 \text{ kilogrammes.}$$

et le coefficient de sécurité que l'on présume être de 3, sera en réalité de $\frac{32238}{9000} = 3,58$.

Il est à présumer, quoi qu'il en soit, que les administrations publiques ne sont pas encore disposées à approuver cette méthode de calcul qui résulte rationnellement des travaux de M. Considère en ce qui concerne les tuyaux et réservoirs cylindriques et qu'elles exigeront que ces ouvrages soient calculés sur la base de 6 kilogrammes pour le fer et de 8 kilogrammes pour l'acier, admettant jusqu'à nouvel ordre que ces taux de travail sont les travaux réels du métal.

On trouvera ci-après un type de calcul de tuyau, et un autre de parois de réservoir cylindrique.

92. — *Projet de tuyau de* $1^m,20$ *de diamètre intérieur devant supporter une pression intérieure de* 20 *mètres d'eau. On n'admet pas pour les armatures un taux de travail supérieur à* 8 *kilogrammes pour l'acier.*

Soit S la section des barres (directrices), N leur nombre par mètre de longueur de tuyau, P la pression d'eau en kilogrammes par mètre carré, D le diamètre intérieur, R_p le taux de travail permis.

$$NS = \frac{PD}{2R}$$

on a ici

$$P = 1000 \times 20 = 20000 \text{ kilogrammes}$$

$$NS = \frac{20000 \times 1,20}{2 \times 8000000} = 0,001500.$$

$$NS = 1500 \text{ millimètres carrés.}$$

Prévoyant des barres rondes de 10 millimètres, section $78^{mm},5$ le nombre N de celles-ci par mètre sera de $\frac{1500}{78,5} = 19,1$ et leur écartement de $\frac{78,5}{1500} = 0,052$.

Les directrices seront fermées et comporteront un recouvrement suffisant pour équilibrer l'effort de traction

$$\frac{20000 \times 1,20}{2} = 12000 \text{ kilogrammes}$$

Soit de $\frac{12000}{19,1}$ par barre $= 630$ kilogrammes.

Le coefficient d'adhérence a été estimé par divers auteurs à 40 kilogrammes par centimètre carré de surface en contact ; on peut donc prendre 10 kilogrammes avec un coefficient de sécurité de 4. La surface développée par mètre de directrice de 1 centimètre de diamètre est de $\pi \times 1 = 3,14$. On peut donc poser :

$$3,14 \times l \times 10 = 630 \text{ kilogrammes}$$

$$l = \frac{630}{10 \times 3,14} = 20 \text{ centimètres.}$$

En réalité, le travail des armatures est bien inférieur à celui qui vient d'être admis. On donnera au mortier, supposé au dosage de 500 kilogrammes de ciment, par exemple, par mètre cube de sable, une épaisseur de 6 centimètres, en se basant sur des considérations pratiques.

La section de mortier offerte par le tuyau par mètre de longueur et par mètre de développement est de $6 \times 100 = 600$ centimètres carrés donnant à 22 kilogrammes de résistance :

$$22 \times 600 = 13200 \text{ kilogrammes,}$$

quantité supérieure à 12000.

La pression n est donc pas assez forte pour que l'armature ait produit tout son effet, et l'on posera, en supposant $n = 20$, $M = 15$ centimètres carrés ; $B = 600$; $P = 12000$ kilogrammes

$$20R_t \times 15 + 600R_t = 12000 \text{ kilogrammes.}$$

D'où

$$R_t = \frac{12000}{20 \times 15 + 600} = 13^{kg},33$$

$$R_y = 20 \times 13^{kg},33 = 266,66 \text{ ou } 2^{kg},67 \text{ par millimètre carré.}$$

Et l'effort de glissement ne sera pour la section d'armature de 0,785 que de :

$$R_o = \frac{266,66 \times 0,785}{3,14 \times 20} = 3^{kg},33.$$

Les directrices doivent être placées à égale distance des faces extérieures et intérieures ; les barres de répartition ou génératrices s'appuient sur les directrices et sont placées à l'intérieur (côté de l'axe du cylindre). Les directrices ne se calculent pas ; elles sont généralement plus que suffisantes pour former armature des dalles élémentaires s'appuyant sur deux directrices.

Quant à l'épaisseur du cylindre, elle ressort, comme il a été dit, des précédents ; le matériel de moulage est prévu une fois pour toutes en vue de ces considérations pratiques pour un diamètre donné ; on peut vérifier cependant si cette épaisseur est suffisante pour assurer la rigidité du tuyau ; c'est-à-dire de manière à éviter un aplatissement du tuyau sur le fond de repos, et un gonflement sur les côtés. Ce calcul a été développé dans le *Génie Civil* par M. C. Birault, ingénieur des Arts et Manufactures [1].

[1] Voir le *Génie Civil*. Tome XLII, nos 7 et 8. *Calcul des parois et armatures des tuyaux à section circulaire posées sur le sol*, par C. Birault. — Appliquant cette méthode de calculs à un tuyau de $1^m,20$ de diamètre ($R = 0,6$), de $0^m,006$ d'épaisseur, poids mort $p = 150$ kilogrammes par mètre carré, et plein d'eau (poids spécifique $\delta = 1000$ kilogrammes), le moment maximum à l'arête inférieure de contact est

$$M = 1,5\left(pR^2 + \frac{1}{2}\delta R^3\right) = 1,5\left(150 \times \overline{0,6}^2 + \frac{1}{2} \times 1000 \times \overline{0,6}^3\right) = 243 \text{ kgm.}$$

On voit que ce moment n'est nullement négligeable et qu'il serait certainement dangereux pour une dalle de ciment armé, d'épaisseur 6, et armée dans l'axe, si ce tuyau n'était pas soutenu par un berceau en maçonnerie ou par la résistance des terres bien bourrées sur ses flancs.

93. — *Calcul d'un réservoir cylindrique non couvert de 12 mètres de diamètre et 4m,50 de hauteur (capacité prévue 500 mètres cubes). On admet 10 kilogrammes comme taux de travail de l'acier.*

Le calcul est analogue à celui d'un tuyau ; il en diffère en ce que la pression diminue graduellement avec la hauteur d'eau. Il a été reconnu pratique de conserver le plus longtemps possible les mêmes sections de directrice et de ne faire varier leur écartement que par gradins de 0m,50 à 1 mètre. On divise ainsi le cylindre en un certain nombre de tronçons, armés de directrices à écartement constant, celui qui répond à la hauteur d'eau maxima concernant le tronçon considéré.

On opère comme suit :

$$NS = \frac{1000H \times D}{2R}$$

$$D = 12 \text{ mètres} ; R = 10000000$$

$$NS = \frac{1000 \times H \times 12}{2 \times 10000000} = 0,000600 \times H.$$

Appliquant cette formule aux divers tronçons, on a :

Tronçon inférieur. — $H_1 = 4,50$ — $NS = 4,5 \times 600^{mmq} = 2700^{mmq}$.

Faisant choix de ronds de 14 millimètres, section 154 millimètres carrés, l'écartement régulier E à prévoir sur ce tronçon sera

$$E_1 = \frac{154}{2700} = 0,057.$$

Prévoyant 10 espacements semblables, ce tronçon aura 0m,57 et la hauteur $H_2 = 4,50 - 0,57 = 3,93$.

Tronçon II. — $H^2 = 3,93$ $NS = 3,93 \times 600 = 2358^{mmq}$

$$E_2 = \frac{154}{2358} = 0^m,065 \text{ environ,}$$

soit pour 10 semblables 0m,65

$$H_3 = 3,93 - 0,65 = 3,28.$$

Tronçon III. — $H_3 = 3,28$ $NS = 3,28 \times 600 = 1968^{mmq}$

$$E_3 = \frac{154}{1968} = 0,078,$$

soit pour 10 semblables $0^m,78$

$$H_4 = 3,28 - 0,78 = 2,50.$$

Tronçon IV. — $H_4 = 2,50$ $NS = 2,50 \times 600 = 1500^{mmq}$.

On peut changer le diamètre des ronds et prévoir des barres de 10 millimètres, section 78,5

$$E_4 = \frac{78,5}{1500} = 0,052$$

soit pour 10 semblables — 0,52

$$H_4 = 2,50 - 0,52 = 1,98.$$

Tronçon V. — $H_5 = 1,98$ $NS = 1,98 \times 600 = 1188^{mmq}$

$$E_5 = \frac{78,5}{1188} = 0,066,$$

soit pour 10 semblables — 0,66

$$H_6 = 1,98 - 0,66 = 1,32.$$

Tronçon VI. — $H_6 = 1,32$ $NS = 1,32 \times 600 = 792^{mmq}$

$$E_6 = \frac{78,5}{792} = 0,099$$

pour 10 semblables = 0,99

$$H_7 = 1,32 - 0,99 = 0,33.$$

On prolongera le tronçon VI jusqu'à parfaire la hauteur de $4^m,50$, soit par exemple avec 3 nouveaux intervalles de $0^m,11$.

Les assemblages des tronçons d'armatures se feront par recouvrement, qu'il s'agisse d'anneaux isolés ou de spirales de grandes longueurs, en comptant 10 kilogrammes pour le coefficient d'adhérence avec un coefficient de sécurité de 4.

La barre la plus chargée (tronçon I) est sollicitée par un effort de traction de

$$\frac{1000 \times 4.80 \times 12}{2} = 28800 \text{ kilogrammes,}$$

son diamètre de 1,4 répond à une circonférence de 4,4, on a donc

$$4,4l \times 10 = 0,57 \times 28\,800 = 1\,642$$

d'où

$$l_1 = \frac{1\,642}{44} = 38 \text{ centimètres environ.}$$

On déterminera d'une façon analogue les recouvrements l_2, l_3... des tronçons successifs.

CHAPITRE IV

—

FLEXION

94. Moments de résistance. — Il se produit généralement deux sortes d'effort dans le phénomène de la flexion.

1° Un effort résistant à l'action des moments fléchissants.

2° Un effort résistant à l'action des efforts tranchants.

Ce présent chapitre consacré à l'étude des premiers ou des moments résistance de solides en ciment armé, est basé sur les principes énoncés par M. Considère et mentionnés, chap. VII, paragraphe **81** ; ces principes sont développés de manière à en faciliter l'application en pratique.

Considérons une pièce fléchie en ciment armé dont la section soit quelconque et indifféremment l'une de celles représentées figure 134.

On désignera par :

h, la hauteur totale ; cette hauteur sera prise plus tard comme unité ;

x et $h - x$, les distances de la fibre neutre FN aux fibres extrêmes (plus tard ces mêmes notations ne représenteront plus des valeurs absolues, mais les rapports $\frac{x}{h}$ et $1 - \frac{x}{h}$;

u et u', les distances des armatures aux fibres extrêmes voisines, respectivement tendues et comprimées destinées également à représenter plus tard au lieu des distances absolues, les distances relatives $\frac{u}{h}$ et $\frac{u'}{h}$;

e et e', les épaisseurs respectives du hourdis comprimé et du hourdis tendu ; même observation que pour les autres notations

ci-dessus relatives à la hauteur et à des fractions de la hauteur; pour la simplification des calculs, e et e' représenteront à un moment donné les rapports $\frac{e}{h}$, $\frac{e'}{h}$.

On fera remarquer cependant que l'accentuation est réservée ici à la partie tendue, ce cas peu fréquent étant simplement indiqué.

E_F, E_B, les coefficients d'élasticité du métal et du béton et n le rapport $\frac{E_F}{E_B}$;

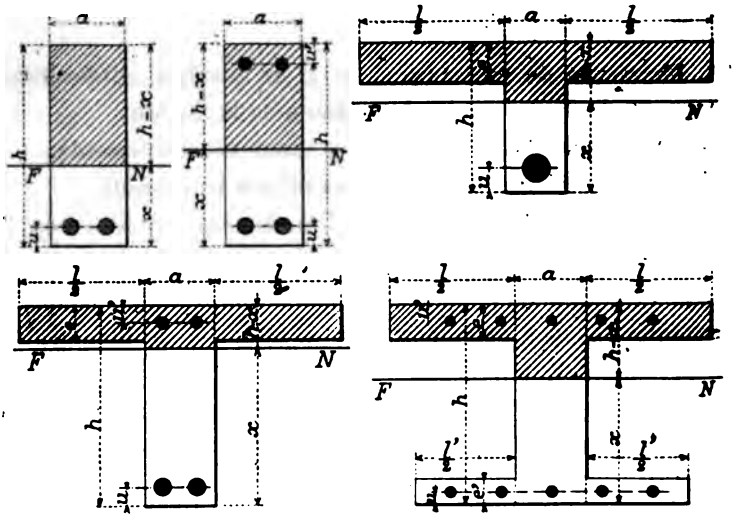


Fig. 134

R_F, le taux de travail de l'armature tendue;

$R_{F'}$, le taux de travail de l'armature comprimée;

f et f', les sections absolues et cumulées des armatures, respectivement tendues et comprimées;

a, la largeur de la nervure;

$p = \frac{f}{ah}$; $p' = \frac{f'}{ah}$, les rapports des sections des armatures tendues et comprimées à la section de la nervure, ou les pourcentages correspondants;

R_t, le taux de travail maximum du béton à l'extension;

R_c, » » » à la compression;

$\varphi = \frac{R_t}{R_c}$, le rapport des deux taux de travail précédents;

l, l', les longueurs totales de hourdis appartenant à la nervure, mais déduction faite de la largeur de celle-ci et respectivement tendues ou comprimées;

λ, λ', les rapports $\frac{l}{a}$ et $\frac{l'}{a}$.

Si l'on représente les efforts qui se produisent dans le béton par les ordonnées d'une courbe dont les abscisses seraient les distances à l'axe neutre, on obtiendrait un diagramme analogue à celui représenté (fig. 135). Mais comme la courbe C'HODE n'est pas facile à définir mathématiquement, M. Considère a proposé de la remplacer par la ligne brisée CDE, comme cela a déjà été fait pour le béton non armé. Cette substitution revient à supposer que les efforts de compression croissent proportionnellement à leur distance à la fibre neutre FN et que les efforts d'extension ne suivent la même loi que jusqu'au moment où ils atteignent leur valeur de rupture dD; puis qu'ils restent constants jusqu'à la fibre extrême BF,

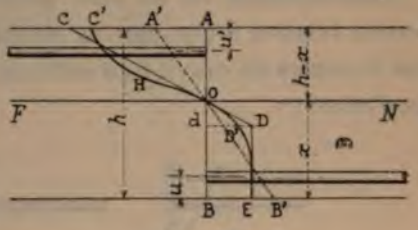


Fig. 135

aussi longtemps que le métal ne dépasse pas sa limite d'élasticité. C'est l'hypothèse qui sera faite par la suite.

Quand le métal travaille au-dessus de sa limite d'élasticité, le béton tendu peut rompre; cette éventualité ne sera considérée qu'exceptionnellement.

On supposera en outre que les déformations des diverses fibres sont proportionnelles à leur distance à la fibre neutre (droite A'OB') et que les efforts sollicitant les armatures sont proportionnels à ces déformations.

Taux de travail des armatures. — Soit une pièce armée à l'extension et à la compression. Les taux de travail R_p et R'_p sont proportionnels à leurs distances respectives à la fibre neutre, $x - u$ et $h - x - u'$. On aura par suite

$$\frac{R_p}{x - u} = \frac{R'_p}{h - x - u'}$$

On a d'autre part en représentant par R'_c l'effort de compression sollicitant une fibre de béton située à la même distance de la fibre neutre que l'armature comprimée

$$R'_F = nR'_c$$

et comme

$$R'_c = \frac{h - x - u'}{h - x} R_c$$

on en déduit

$$(1) \quad \begin{cases} R'_F = nR_c \dfrac{h - x - u'}{h - x} \\ R_F = nR_c \dfrac{x - u}{h - x} \end{cases}$$

Détermination de la fibre neutre. — Généralement la fibre neutre relative à une section quelconque est une droite passant par le centre de gravité de cette section et normale à la direction de l'effort [1].

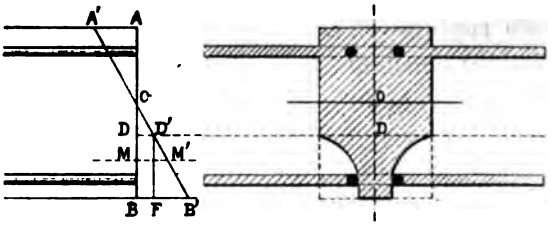


Fig. 136

Cela est également vrai pour les pièces en ciment armé, mais il faut avoir soin pour déterminer ce centre de gravité de ramener la section hétérogène, béton et métal, à une section homogène ayant même coefficient d'élasticité partout. Il y a donc lieu tout d'abord d'amplifier horizontalement n fois les sections des armatures et de réduire les parties tendues dans le rapport des efforts vrais à ceux qui seraient développés s'ils étaient proportionnels

[1] Lorsque l'effort est perpendiculaire ou parallèle à un axe de symétrie de la section. En cas contraire c'est le diamètre conjugué à la direction de l'effort de l'ellipse d'inertie de la section.

à leur distance respective à la fibre neutre. Cette réduction doit donc se faire de D en B et ce, dans le rapport de MM' à BF. On obtient ainsi une figure du genre représenté (fig. 136) dont on peut déterminer le centre de gravité par tâtonnement en modifiant successivement la position du point O pris comme base de tâtonnement. Il résulte de cette construction que le centre de gravité n'est pas constant; sa position varie avec l'intensité de de l'effort.

Détermination de la fibre neutre. — Pour déterminer la fibre neutre il suffit d'exprimer qu'il y a équilibre entre la somme des tensions et celle des compressions supportées par les matières situées de part et d'autre de la fibre neutre.

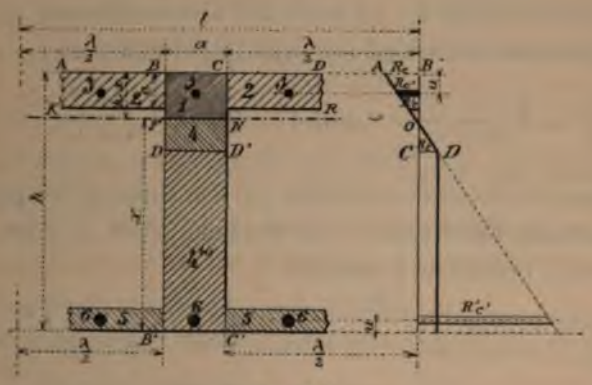


Fig. 137

On déterminera donc successivement les efforts unitaires moyens ou taux unitaires moyens des travaux de compression et d'extension subis par les diverses figures géométriques dans lesquelles on aura décomposé la section du solide ; on multipliera ces efforts par les surfaces élémentaires auxquelles ils s'appliquent pour avoir les efforts totaux correspondants ; et l'équation de la fibre neutre résultera de l'égalité des efforts totaux de compression et d'extension.

On considère le cas général d'un solide à double té et on supposera 1° *la fibre neutre entre les deux hourdis* (fig. 137).

En regard, on a tracé le diagramme des efforts unitaires, qui représente également, d'après ce qui a été dit, les déformations.

La droite AB représente en grandeur R_c, le taux de travail maximum de compression (fibre extrême comprimée), la droite CD représente le taux de travail maximum d'extension du béton, qui sera ensuite supposé rester constant de D en E.

Si l'on admet que les sections planes fléchies restent planes la distance y aura pour valeur celle ressortant de l'équation :

$$\frac{R_t}{R_c} = \frac{y}{h - x},$$

soit :

$$y = \frac{R_t}{R_c}(h - x).$$

Le taux de travail R'_c au droit de l'arête inférieure du hourdis sera également déterminé par cette loi, et l'on aura :

$$\frac{R'_c}{R_c} = \frac{h - x - e}{h - x} \quad \text{d'où :} \quad R'_c = \frac{h - x - e}{h - x} \times R_c.$$

Le taux de travail $R_{c'}$ du béton qui est supposé remplacer l'armature comprimée située à la distance u' de la fibre extrême supérieure, ressort de l'équation

$$\frac{R_{c'}}{R_c} = \frac{h - x - u'}{h - x} \quad \text{d'où :} \quad R_{c'} = \frac{h - x - u'}{h - x} \times R_c.$$

On aurait de même pour le taux de travail $R'_{c'}$ du béton qui est supposé remplacer l'armature tendue située à la distance u de la fibre extrême inférieure :

$$\frac{R'_{c'}}{R_c} = \frac{x - u}{h - x} \quad \text{d'où :} \quad R'_{c'} = \frac{x - u}{h - x} R_c.$$

Ceci posé on décomposera comme suit la section du solide considéré :

(1) la partie de la nervure comprimée de largeur a, de hauteur $h - x$, de section $a(h - x)$. L'effort moyen de compression qu'elle subit est $\frac{R_c}{2}$ et la compression totale est par suite :

$$(1) \qquad \frac{aR_c}{2}(h - x).$$

(2) Le hourdis comprimé (2) dans les ailes supérieures, ensemble de largeur λ, et d'épaisseur e, de section $e\lambda$. L'effort moyen de compression est la moyenne des bases du trapèze ABKR, ou $\frac{R_c + R'_c}{2} = \frac{1}{2}\left(R_c + \frac{h - x - e}{h - x} R_c\right)$, en remplaçant R'_c par sa valeur trouvée plus haut.

$$(2) \qquad \frac{e\lambda}{2} R_c \frac{2h - 2x - e}{h - x}$$

(3) L'armature comprimée, de section totale f' sur la largeur l, dont l'équivalent en béton est nf'. L'effort moyen de compression R_c' a été calculé plus haut et trouvé égal à $\frac{h - x - u'}{h - x} R_c$.

$$(3) \qquad nf' R_c \frac{h - x - u'}{h - x}$$

(qui peut s'écrire $f' \times nR_c \frac{h - x - u'}{h - x}$, ce qui montre que $nR_c \frac{h - x - u'}{h - x}$ exprime le taux de travail R'F de l'armature comprimée).

(4) La partie de la nervure tendue FNDD' comprise entre la fibre neutre et la limite DD' de la tension du béton. Hauteur y trouvée égale à $\frac{R'}{R_c}(h - x)$; largeur a; section $a \frac{R_t}{R_c}(h - x)$; effort de tension moyen $\frac{R_t}{2}$.

$$(4) \qquad \frac{R_t}{2R_c} a (h - x).$$

(4bis) La partie de la nervure tendue DD'B'C' comprise entre la limite DD' de la tension du béton et la fibre extrême inférieure B'C'; hauteur $x - y$ ou $x - \frac{R_t}{R_c}(h - x)$; largeur a; section $a\left[x - \frac{R_t}{R_c}(h - x)\right]$; effort de tension R_t.

$$(4^{bis}) \qquad aR_t\left[x - \frac{R_t}{R_c}(h - x)\right]$$

(5) Le hourdis tendu dans les ailes inférieures; ensemble de largeur λ' et d'épaisseur e', de section $e'\lambda'$. — Effort constant de tension R_t.

$$R_t \times e'\lambda'. \tag{5}$$

(6) L'armature tendue, de section totale f sur toute l'étendue des ailes, dont l'équivalent en béton est nf. L'effort moyen de tension $R'_{c'}$ a été calculé plus haut et trouvé égal à $\frac{x-u}{h-x} R_c$.

$$nf \frac{x-u}{h-x} R_c \tag{6}$$

(qui peut s'écrire $f \times nR_c \frac{x-u}{h-x}$, ce qui montre que $nR_c \frac{x-u}{h-x}$ exprime le taux de travail R_F de l'armature comprimée).

Faisant la somme des expressions 1, 2 et 3, relatives aux parties comprimées, et exprimant qu'elle est égale à la somme 4, 4bis, 5 et 6, on obtient l'équation générale de la fibre neutre, lorsque celle-ci est comprise entre les deux hourdis, en fonction de R_c et des données du problème.

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{R_c}{2} a(h-x) + R_c \frac{e\lambda}{2} \frac{2h-2x-e}{(h-x)} + nf'R_c \frac{h-x-u'}{h-x} \\ &= aR_t \left[x - \frac{R_t}{R_c}(h-x)\right] + R_t e'\lambda' + nfR_c \frac{x-u}{h-x}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Remarque. — La valeur de R_F en fonction de R_c se déduit de l'équation

$$R_F = nR_c \frac{x-u}{h-x}. \tag{1}$$

Or il ne faut pas oublier que l'équation (2) n'est applicable que si R_F n'est pas supérieur à la limite d'élasticité du métal. Dans les cas douteux, et même lorsque l'on veut s'imposer à l'avance une limite au travail R_F du métal tendu, la valeur de R_c pouvant rester indéterminée, parce que l'on sait qu'elle reste dans des limites admissibles, on tirera x en fonction de R_F imposé, de R_c indéterminé, de l'équation (1) et portant cette

expression de x dans l'équation (2), celle-ci déterminera alors R_c. Cette équation (2) ainsi transformée devient (2').

$$(2')\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{R_F}{n}\dfrac{h-x}{x-u}\left[\dfrac{a(h-x)}{2}+\dfrac{2h-2x-e}{2(h-x)}e\lambda+nf'\dfrac{h-x-u'}{h-x}-nf\dfrac{x-u}{h-x}\right] \\ -aR_t\left[x-\dfrac{R_t}{2}\times\dfrac{n(x-u)}{R_F}\right]-R_te'\lambda'=0. \end{array} \right.$$

2° *La fibre neutre tombe à l'intérieur du hourdis supérieur.*

La figure 138 est relative à ce cas; en suivant la même marche, et en remarquant que cette fois $R'_c = R_c\,\dfrac{e+x-h}{h-x}$.

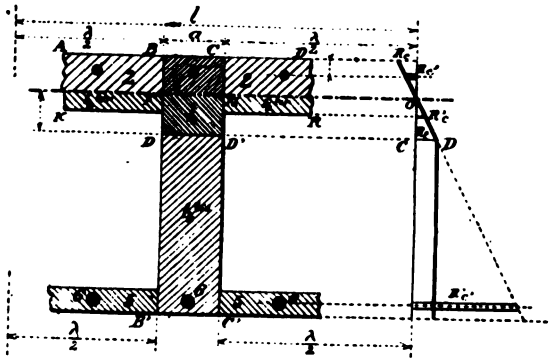


Fig. 138

(1) La partie de la nervure comprimée BCFN de largeur a, de hauteur $h-x$, de section $a(h-x)$, effort moyen $\dfrac{R_c}{2}$; donc comme plus haut

$$(1)\qquad a\,\frac{R_c}{2}\,(h-x).$$

(2) Le hourdis comprimé des ailes supérieures, ensemble de largeur λ, d'épaisseur $(h-x)$, section $\lambda(h-x)$; effort moyen de compression $\dfrac{R_c}{2}$.

$$(2)\qquad \frac{\lambda R_c}{2}\,(h-x).$$

(3) comme plus haut

$$(3) \qquad nf'R_c \frac{h - x - u'}{h - x}.$$

(4) la partie de nervure FNDD', comme plus haut

$$(4) \qquad \frac{R_t}{2R_c} a(h - x)$$

(4bis) La partie DD'B'C' comme plus haut

$$(4^{bis}) \qquad aR_t \left[x - (h - x) \frac{R_t}{R_c}\right].$$

(4ter) La partie tendue du hourdis, c'est-à-dire située au-dessous de FN, largeur ensemble λ, hauteur $e+x-h$, section $(e+x-h)\lambda$; tension moyenne $\frac{R'_c}{2}$, soit $\frac{R_c}{2} \frac{e + x - h}{h - x}$ (trouvée plus haut).

$$(4^{ter}) \qquad \frac{\lambda R_c}{2(h - x)} (e + x - h)^2.$$

(5) comme plus haut

$$(5) \qquad R_t e'\lambda'.$$

(6) comme plus haut

$$(6) \qquad nf \frac{x - u}{h - x} R_c.$$

On aura dans ce cas pour l'équation de la fibre neutre en fonction de R_c

$$\frac{R_c}{2} a(h - x) + R_c \frac{\lambda}{2} (h - x) + nf'R_c \frac{h - x - u'}{h - x}$$
$$= aR_t \left[x - \frac{R_t}{R_c} (h - x)\right] + R_c \frac{\lambda}{2} \frac{(e + x - h)^2}{h - x} + R_t e'\lambda' + nf'R_c \frac{x - u'}{h - x}$$

Expression qui ne diffère de celle obtenue dans le premier cas que par les termes en λ.

Or ceux-ci peuvent s'écrire

$$\frac{\lambda}{2} R_c \left[h - x - \frac{(e + x - h)^2}{h - x}\right]$$
$$= \frac{\lambda R_c}{2(h - x)} \left[(h - x)^2 - (e + x - h)^2\right] = \frac{\lambda R_c}{2(h - x)} e(2h - 2x - e).$$

Les deux équations sont identiques et l'on voit que cette équation (2) est vraie quelles que soient les valeurs attribuées à R_t (zéro ou toute autre valeur). Elle est tout à fait générale.

Cette remarque est très importante. — L'équation (2) étant tout à fait générale, et par suite de nature essentiellement algébrique, on n'aura pas à se préoccuper des valeurs négatives, qui sont applicables tout comme les valeurs positives.

Détermination du moment résistant. — Pour le calcul des forces intérieures faisant équilibre aux forces extérieures, il convient, au lieu de recourir aux méthodes usuelles de la résistance des matériaux appliqués à la section homogène transformée, d'utiliser les efforts calculés ci-dessus lors de la détermination de la fibre neutre en se bornant à en rechercher le point d'application. La somme des produits des efforts par les distances respectives des points d'application à l'axe des fibres neutres donnera le moment total des forces extérieures. Conservant les mêmes notations, on n'aura qu'à se reporter aux numéros précédents pour retrouver les efforts correspondants.

Fig. 139

1° *La fibre neutre se trouve entre les deux hourdis.*

1. *Nervure comprimée.* — Distance du point d'application $\frac{2}{3}(h-x)$.

$$\text{Effort total} = \frac{aR_c}{2}(h-x).$$

Moment résistant 1) $\frac{a}{3}(h-x)^2R_c$.

2. *Hourdis comprimé.* — La distance du point d'application est celle du centre de gravité du trapèze ABA_1B_1 (fig. 139) au point O. Elle a pour valeur

$$\frac{2}{3}(h-x)\frac{3h-3x-3e+\frac{e}{h-x}}{2h-2x-e}.$$

$$\text{Effort total} = \frac{e\lambda}{2}R_c\frac{2h-2x-e}{h-x}.$$

$$\text{Moment résistant 2)} = \frac{e\lambda}{3}R_c\left[\frac{e^2}{h-x}+3(h-x-e)\right].$$

3. *Armature comprimée.* — Distance du point d'application $h - x - u'$.

Effort total $nf\mathrm{R}_c \dfrac{h - x - u'}{h - x}$.

Moment résistant 3) $nf\mathrm{R}_c \dfrac{h - x - u')^2}{h - x}$.

4. *Nervure tendue, partie* FNDD'. — Distance du point d'application

$$\frac{2}{3} y = \frac{2}{3} \frac{\mathrm{R}_t}{\mathrm{R}_c} (h - x).$$

Effort total $= a(h - x) \dfrac{\mathrm{R}_t^2}{2\mathrm{R}_c}$.

Moment résistant 4) $\dfrac{a\mathrm{R}^3_t}{3\mathrm{R}^2_c} (h - x)^2$

4bis *Nervure tendue, partie* DD'B'C'. — Distance du point d'application

$$y + \frac{x - y}{2} = \frac{y}{2} + \frac{x}{2} = \frac{\mathrm{R}_t}{2\mathrm{R}_c} (h - x) + \frac{x}{2}.$$

Effort total $= a\mathrm{R}_t \left[x - \dfrac{\mathrm{R}_t}{\mathrm{R}_c} (h - x)\right]$.

Moment résistant 4bis) $a\mathrm{R}_t \left[\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\mathrm{R}^2_t}{2\mathrm{R}^2_c} (h - x)^2\right]$

et par suite pour la somme 4 et 4bis) $a\mathrm{R}_t \left[\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\mathrm{R}^2_t}{\mathrm{R}^2_c} \dfrac{(h - x)^2}{6}\right]$.

5. *Ailes tendues.* — Distance du point d'application $x - \dfrac{e'}{2}$.

Effort total $= \mathrm{R}_t e' \lambda'$.

Moment résistant 5) $\mathrm{R}_t e' \lambda' \left(x - \dfrac{e'}{2}\right)$.

6. *Armatures tendues.* — Distance du point d'application $x - u$.

Effort total $= nf\mathrm{R}_c \dfrac{x - u}{h - x}$.

Moment résistant 6) $nf\mathrm{R}_c \dfrac{(x - u)^2}{h - x}$.

Sommant les moments élémentaires trouvés ci-dessus, on obtient pour le moment total M

$$(3)\quad \begin{cases} M = \dfrac{a(h-x)^2}{3} R_c + \dfrac{e\lambda}{3}\left[\dfrac{e^2}{h-x} + 3(h-x-e)\right] R_e \\ \quad + nf' R_e \dfrac{(h-x-u')^2}{h-x} + aR_t \left[\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{(h-x)^2}{6}\dfrac{R^2_t}{R^2_c}\right] \\ \quad + R_t e'\lambda' \left(x - \dfrac{e^2}{2}\right) + nf R_c \dfrac{(x-u)^2}{h-x}. \end{cases}$$

Telle est l'équation qui permet de déterminer le moment M des forces intérieures quand on connaît R_t et n, qu'on s'est donné R_c et que l'on a calculé x au moyen de l'équation (2).

2° *La fibre neutre tombe à l'intérieur du hourdis supérieur.*

On a vu plus haut que l'équation (2) ne différait dans les deux cas que par les termes en λ, et que ceux-ci, bien que se présentant sous une forme différente, étaient identiques.

Examinons ce qui se passe pour l'équation (3). En nous bornant par suite de l'observation précédente aux termes en λ dont le moment élémentaire est dans le premier cas

$$\frac{\lambda R_c}{3}\left[\frac{e^2}{h-x} + 3(h-x-e)\right] \times e.$$

Dans le second cas (voir fig. 138).

2. *Hourdis comprimé.* — Distance du point d'application

$$\frac{2}{3}(h-x).$$

Effort total $\frac{\lambda R_c}{2}(h-x)$.

Moment élémentaire 2) $\frac{\lambda R_c}{2}(h-x)^2$.

4ter. *Partie tendue du hourdis.* — Distance du point d'application.

$$\frac{2}{3}(e+x-h).$$

Effort total $\frac{\lambda R_c}{2(h-x)}(e+x-h)^2$.

Moment élémentaire 3) $\frac{\lambda R_c}{3}\frac{(e+x-h)^3}{h-x}$.

Les termes en λ donnent ensemble dans le second cas.

$$\frac{\lambda R_c}{3} \times \frac{(h-x)^3 + (e+x-h)^3}{h-x}$$

ou en développant

$$\frac{\lambda R_c}{3} \frac{(h-x)^3 + e^3 + 3e(h-x)^2 - 3e^2(h-x) - (h-x)^3}{h-x}$$

ou

$$\frac{\lambda R_c}{3} \frac{e^2 + 3(h-x)(h-x-e)}{h-x} \times e.$$

expression qui, sous cette forme, est facile à reconnaitre comme identique avec celle du premier cas.

Il en résulte que comme l'équation (2), l'équation (3) est tout à fait générale et peut être également appliquée algébriquement dans tous les cas, quelle que soit la valeur attribuée à R_c, les termes en λ étant indépendants de R_c.

Remarque I. — Comme il a été dit plus haut pour l'équation (2), l'équation (3) n'est applicable que si le métal travaille au-dessous de sa limite d'élasticité. On ne peut se rendre compte de cette condition qu'en effectuant l'équation (2). Connaissant x on vérifie si les valeurs de R_p ou de R'_p données par les équations (1), justifient cette éventualité.

Remarque II. — On remarquera que l'on a commis une petite erreur, en omettant les moments d'inertie propres des armatures. Cette erreur n'est négligeable que si l'on fait usage de barres multiples de faible section ; mais si l'on emploie des barres profilées de dimensions plus fortes que celles généralement en usage dans les constructions en ciment armé proprement dit, *il y a lieu de tenir compte du moment d'inertie propre relatif à la section choisie.*

On opérera à cet effet de la façon suivante :

Soit I' le moment d'inertie propre du profilé rapporté à son centre de gravité et v la distance de la fibre neutre FN à la fibre du profilé, la plus éloignée de cette fibre neutre FN, on ajoutera au moment de résistance trouvé le produit $\frac{I'}{v} \times R_p \times n$.

Premières simplifications des équations générales. — Multipliant

tous les termes de l'équation (2) par $2(h-x)$, les divisant par h^2, a et R_c, remplaçant $\frac{R_t}{R_c}$ par φ et ordonnant par rapport à $\frac{x}{h}$, on obtient :

$$(1+2\varphi+\varphi^2)\frac{x^2}{h^2}-2\left[1+\varphi+\varphi^2+\frac{e}{h}\times\frac{l}{a}+\frac{nf}{ah}+\frac{nf'}{ah}-\varphi\frac{e'}{h}\frac{l'}{a}\right]\frac{x}{h}$$
$$+1+\varphi^2+2\frac{e}{h}\times\frac{l}{a}-\frac{e^2}{h^2}\times\frac{l}{a}+\frac{2nf}{ah}+\frac{2nf}{ah}\times\frac{u}{h}-\frac{2nf'}{ah}\times\frac{u'}{h}-2\varphi\frac{e'}{h}\frac{l'}{a}=0.$$

Cette équation générale permet sous cette forme de déterminer à volonté $\frac{x}{h}$ ou x, mais il est plus simple de considérer toutes les grandeurs (d'épaisseur) x, e, u et u', comme des valeurs relatives (comme il a été dit lors de la définition des notations), ou comme des rapports $\frac{x}{h}$, $\frac{e}{h}$, $\frac{u}{h}$, $\frac{u'}{h}$. Cette équation a été mise intentionnellement sous cette double forme, pour permettre au lecteur de recourir à son gré aux valeurs réelles $\frac{x}{h}$, $\frac{e}{h}$, etc., ou aux valeurs conventionnelles x, e, etc., auxquelles on attribuera $\frac{x}{h}$, $\frac{e}{h}$... etc. comme valeurs réelles.

Dès lors, appliquant dans leur totalité les notations annoncées p. 349.

Soit $\frac{l}{a}=\lambda$; $\frac{l'}{a}=\lambda'$; $\frac{f}{ah}=p'$; $\frac{f'}{ah}=p'$, l'équation (2), qu'on désignera désormais par II, devient :

$$\text{II}\begin{cases}(1+2\varphi+\varphi^2)x^2-2\left[1+\varphi+\varphi^2+e\lambda+np+np'-\varphi e'\lambda'\right]x\\+1+\varphi^2+2e\lambda-e^2\lambda+2np'+2npu-2np'u'-2\varphi e'\lambda'=0.\end{cases}$$

De même les équations (1) deviennent en divisant tous leurs termes par h, et convenant toujours d'appeler x, u, u' etc., non plus les hauteurs absolues, mais ces hauteurs rapportées à h.

$$\text{I}\begin{cases}R'_F=nR_c\dfrac{1-x-u'}{1-x}\\[2ex] R_F=nR_c\dfrac{x-u}{1-x}.\end{cases}$$

De même l'équation (2') donnant x en fonction de R_F et de R_f est susceptible des mêmes simplifications.

En divisant tous les termes par $\frac{R_F}{n}\frac{h-x}{x-u}$, on a :

$$\frac{a(h-x)}{e}+\frac{2h-2x-e}{2(h-x)}el+nf'\frac{h-x-u'}{h-x}-nf\frac{x-u}{h-x}$$
$$-aR_t\left[\frac{n}{R_F}\frac{x-u}{h-x}x-\frac{h-x}{2}R_t\frac{n^2(x-u)^2}{R_F^2(h-x)^2}\right]-\frac{R_t}{R_F}\frac{n(x-u)}{h-x}e'l'=0.$$

Posant $\frac{R_t}{R_F}=\alpha$ et multipliant tous les termes par $2(h-x)$

$$a(h-x)^2+(2h-2x-e)el+2nf'(h-x-u')-2nf(x-u)$$
$$-2a\alpha n(x-u)x+a\alpha^2n^2(x-u)^2-2\alpha n(x-u)e'l'=0.$$

Développant et ordonnant par rapport à x :

$$a(1-2\alpha n+\alpha^2n^2)x^2-2(ah+el+nf'+nf+a\alpha^2n^2u+\alpha ne'l'$$
$$-a\alpha nu)x+ah^2+2elh-e^2l+2nf'h-2nf'u'+2nfu+a\alpha^2n^2u^2$$
$$+2n\alpha e'l'u=0.$$

Divisant tous les termes par a et par h^2 :

$$(1-\alpha n)^2\frac{x^2}{h^2}-2\left(1+\frac{e}{h}\times\frac{l}{a}+\frac{nf'}{ah}+\frac{nf}{ah}+\alpha^2n^2\frac{u}{h}+\alpha n\frac{e'}{h}\frac{l'}{a}-\alpha n\frac{u}{h}\right)\frac{x}{h}$$
$$+1+\frac{2e}{h}\frac{l}{a}-\frac{e^2}{h^2}\frac{l}{a}+2n\frac{f'}{ah}-\frac{2nf'}{ah}\times\frac{u'}{h}+\frac{2nf}{ah}\times\frac{u}{h}+\alpha^2n^2\frac{u^2}{h^2}$$
$$+2n\alpha\frac{e'}{h}\times\frac{u}{h}\times\frac{l'}{a}=0$$

et avec les conventions proposées ci-dessus :

$$(1-\alpha n)^2x^2-2(\underline{1+e\lambda+np'+np}+\alpha^2n^2u+\alpha ne\lambda'-\alpha nu)x+1$$
$$\underline{+2e\lambda-e^2\lambda+2np'-2np'u'+2npu}+\alpha^2n^2u^2+2n\alpha e'u\lambda'=0\ (\mathrm{II}').$$

Remarque. — Les termes soulignés de cette équation (II) se retrouvent dans l'équation II ci-dessus. Cette observation peut avoir son utilité quand on est conduit à appliquer une méthode après l'autre.

Appliquant les mêmes simplifications à l'équation III des moments résistants, c'est-à-dire en appliquant les notations précédentes après avoir divisé tous les termes de (3) par ah^2, et convenant d'appeler m le quotient $\frac{M}{ah^2}$, ou le coefficient par lequel

il faut multiplier le produit ah^2 pour obtenir le moment résistant M, on obtient successivement :

$$\frac{M}{ah^2} = m = R\acute{e}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{h}\right)^2 \\ + \frac{1}{3}\frac{e}{h} \times \frac{l}{a}\left[\frac{\frac{e^2}{h^2}}{1-\frac{x}{h}} + 3\left(1-\frac{x}{h}-\frac{e}{h}\right)\right] \\ + \frac{nf}{ah}\frac{\left(1-\frac{x}{h}-\frac{u'}{h}\right)^2}{1-\frac{x}{h}} \\ + \frac{nf}{ah}\left(\frac{x}{h}-\frac{u}{h}\right)^2 \times \frac{1}{1-\frac{x}{h}} \\ + \varphi\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\frac{x^2}{h^2} - \frac{1}{6}\varphi^2\left(1-\frac{x}{h}\right)^2 \\ + \frac{e'}{h} \times \frac{l'}{a}\left(\frac{x}{h}-\frac{1}{2}\frac{e'}{h}\right) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

ou indifféremment, mais plus simplement avec les conventions proposées.

$$\text{III} \quad \frac{M}{ah^2} = m = R_c\left\{\begin{array}{ll} \frac{(1-x)^2}{3} & \text{(1) Nervure comprimée.} \\ + \frac{e\lambda}{3}\left[\frac{e^2}{1-x} + 3(1-x-e)\right] & \text{(2) Ailes comprimées.} \\ + np'\frac{(1-x-u')^2}{1-x} & \text{(3) Armatures comprimées.} \\ + np\frac{(x-u)^2}{1-x} & \text{(6) Armature tendue.} \\ + \varphi\left\{\begin{array}{ll} x^2 - \frac{1}{6}\varphi^2(1-x)^2 & \text{(4) Nervure tendue} \\ + e'\lambda'\left(x-\frac{e'}{2}\right) & \text{(5) Ailes tendues.} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Telles sont les équations permettant d'étudier la flexion d'un solide dans toute sa généralité ; ces équations se simplifient comme suit dans les divers cas particuliers suivants : les équations I restant invariables dans tous les cas.

A. — *Poutre à simple té, armée à la fois à la compression et à la tension.*

On fera

$$e' = 0$$
$$\lambda' = 0$$

$$\mathrm{II}_A \quad \begin{cases} (1 + 2\varphi + \varphi^2)x^2 - 2(1 + \varphi + \varphi^2 + e\lambda + np + np')x \\ \quad + 1 + \varphi^2 + 2e\lambda + e^2\lambda + 2np' + 2npu - 2np'u' = 0. \end{cases}$$

$$\mathrm{II}'_A \quad \begin{cases} (1 - \alpha n)^2 x^2 - 2(\underline{1 + e\lambda + np + np'} - (1 - \alpha n)\alpha nux \\ \underline{+ 1 + 2e\lambda - e^2\lambda + 2np' + 2npu - 2np'u'} + \alpha^2 n^2 u^2 = 0. \end{cases}$$

$$\mathrm{III}_A \quad m = \frac{M}{ah^2} = R_c \begin{cases} \dfrac{(1-x)^2}{3} & \text{(1) Nervure comprimée.} \\ + \dfrac{1}{3} e\lambda \left[\dfrac{e^2}{1-x} + 3(1 - x - e) \right] & \text{(2) Ailes comprimées.} \\ + np' \dfrac{(1 - x - u')^2}{1 - x} & \text{(3) Armatures comprimées.} \\ + np \dfrac{(x - u)^2}{1 - x} & \text{(6) Armatures tendues.} \\ + \varphi \left[\dfrac{1}{2} x^2 - \dfrac{\varphi^2}{6} (1 - x)^2 \right] & \text{(4) Nervure tendue.} \end{cases}$$

B. — *Poutre à simple té armée seulement à la tension.*

On fera :

$$e' = 0$$
$$\lambda' = 0$$
$$p' = 0$$

$$\mathrm{II}_B \quad \begin{cases} (1 + 2\varphi + \varphi^2)x^2 - 2(1 + \varphi + \varphi^2 + e\lambda + np)x \\ \quad + 1 + \varphi^2 + 2e\lambda - e^2\lambda + 2npu = 0. \end{cases}$$

$$\mathrm{II}'_B \quad \begin{cases} (1 - \alpha n)^2 x^2 - 2\left[\underline{1 + e\lambda + np} - (1 + \alpha n)\alpha nu\right]x \\ \underline{+ 1 + 2e\lambda - e^2\lambda + 2npu} + \alpha^2 n^2 u = 0. \end{cases}$$

$$\mathrm{III}_B \quad m = \frac{M}{ah^2} = R_c \begin{cases} \dfrac{1}{3}(1 - x)^2 & \text{(1) Nervure comprimée.} \\ + \dfrac{1}{3} e\lambda \left[\dfrac{e^2}{1-x} + 3(1 - x - e) \right] & \text{(2) Ailes comprimées.} \\ + np \dfrac{(x - u)^2}{1 - x} & \text{(6) Armatures tendues.} \\ + \varphi \left[\dfrac{1}{2} x^2 - \dfrac{\varphi^2}{6} (1 - x)^2 \right] & \text{(4) Nervure tendue.} \end{cases}$$

C. — *Poutre rectangulaire armée à la tension et à la compression.*

On fera :

$$\lambda = 0$$
$$e' = 0$$
$$\lambda' = 0$$

$$\mathrm{II_C} \quad \begin{cases} (1 + 2\varphi + \varphi^2)x^2 - 2(1 + \varphi + \varphi^2 + np + np')x \\ + 1 + \varphi^2 + 2np' + 2npu - 2np'u' = 0. \end{cases}$$

$$\mathrm{II'_C} \quad \begin{cases} (1 - \alpha n)^2 x^2 - 2\left[\underline{1 + np + np'} - \alpha nu(1 - \alpha n)\right]x \\ \underline{+ 1 + 2np' + 2npu - 2np'u'} + \alpha^2 n^2 u^2 = 0. \end{cases}$$

$$\mathrm{III_C} \quad m = \frac{M}{ah^2} = R_e \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{3}(1 - x)^2 & \text{(1) Béton comprimé.} \\ + np' \dfrac{(1 - x - u')^2}{1 - x} & \text{(3) Armatures comprimées.} \\ + np \dfrac{(x - u)^2}{1 - x} & \text{(6) Armatures tendues.} \\ + \varphi \left[\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\varphi^2}{6}(1 - x)^2\right] & \text{(4) Béton tendu.} \end{array} \right.$$

D. — *Poutre rectangulaire ou dalle armée seulement en tension.*

On fera :

$$\lambda = 0$$
$$p' = 0$$
$$e' = 0$$
$$\lambda' = 0$$

$$\mathrm{II_D} \quad (1 + 2\varphi + \varphi^2)x^2 - 2(1 + \varphi + \varphi^2 + np)x + 1 + \varphi^2 + 2npu = 0.$$

$$\mathrm{II'_D} \quad (1 - \alpha n)^2 x^2 - 2\left[1 + np - \alpha nu(1 - \alpha n)\right]x + 1 + 2npu + \alpha^2 n^2 u^2 = 0.$$

$$\mathrm{III_D} \quad m = \frac{M}{ah^2} = R_e \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{3}(1 - x)^2 & \text{(1) Béton comprimé.} \\ + np \dfrac{(x - u)^2}{1 - x} & \text{(6) Armatures tendues.} \\ + \varphi \left[\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{\varphi^2}{6}(1 - x)^2\right] & \text{(4) Béton tendu.} \end{array} \right.$$

E. — *Poutre rectangulaire ou dalle, armée seulement en tension quand on ne veut pas tenir compte de la résistance du béton à l'extension.*

On fera

$$\lambda = 0$$
$$p' = 0$$
$$e' = 0$$
$$\lambda' = 0$$
$$\varphi = 0$$
$$\alpha = 0$$

II_E $\quad x^2 - 2(1 + np)x + 1 + 2npu = 0.$

II'_E $\quad \underline{x^2 - 2(1 + np)x + 1 + 2npu} = 0.$ identique à II_E

III_E $\quad m = \frac{M}{ah^2} = R_e \begin{cases} \frac{1}{3}(1 - x)^2 & \text{(1) Béton comprimé.} \\ + np\frac{(x - u)^2}{1 - x} & \text{(6) Armature tendue.} \end{cases}$

Remarque. — I. Pour $a = 1$ et $h = 1$, $m = M$. De là le nom de moment unitaire de résistance qui a été donné à la valeur m par M. Considère.

II. Si l'on entend négliger complètement la résistance du béton tendu, il suffira d'annuler dans les formules précédentes, φ et R_t.

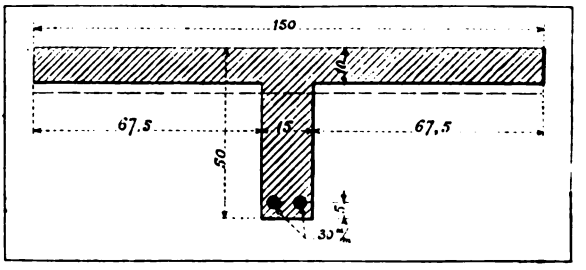


Fig. 140

Applications. — 1. *Quel est le moment de rupture de la section en T représentée (fig. 140), armée à la tension de 2 fers ronds de 30 millimètres ?*

(Le béton a été dosé à raison de 300 kilogrammes pour $0^{m^3},480$ de sable et $0^{m^3},720$ de gravier. On prendra $1 \times \overline{10}^9$ comme coeffi-

cient d'élasticité moyen; 190 kilogrammes comme résistance à la compression; 20 kilogrammes comme résistance à l'extension.)

On a

$$R_c = 190,$$
$$R_t = 20,$$
$$\frac{R_t}{R_c} = \varphi = \frac{20}{190} = 0{,}105,$$
$$n = 20 = \frac{20 \times \overline{10}^9}{1 \times \overline{10}^9},$$
$$a = 15,$$
$$h = 50,$$
$$p = \frac{f}{ah} = \frac{2 \times 7{,}07}{15 \times 50} = 0{,}01885,$$
$$\lambda = \frac{l}{a} = \frac{150 - 15}{15} = 9,$$
$$e = \frac{10}{50} = 0{,}2.$$
$$u = \frac{5}{50} = 0{,}10.$$

Appliquant les équations B, on disposera les calculs comme suit :

$\varphi^2 = \overline{0{,}105}^2 = 0{,}011$; $e\lambda = 0{,}2 \times 9 = 1{,}80$; $2e\lambda = 3{,}60$.

$1 + \varphi^2 = 1{,}011$; $e^2\lambda = 1{,}8 \times 0{,}2 = 0{,}36$.

$1 + \varphi + \varphi^2 = 1{,}116$; $np = 20 \times 0{,}01885 = 0{,}377$.

$1 + 2\varphi + \varphi^2 = 1{,}221$; $npu = 0{,}377 \times 0{,}1 = 0{,}0377$.
(coefficient de x^2)

$$1 + \varphi + \varphi^2 = 1{,}116$$
$$e\lambda = 1{,}800$$
$$np = 0{,}377$$
$$\text{Coefficient de } x = 3{,}193$$

$$1 + \varphi^2 = 1{,}011$$
$$2e\lambda = 3{,}600$$
$$2npu = 0{,}0754$$
$$\text{Total } 4{,}7364$$
$$-e^2\lambda = -0{,}360$$
$$\text{Terme indépendant. } 4{,}3764 \times 1{,}221 = 5{,}34358$$

$$\left.\begin{array}{r} 3{,}293^3 = 10{,}843849 \\ - \quad 5{,}343584 \\ \hline 5{,}500205 \end{array}\right\} \sqrt{5{,}500205} = 2{,}3582$$

L'équation II devient donc

$$1.\,221x^2 - 2 \times 3{,}293x + 4{,}3764 = 0.$$

D'où

$$x = \frac{3.293 - \sqrt{3.293^2 - 1{,}221 \times 4,\,37611}}{1{,}221},$$

$$x = \frac{3{,}293 - 2{,}3582}{1,\,221} = 0,\,7656,$$

ou en valeur absolue

$$x = 0{,}7656 \times 50 = 38{,}28.$$

La fibre neutre se trouve donc à $1^{cm}{,}172$ au dessous du hourdis. Mais cette position n'est vraie d'après une remarque précédente que si R_F est inférieur à la limite d'élasticité du fer, soit à 2000 kilogrammes par centimètre carré.

$$R_f = nR_c \frac{x - u}{1 - x} = 20 \times 190 \times \frac{0{,}7656 - 0.100}{0{,}2344} = 10\,790 \text{ kilog.}$$

On ne peut donc utiliser loin de là, toute la résistance à la compression du béton, mais seulement une faible fraction de celle-ci. Appliquons par suite l'équation II'_B en y faisant

$$\alpha = \frac{R_t}{R_F} = \frac{20}{2000} = 0{,}01.$$

On disposera les calculs comme suit :

$$\text{Coefficient de } x^2 \left\{\begin{array}{l} \alpha n = 0{,}01 \times 20 = 0{,}20 \\ 1 - \alpha n = 6{,}80 \\ (1 - \alpha n)^2 = 0{,}64 \end{array}\right.$$

$$\text{Coefficient de } x \left\{\begin{array}{l} 1 \quad = 1{,}000 \\ e\lambda \quad = 1{,}800 \\ np = 0{,}377 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rl} & \overline{3{,}177} \\ -\alpha nu(1-\alpha) = -0{,}8 \times 0{,}20 \times 0{,}1 = & -\ 0{,}016 \\ \hline & 3{,}161 \qquad (3{,}161)^2 = 9{,}991921 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\text{Terme indépendant} &= 1{,}000 \\
2e\lambda &= 3{,}600 \\
2npu &= 0{,}0754 \\
\alpha^2 n^2 u^2 = 0{,}04 \times 0{,}01 &= 0{,}0004 \\
\hline
&\ 4{,}6758 \\
-e^2\lambda &= -\ 0{,}360 \\
\hline
&\ 4{,}3158 \times 0{,}64 = 2{,}762112
\end{aligned}$$

L'équation II devient

$$0{,}64x^2 - 2 \times 3{,}161x + 4{,}3158 = 0.$$

D'où

$$x = \frac{3{,}161 - \sqrt{\overline{3{,}161}^2 - 0{,}64 \times 4{,}3158}}{0{,}64}$$

$$x = 0{,}738$$

ou en valeur absolue

$$x = 0{,}738 \times 50 = 36{,}90.$$

D'où

$$R_c = \frac{R_F}{n} \times \frac{1 - x}{x - u} = \frac{2000}{20} \times \frac{0{,}262}{0{,}638} = 41^{kg},07.$$

Remarque. — Ce résultat obtenu avec des données prises absolument au hasard, montre combien il faut attacher d'importance aux deux facteurs R_c et R_F, l'un ou l'autre pouvant entrainer la rupture alors que, si l'on ne considère qu'un seul d'entre eux, on peut être conduit à compter sur un coefficient de sécurité convenable.

Le moment de rupture s'obtiendra en faisant $R_c = 41{,}07$, par suite $\varphi = \frac{R_f}{R_c} = \frac{20}{41{,}07} = 0{,}487$ et $x = 0{,}738$ dans l'équation III_B.

Calculant d'abord les divers facteurs, on aura

$$\begin{aligned}
\varphi^2 &= \overline{0{,}487}^2 = 0{,}237 \\
x^2 &= \overline{0{,}738}^2 = 0{,}545 \\
(1 - x)^2 &= \overline{0{,}262}^2 = 0{,}069. \\
e^2 &= \overline{0{,}20}^2 = 0{,}04 \\
1 - x - e &= 1 - 0{,}738 - 0{,}200 = 0{,}062 \\
(x - u)^2 &= (0{,}738 - 0{,}100)^2 = \overline{0{,}638}^2 = 0{,}407.
\end{aligned}$$

On aura par suite pour les divers facteurs qui constituent la valeur de $\frac{m}{R_c}$:

(1) Nervure comprimée

$$\frac{1}{3}(1-x)^2 = \frac{0.069}{3} \qquad = 0,023$$

(2) Ailes comprimées

$$\frac{1}{3}e\lambda\left[\frac{e^2}{1-x} + 3(1-x-e)\right] = \frac{1}{3} \times 1,80 \left[\frac{0,04}{0,262} \times 3 \times 0,062\right] = 0,203$$

(6) Armatures tendues

$$np\,\frac{(x-u)^2}{1-x} = \frac{0,377 \times 0.407}{0,262} \qquad = 0,586$$

(4) Nervure tendue

$$\varphi\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{\varphi^2}{6}(1-x)^2\right] = 0,487\left(\frac{0,545}{2} - \frac{0,247}{6} \times 0,069\right) = 0,131$$

$$\frac{m}{R_c} = 0,943$$

Doù

$$m = 41,07 \times 0,943 = 38,73$$

$$M = mah^2 = 38,73 \times 0,15 \times 50^2 = 14\,524 \text{ kilogrammètres.}$$

II. — *La poutre ci-dessus repose librement sur ses extrémités distantes de 6 mètres, on demande la charge totale qu'elle peut supporter par mètre courant avant rupture?*

$$M = \frac{pl^2}{8} = \frac{p \times 6^2}{8} = 14\,524 \text{ kilogrammètres.}$$

D'où

$$p = \frac{8 \times 14\,524}{6^2} = 3\,227 \text{ kilogrammes}$$

III. — *Quelle est la surcharge normale que l'on peut faire supporter à cette poutre supposée comme faisant partie d'un plancher d'habitation?*

On admettra d'après les considérations de la p. 326 qu'un tel

plancher comporte un coefficient de sécurité de 2 par rapport à la limite d'élasticité. La charge totale admissible se borne donc à

$$\frac{3\,227}{2} = 1\,613 \text{ kilogrammes.}$$

Le poids propre de la poutre par mètre courant est

$$= (150 \times 10 + 40 \times 15)0^{kg},25 = 525 \text{ kilogrammes.}$$

La surcharge libre cherchée est par suite

$$1\,613 - 525 = 1\,088 \text{ kilogrammes.}$$

I^{bis} *Même problème dans l'hypothèse d'une résistance nulle à l'extension.*

Les équations à appliquer sont les équations II_B et III_B, dans lesquelles on fera $\varphi = 0$, puisque $\varphi = \frac{R_t}{R_c}$ et que R_t est supposé nul.

Ces équations deviennent

$$II_B \qquad x^2 - 2(1 + e\lambda + np)x + 1 + 2e\lambda - e^2\lambda + 2npu = 0$$

$$III_B \qquad m\,\frac{M}{ah^2} = R_c \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}(1 - x)^2 \\ + \frac{1}{3}\,e\lambda \left[\frac{e^2}{1 - x} + 3(1 - x - e)\right] \\ + np\,\frac{(x - u)^2}{1 - x}. \end{array} \right.$$

Les divers paramètres de ces équations ont été calculés ci-dessus, on n'a plus qu'à faire leurs sommes.

$$1 + e\lambda + np = 1 + 1,800 + 0,377 = 3,177$$
$$1 + 2e\lambda + 2npu - e^2\lambda = 1 + 3,600 + 0,0754 - 0,360 = 4,3154.$$

D'où

$$x^2 - 2 \times 3,177x + 4,$$
$$x = 0,77$$

On tire d'abord de là

$$R_F = nR_c \frac{x-u}{1-x} = 20 \times 190 \times \frac{0,773 - 0,100}{0,227}$$

$$R_F = 11266 \text{ kilogrammes.}$$

Soit $112^{kg},66$ par millimètre carré.

Admettant la rupture du fer à 4000 kilogrammes (la limite d'élasticité ayant été supposée de 2000 kilogrammes par centimètre carré), on en tire

$$R_c = \frac{1-x}{x-u} \times \frac{R_F}{n} = \frac{0,227}{0,673} \times \frac{4000}{20}$$

$$R_c = 67^{kg},46.$$

On remarquera que dans cette nouvelle hypothèse, la position de la fibre neutre reste invariable quelle que soit la valeur de R_c et de R_f, c'est-à-dire quelle que soit la charge.

L'équation III_B qui donne le moment, devient

$$\frac{m}{R_c} = \frac{1}{3} \times \overline{0,227}^2 + \frac{1,80}{3}\left[\frac{0,04}{0,227} + 3(0,227 - 0,200)\right] + 0,377 \times \frac{\overline{0,673}^2}{0,227}$$

$$\frac{m}{R_c} = 0,0172 + 0,1543 + 0,7522 = 0,9237.$$

D'où

$$m = 67,46 \times 0,9237 = 62,31.$$

Et le moment de rupture

$$M = 62,31 \times 0,15 \times \overline{50}^2 = 23366 \text{ kilogrammètres.}$$

Tandis que l'hypothèse de $R_t = 20$ kilogrammes a conduit à $M = 14524$ kilogrammètres pour la limite d'élasticité.

IV. — *La poutre ci-dessus est sollicitée par un moment de* 9000 *kilogrammètres. On demande :* 1° *Son coefficient de sécurité par rapport à la limite d'élasticité ;* 2° *le taux de travail du béton et du métal.*

1° *Coefficient de sécurité.* — Il est donné par le quotient du moment de rupture, (trouvé ci-dessus égal à 14524 kilogram-

mètres) par le moment des forces extérieures (donné de 9000 kilogrammètres).

$$C = \frac{14524}{9000} = 1,61.$$

2° *Taux de travail.* — On a obtenu un moment de rupture de 14524 kilogrammètres pour $R_F = 2000$ kilogrammes et $R_c = 41,07$ et l'on a trouvé que pour un moment des forces extérieures de 9000 kilogrammètres, le coefficient de sécurité était de 1,61. On aura donc *a priori* un résultat grossier en évaluant à $\frac{2000}{1,61} = 1242$ kilogrammes le taux de travail du métal par centimètre carré, et à $\frac{41,07}{1,61} = 25,50$ pour celui du béton à la compression.

Mais on peut opérer d'une façon beaucoup plus précise en calculant les moments unitaires pour 2 valeurs de R_c encadrant le taux présumé de $25^{kg},50$, par exemple pour $R_c = 20$ et $R_c = 30$, et interpolant entre ces deux valeurs.

On disposera le calcul comme suit :

$R_c = 20$ kilogrammes	$R_c = 30$ kilogrammes
$\varphi = \frac{R_f}{R_c} = \frac{20}{20} = 1$	$\varphi = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$
$\varphi^2 = 1$	$\varphi^2 = \frac{4}{9}$
$1 + \varphi^2 = 2$	$1 + \varphi^2 = \frac{13}{9} = 1,444$
Terme indépendant de l'équation du du second degré en x :	
$2 + 3,3154 = 5,3154$ (1)	$1,444 + 3,3154$ (1) $= 4,7598$
$1 + \varphi + \varphi^2 = 3$	$1 + \varphi + \varphi^2 = \frac{19}{9} = 2,111$
Coefficient de x :	
$3 + 2,177$ (2) $= 3,177$	$2,111 + 2,177$ (2) $= 4,288$
$1 + \varphi^2 + 2\varphi = 4$	$1 + \varphi^2 \times 2\varphi = \frac{25}{9}$
Coefficient de x^2 :	
$4x^2 - 2 \times 5,177\, x + 5,3154 = 0$	$\frac{25}{9} x^2 - 2 \times 4,288\, x + 4,7598 = 0$
$x = 0,706.$	$x = 0,726$

(1) Voir pour ces constantes les résultats des calculs ci-dessus

$$2e\lambda + 2npu - e^2\lambda = 3,600 + 0,0754 - 0,360 = 3,3154.$$

(2) $$e\lambda + np = 1,800 + 0,377 = 2,177$$

$R_c = 20$ kilogrammes	$R_c = 30$ kilogrammes
$x^2 = \overline{0,706}^2 = 0,498$	$x^2 = \overline{0,726}^2 = 0,527$
$(1 - x)^2 = \overline{0,294}^2 = 0,086$	$(1 - x)^2 = \overline{0,274}^2 = 0,075$
$(x-u)^2 = (0,706 - 0,100)^2 = \overline{0,606}^2 = 0,367$	$(0,726 - 0,100)^2 = \overline{0,626}^2 = 0,392$
$3(1-x-e) = 3(1-0,706-0,200) = 0,282$	$3(1 - 0,726 - 0,200) = 0,222$
(1) $\frac{1}{3} \times 0,086 \times 20 = 0,573$	$\frac{1}{3} \times 0,075 \times 30 = 0,750$
(2) $\frac{1}{3} \times 1,8\left[\frac{0,04}{0,294} + 0,282\right] \times 20 = 5,016$	$\frac{1}{3} \times 1,8\left[\frac{0,04}{0,274} + 0,222\right] \times 30 = 6,624$
(6) $\frac{0,377 \times 0,367}{0,294} \times 20 = 9,412$	$\frac{0,377 \times 0,392}{0,274} \times 30 = 16,180$
(4) $\left(\frac{0,498}{2} - \frac{1}{6} \times 0,086\right) \times 20 = 4,694$	$\frac{0,527}{2} - \frac{4}{9} \times \frac{1}{6} \times 0,075 = 5,159$
Total : $m = 19,695$	$m = 28,713$

Ces deux points obtenus, on pourra construire avec le premier point déjà trouvé ($R_c = 41,07$) les courbes des x, m et R_F, ces dernières valeurs étant calculées comme suit :

$R_c = 20$ kilogrammes	$R_c = 30$ kilogrammes
$R_F = nR_c \frac{x-u}{1-x} = \frac{20 \times 20 \times 0,606}{0,294} = 824^k$	$R_F = \frac{20 \times 30 \times 0,626}{0,274} = 1371^k$

Portant alors en abscisses les valeurs m des moments unitaires et en ordonnées les valeurs de R_c, R_F et x, les courbes de variation de ces diverses grandeurs permettront de relever les valeurs particulières relatives à toute solution intermédiaire.

On trouve ainsi soit en relevant sur une épure à échelle convenable, soit par interpolation.

$$\text{Valeur de } x = 0,706 + \frac{(0,726 - 0,706)(24 - 19,70)}{28,71 - 19,70} = 0,716$$

$$\text{Valeur de } R_c = 20 + (30 - 20) \times \frac{4,30}{9,01} = 24^{kg},77$$

$$\text{Valeur de } R_F = 824 + (1371 - 824) \times \frac{4,30}{9,01} = 1084 \text{ kilogrammes.}$$

Les taux exacts de travail sont donc

Béton	$24^k,77$	au lieu de	$25^k,50$	Chiffres
Métal	10, 84	»	12, 42	approximatifs.

IVbis. — *Même problème, si l'on suppose nulle la résistance à l'extension.*

On a trouvé comme moment de rupture 23366 kilogrammètres (v. I^{bis}). Le moment correspondant à la limite d'élasticité du fer (2000 kilogrammes) est donc la moitié du précédent calculé sur la base de $R_F = 4000$ kilogrammes ou de $\frac{23366}{2} = 11683$ kilogrammètres.

On a donc

$$C = \frac{11683}{9000} = 1,298.$$

Les taux de travail du fer et du béton sont réduits aux valeurs suivantes

$$R_F = \frac{9000}{23366} \times 40 = 15^{kg},40$$

$$R_c = \frac{9000}{23366} \times 67,46 = 25^{kg},98.$$

L'hypothèse $R_t = 20$ kilogrammes avait donné

$$R_F = 10^{kg},84 \text{ seulement}$$
$$R_c = 24^{kg},77.$$

V. — *Déterminer la charge de rupture d'une dalle de 1 mètre de largeur, de 10 centimètres d'épaisseur, armée de 7 barres rondes en acier de 20 millimètres dont l'axe se trouve à 3 centimètres de la face tendue. Le dosage du béton est de 1 : 2 : 3. La résistance maxima du béton à l'écrasement est de 200 kilogrammes, à l'extension de 22 kilogrammes et son coefficient d'élasticité est de $1,2 \times \overline{10}^9$. La portée est de 2 mètres* (v. fig. 141).

Données :

$$R_c = 200; \qquad R_t = 22; \qquad \frac{R_t}{R_c} = \frac{22}{200} = 0,110 = \varphi;$$

$$n = \frac{22}{1,2} = 18,33; \qquad f = 7 \times 3,14 = 22;$$

$$p = \frac{22}{100 \times 10} = 0,022; \qquad u = \frac{0,03}{0,10} = 0,3;$$

$$h = 10; \qquad a = 100; \qquad pu = 0,022 \times 0,3 = 0,0066.$$

On appliquera les équations D

$$\varphi^2 = \overline{0,11}^2 = 0,0121$$
$$1 + \varphi^2 = 1,0121$$
$$1 + \varphi^2 + \varphi = 1,1221$$
$$1 + \varphi^2 + 2\varphi = 1,2321 \text{ coefficient de } x^2.$$

$$np = 0,022 \times 18,33 = 0,4032$$
$$1 + \varphi + \varphi^2 = 1,1221$$
$$1,5253 \text{ coefficient de } x.$$

$$2npu = 0,0066 \times 2 \times 18,33 = 0,2420$$
$$1 + \varphi^2 = 1,0121$$
$$1,2541 \text{ terme indépendant.}$$

$$1,2321\, x^2 - 2 \times 1,5254\, x + 1,2541 = 0,$$
$$x = 0,5205\,; \qquad (1 - x) = 0,4795\,;$$

et en valeur absolue :

$$x = 0,5205 \times 10 = 5,205.$$

D'où :

$$R_F = nR_c \frac{x - u}{1 - x} = 28,83 \times 200 \times \frac{0,5205 - 0,300}{0,4795}$$
$$R_F = 1\,686 \text{ kilogrammes.}$$

Soit $16^k,86$ par millimètre carré, chiffre admissible pour l'acier; c'est-à-dire ne dépassant pas la limite d'élasticité.

L'équation III_D donne pour le moment unitaire, après le calcul suivant des divers facteurs

$$(1 - x)^2 = \overline{0,4795}^2 = 0,230$$
$$(x - u)^2 = (0,5205 - 0,300)^2 = \overline{0,2205}^2 = 0,0486$$
$$x^2 = (0,5205)^2 = 0,271$$

(1) $$\frac{1}{3}(1 - x)^2 \times R_c = \frac{1}{3} \times 0,230 \times 200^k = 15,333$$

(6) $$\frac{np\,(x - u)^2}{1 - x} \times R_c = \frac{0,4032 \times 0,0486}{0,4795} \times 200 = 8,175$$

(4) $$R_t\left[\frac{x^2}{2} - \frac{\varphi^2}{6}(1 - x)^2\right] = 22\left[\frac{0,271}{2} - \frac{0,0121}{6} \times 0,230\right] = 2,980$$

$$m = 26,488$$

$$M = 26,488 \times 1^m \times \overline{10}^2 = 2648,80.$$

On a d'autre part :

$$M = \frac{pl^2}{8} = 2648,80.$$

D'où :

$$p = \frac{8 \times 2648.80}{2^2} = 5297 \text{ kilogrammes.}$$

Déduisant le poids mort $100 \times 10 \times 0^k,25 = 250$.

Surcharge de rupture = 5047 kilogrammes par mètre carré.

Nota. — S'il s'agissait d'une telle surcharge avec répétition 'efforts il y aurait lieu d'abaisser le coefficient de résistance du éton à sa limite d'élasticité, comme il a été dit p. 326.

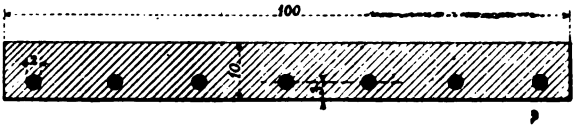


Fig. 141

I. — *Le hourdis ci-dessus est soumis à des vibrations violentes. Quelle surcharge peut-il supporter en toute sécurité ?*

D'après les observations faites (p. 326) on ne peut admettre ici ue $R_c = 100$ kilogrammes ; d'où $\frac{R_t}{R_c} = \frac{22}{100} = \varphi = 0,22$. Les utres valeurs restent celles qui ont été trouvées plus haut.

$$\varphi^2 = \overline{0,22}^2 = 0,0484$$
$$1 + \varphi^2 = 1,0484$$
$$1 + \varphi^2 + \varphi = 1,2684$$
$$1 + \varphi^2 + 2\varphi = 1,4884 \text{ coefficient de } x^2.$$

$$np = 0,4032$$
$$1 + \varphi + \varphi^2 = 1,2684$$
$$1,6716 \text{ coefficient de } x.$$

$$2npu = 0,2420$$
$$1 + \varphi^2 = 1,0484$$
$$1,2904 \text{ terme indépendant.}$$

$$1,4884\, x^2 - 2 \times 1,6717\, x^2 + 1,2904 = 0$$
$$x = 0,425, \qquad (1 - x)$$

Et successivement :

$$(1 - x)^2 = \overline{0,505}^2 = 0,255$$

$$(x - u)^2 = \overline{0,195}^2 = 0,038$$

$$x^2 = \overline{0,495}^2 = 0,245$$

(1) $$\frac{1}{3}(1 - x)^2 \times R_c = \frac{1}{3} \times 0,255 \times 100 = 8,500$$

(6) $$np\,\frac{(x - u)^2}{1 - x} \times R_c = \frac{0.4033 \times 0,038}{0,505} \times 100 = 3,034$$

(4) $$R_t\left[\frac{x^2}{2} - (1 - x)^2 \times \frac{v^2}{6}\right] = 22\left[\frac{0,245}{2} - \frac{0,0484}{6} \times 0,255\right] = 2,650$$

$$m = 14,184$$

$$M = 14,184 \times 1 \times \overline{10}^2 = 1418,40 \text{ kilogrammètres}$$

$$p = \frac{8 \times 1418,4}{2^2} = 2836,80$$

$$- \text{ poids mort} = \underline{250}$$

$$2586,80$$

Et par suite la surcharge que la construction peut supporter en toute sécurité est :

$$\frac{2586,30}{3} = 862^k,27 \text{ par mètre carré.}$$

VII. — *Sept poutres de* 30 *de largeur et* 60 *de hauteur sont armées de* 28 *centimètres cubes de métal, répartis dans les proportions suivantes* (v. fig. 142) :

	à la tension	à la compression
Poutre (1)	1	0
» (2)	0,8	0,2
» (3)	0,666	0,333
» (4)	0,500	0,500
» (5)	0,445	0,555
» (7)	0,200	0,800
» (7)	0	1

Les distances des axes des armatures aux forces voisines sont uniformément de 4. *On suppose* $n = 20$, $R_t = 20$ *kilogrammes.*

On demande les moments de résistance des diverses poutres :

1° *Pour un taux de travail du béton de* 10 *kilogrammes par millimètre carré ;*

2° *Pour un taux de travail du métal de* 40 *kilogrammes par centimètre carré ;*

3° *Si l'on exige simultanément :* $R_F = 1\,000$ *et* $R_e = 40$ *kilogrammes, quelle répartition des armatures faut-il prévoir ?*

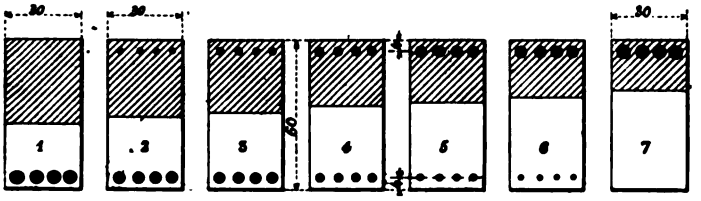


Fig. 142

1° *Taux de travail du métal* $R_F = 1\,000$ *kilogrammes.* — Du moment qu'on s'impose R_F, on aura recours aux équations II'_c

$$\underline{(1 - xn)^2}x^2 - 2\left[\underline{1 - (1 - xn)\,xnu} + np + np'\right]x + \underline{1 + x^2n^2u^2}$$
$$+ 2\,np' + 2\,npu - 2\,np'u' = 0.$$

Les termes soulignés sont ceux qui resteront les mêmes dans les 7 cas considérés, pour lesquels on a constamment :

$$x = \frac{R_t}{R_f} = \frac{20}{1000} = 0{,}02 \qquad \text{et} \qquad n = 20.$$

On calculera donc une fois pour toutes les valeurs

$$1 - xn = 1 - 20 \times 0{,}02 = 0{,}60\,; \qquad (1 - xn)^2 = \overline{0{,}60}^2 = 0{,}36\,;$$

$$u = \frac{4}{60}\,; \qquad xnu = 20 \times 0{,}02 \times \frac{4}{60} = 0{,}0267\,;$$

$$x^2n^2u^2 = \overline{0{,}0267}^2 = 0{,}00071\,; \qquad 1 + x^2n^2u^2 = 1{,}00071\,;$$

$$xnu\,(1 - xn) = 0{,}0267 \times 0{,}60 = 0{,}01602\,;$$

$$1 - xnu\,(1 - xn) = 0{,}984.$$

De la constante $f + f' = 28$, on tire

$$p + p' = \frac{f + f'}{ah} = \frac{28}{30 \times 60} = 0{,}01556$$

Numéros des poutres	Rapport des armatures $\frac{p}{p'}$	p	p'	$p - p'$	$\frac{2npu - 2np'u'}{0,36}$ ou $7,41\,(p - p')$	$\frac{2np'}{0,36}$ ou $\frac{1000}{9} \times p'$	$2,7797 + \mathrm{VI} + \mathrm{VII}$	x	$R_c = \frac{R_v}{n}\,\frac{1-x}{x-u}$	$R_v^1 = nR_c\,\frac{1-x-u}{1-x}$	$\varphi^2 = \frac{R_v^2}{R_c^2}$
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	1 : 0	0,01556	0	+ 0,01556	+ 0,1153	+ 0	2,895	0,423	79,22	»	0,064
2	0,8 : 0,2	0,012448	0,003112	+ 0,009336	+ 0,06918	+ 0,3458	3,195	0,476	64,06	11,17	0,097
3	2 : 1	0,0103732	0,0051866	+ 0,0051866	+ 0,03844	+ 0,5763	3,394	0,508	55,78	9,64	0,129
4	1 : 1	0,00773	0,00778	0	0	+ 0,8644	3,644	0,543	46,98	8,00	0,181
5	0,445 : 0,555	0,006924	0,008635	— 0,001711	— 0,01263	+ 0,9594	3,726	0,562	44,24	7,49	0,204
5 *bis*	0,3476 : 0,6524	0,0054	0,0102	— 0,0048	— 0,0353	+ 1,133	3,872	0,585	40,00	6,70	0,250
6	0,2 : 0,8	0,0031120	0,012448	— 0,009336	— 0,06918	+ 1,3831	4,093	0,623	33,90	5,57	0,348
7	0 : 1	0	0,01556	— 0,01556	— 0,1153	+ 1,7289	4,593	0,674	26,98	4,29	0,549

et par suite $np + np' = 20 \times 0{,}01556 = 0{,}311$

pour les 7 cas. Par suite aussi pour

$$1 - (1 - \alpha n) \times \alpha n u + np + np' = 0{,}984 + 0{,}311 = 1{,}295.$$

L'équation ci-dessus à appliquer est donc :

$$0{,}36\,x^2 - 2 \times 1{,}295\,x + 1{,}00071 + 2\,np' + 2\,npu - 2\,np'u' = 0$$

ou

$$x^2 - 2 \times 3{,}5972\,x + 2{,}7797 + \frac{2\,np' + 2\,npu - 2\,np'u'}{0{,}36} = 0$$

Remarquant que $u = u' = \frac{4}{60}$; que l'on peut remplacer $2\,npu - 2\,np'u'$ par $2 \times 20 \times \frac{4}{60}(p - p')$, on calculera le terme indépendant à part par le tableau précédent où on le trouvera dans la colonne VIII.

On calculera les diverses valeurs des moments unitaires à l'aide de ce tableau :

	Rapport des armatures (tension | compression)			
(1)	1 | 0	$R_c = 79{,}22$	Bét. comp. $79{,}22 \times \frac{1}{3} \times \overline{0{,}572}^2$	$= 8{,}64$
		$R_t = 20$	Bét. tendu. $20\left(\frac{1}{2} \times \overline{0{,}428}^2 - \frac{0{,}064}{6} \times \overline{0{,}572}^2\right)$	$= 1{,}76$
		$R_r = 1000$	Arm. tend. $79{,}22 \times 20 \times 0{,}01556 \times \frac{\overline{0{,}361}^2}{\overline{0{,}572}}$	$= 5{,}61$
				$m = 16{,}01$
(2)	4 | 1	$R_c = 64{,}06$	Bét. comp. $64{,}06 \times \frac{1}{3} \times \overline{0{,}524}^2$	$= 5{,}86$
		$R_t = 20$	Bét. tendu. $20\left(\frac{1}{2} \times \overline{0{,}476}^2 - \frac{0{,}0973}{6} \times \overline{0{,}524}^2\right)$	$= 2{,}18$
		$R'_r = 1117$	Arm. comp. $64{,}06 \times 0{,}003112 \times 20 \times \frac{\overline{0{,}457}^2}{\overline{0{,}524}}$	$= 1{,}59$
		$R_r = 1000$	Arm. tend. $64{,}06 \times 0{,}012448 \times 20 \times \frac{\overline{0{,}409}^2}{\overline{0{,}524}}$	$= 5{,}09$
				$m = 14{,}72$
(3)	2 | 1	$R_c = 55{,}78$	Bét. comp. $55{,}78 \times \frac{1}{3} \times \overline{0{,}492}^2$	$= 4{,}50$
		$R_t = 20$	Bét. tendu. $20 \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{0{,}508}^2 - \frac{0{,}1289}{6} \times \overline{0{,}492}^2\right)$	$= 2{,}48$
		$R'_r = 964$	Arm. comp. $55{,}78 \times 20 \times 0{,}0051866 \times \frac{\overline{0{,}425}^2}{\overline{0{,}492}}$	$= 2{,}13$
		$R_r = 1000$	Arm. tend. $55{,}78 \times 20 \times 0{,}0103732 \times \frac{\overline{0{,}441}^2}{\overline{0{,}492}}$	$= 4{,}58$
				$m = 13{,}69$

(4) Rapport des armatures — tension 1 | compression 1	$R_c = 46{,}98$	Bét. comp. $46{,}98 \times \frac{1}{3} \times \overline{0{,}452}^2$	$= 3{,}20$
	$R_t = 20$	Bét. tendu. $20\left(\frac{1}{2} \times \overline{0{,}548}^2 - \frac{0{,}1815}{6} \times \overline{0{,}452}^2\right)$	$= 2{,}88$
	$R'_r = 800$	Arm. comp. $46{,}98 \times 0{,}00778 \times 20 \times \frac{\overline{0{,}385}^2}{0{,}452}$	$= 2{,}40$
	$R_r = 1000$	Arm. tend. $46{,}98 \times 0{,}00778 \times 20 \times \frac{\overline{0{,}481}^2}{0{,}452}$	$= 3{,}74$
		m	$= 12{,}22$
(5) 0,445 | 0,555	$R_c = 44{,}24$	Bét. comp. $44{,}24 \times \frac{1}{3} \times \overline{0{,}438}^2$	$= 2{,}68$
	$R_t = 20$	Bét. tendu. $20\left(\frac{1}{2} \times \overline{0{,}562}^2 - \frac{0{,}2043}{6} \times \overline{0{,}438}^2\right)$	$= 3{,}01$
	$R'_r = 749$	Arm. comp. $44{,}24 \times 20 \times 0{,}003635 \times \frac{\overline{0{,}371}^2}{0{,}438}$	$= 2{,}40$
	$R_r = 1000$	Arm. tend. $44{,}24 \times 20 \times 0{,}006924 \times \frac{\overline{0{,}495}^2}{0{,}423}$	$= 3{,}43$
		m	$= 11{,}55$
(6) 1 | 4	$R_c = 33{,}90$	Bét. comp. $33{,}90 \times \frac{1}{3} \times \overline{0{,}377}^2$	$= 1{,}61$
	$R_t = 20$	Bét. tendu. $20\left(\frac{1}{2} \times \overline{0{,}623}^2 - \frac{0{,}3481}{6} \times \overline{0{,}377}^2\right)$	$= 3{,}72$
	$R'_r = 557$	Arm. comp. $33{,}90 \times 20 \times 0{,}012448 \times \frac{\overline{0{,}310}^2}{0{,}377}$	$= 2{,}15$
	$R_r = 1000$	Arm. tend. $33{,}90 \times 20 \times 0{,}003112 \times \frac{\overline{0{,}556}^2}{0{,}377}$	$= 1{,}73$
		m	$= 9{,}21$
(7) 0 | 1	$R_c = 26{,}98$	Bét. comp. $26{,}98 \times \frac{1}{3} \times \overline{0{,}327}^2$	$= 0{,}96$
	$R_t = 20$	Bét. tendu. $20 \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{0{,}673}^2 - \frac{0{,}549}{6} \times \overline{0{,}327}^2\right)$	$= 4{,}55$
	$R'_r = 429$	Arm. comp. $26{,}98 \times 20 \times 0{,}01556 \times \frac{\overline{0{,}261}^2}{0{,}327}$	$= 1{,}73$
	$R_r = 1000$	m	$= 7{,}24$

Si on laisse de côté les points limites fictifs répondant à p ou $p' = 0$, qui sont forcément entachés d'erreur, les résultats donnés par les calculs et rendus plus tangibles par la figure 142, sont très instructifs.

On peut en tirer plusieurs conclusions :

1° Le moment unitaire décroit d'une façon continue de 1 à 7, c'est-à-dire au fur et à mesure qu'une partie de l'armature passe de la partie tendue à la partie comprimée ;

2° Le taux de travail du béton à la compression décroit également, en conséquence, mais un peu moins vite ;

3° Comme les diverses poutres sont constituées par des quantités égales de béton et de métal, il ressort que pour une même fatigue des armatures, l'emploi de tout le métal à la tension répondrait au meilleur rendement, au maximum d'économie par suite, si la fatigue du béton était également constante. Or la remarque précédente fait ressortir au contraire que cette fatigue augmente avec l'excès du métal tendu sur le métal comprimé. La fatigue maxima à la compression du béton n'atteint pas cependant des proportions désastreuses puisque le maximum est inférieur à 80 kilogrammes. Il suffirait donc de réaliser un béton rompant à 320 kilogrammes pour disposer d'un moment unitaire de 16 avec un coefficient de sécurité de 2 à la limite d'élasticité, par rapport à la fois au béton et au métal, tandis que l'armature symétrique ne donne que $m = 12{,}22$ avec $R_c = 46{,}98$.

4° Les différences présentées par les divers modes de répartition des armatures sont notables, mais cependant pas aussi considérables qu'on aurait pu le supposer *a priori;* cette remarque fournit un certain apaisement au sujet des conséquences d'un renversement des moments résultant d'un encastrement des poutres ou des dalles, d'autant plus que le moment des forces extérieures est considérablement diminué par l'encastrement.

2° *Taux de travail du béton comprimé* 40 *kilogrammes.* — Les poutres 1 à 5 calculées ci-dessus ont donné des taux de travail du béton comprimé supérieurs à 40 kilogrammes ; il s'agit de calculer actuellement de quels moments unitaires on disposera, en abaissant ces taux de travail à 40 kilogrammes. Les taux de travail des armatures comprimées ou tendues diminueront également ; mais ces poutres donneront des coefficients de sécurité un peu plus grands.

Du moment que l'on se donne R_c, la valeur de x sera fournie à l'aide de l'équation II_c, dans laquelle on fera

$$\varphi = \frac{R_t}{R_c} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}.$$

D'où :

$$\varphi^2 = 0{,}25\,; \qquad 1 + \varphi^2 = 1{,}25\,;$$
$$1 + \varphi^2 + \varphi = 1{,}75\,; \qquad 1 + \varphi^2 + 2\varphi = 2{,}25$$

et l'on aura :

$$2{,}25\,x^2 - 2(1{,}75 + np + np')x + 1{,}25 + 2np' + 2nu(p - p') = 0$$

$$np + np' = 0{,}311 : \qquad 2np' = 40p' ;$$

$$2nu(p - p') = \frac{8}{3}(p - p').$$

D'où :

$$x^2 - 2 \times 0{,}916\,x + \frac{t}{2{,}25} = 0$$

et la valeur de t sera à choisir dans le tableau suivant :

(1)	$t = 1{,}25 + 0 + \frac{8}{3} \times 0{,}01555$	$= \frac{1{,}291}{2{,}25} = 0{,}574$	$x = 0{,}402$
(2)	$= 1{,}25 + 40 \times 0{,}003112 + \frac{8}{3} \times 0{,}009336$	$= \frac{1{,}399}{2{,}25} = 0{,}622$	$= 0{,}450$
(3)	$= 1{,}25 + 40 \times 0{,}0051866 + \frac{8}{3} \times 0{,}0051866$	$= \frac{1{,}471}{2{,}25} = 0{,}654$	$= 0{,}486$
(4)	$= 1{,}25 + 40 \times 0{,}00778 + 0$	$= \frac{1{,}561}{2{,}25} = 0{,}694$	$= 0{,}535$
(5)	$= 1{,}25 + 40 \times 0{,}008635 - \frac{8}{3} \times 0{,}001711$	$= \frac{1{,}591}{2{,}25} = 0{,}707$	$= 0{,}553$

Connaissant x, l'équation III$_c$ donne :

(1) Rapport des armatures	$R_c = 40$	Bét. comp. $40 \times \frac{1}{3} \times \overline{0{,}598}^2$	$= 4{,}77$
tension | compression	$R_t = 20$	Bét. tendu. $20\left(\frac{1}{2} \times \overline{0{,}402}^2 - \frac{1}{24} \times \overline{0{,}598}^2\right)$	$= 1{,}59$
1 | 0	$R_r = 448^k$	Arm. tend. $40 \times 0{,}311 \times \frac{\overline{0{,}335}^2}{0{,}598}$	$= 2{,}33$
		m	$= 8{,}69$
(2)	$R_c = 40$	Bét. comp. $40 \times \frac{1}{3} \times \overline{0{,}550}^2$	$= 4{,}03$
	$R_t = 20$	Bét. tendu. $20 \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{0{,}450}^2 - \frac{1}{24} \times \overline{0{,}550}^2\right)$	$= 1{,}77$
4 | 1	$R'_r = 702^k$	Arm. comp. $40 \times 20 \times 0{,}003112 \times \frac{\overline{0{,}483}^2}{0{,}550}$	$= 1{,}05$
	$R_r = 557$	Arm. tend. $40 \times 20 \times 0{,}012448 + \frac{\overline{0{,}383}^2}{0{,}550}$	$= 2{,}66$
		m	$= 9{,}51$
(3)	$R_c = 40$	Bét. comp. $40 \times \frac{1}{3} \times \overline{0{,}514}^2$	$= 3{,}52$
	$R_t = 20$	Bét. tendu. $20 \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{0{,}486}^2 - \frac{1}{24} \times \overline{0{,}514}^2\right)$	$= 2{,}14$
2 | 1	$R'_r = 696^k$	Arm. comp. $40 \times 20 \times 0{,}0051366 \times \frac{\overline{0{,}447}^2}{0{,}514}$	$= 1{,}62$
	$R_r = 652$	Arm. tend. $40 \times 20 \times 0{,}0103732 \times \frac{\overline{0{,}419}^2}{0{,}514}$	$= 2{,}84$
		m	$= 10{,}12$

(4) Rapport des armatures — tension | compression: 1	$R_c = 40$	Bét. comp. $40 \times \frac{1}{3} \times \overline{0,465}^2$	$= 2,88$
	$R_t = 20$	Bét. tendu. $20 \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{0,535}^2 - \frac{1}{24} \times \overline{0,465}^2\right)$	$= 2.68$
	$R'_a = 685^k$	Arm. comp. $40 \times 20 \times 0,00778 \times \frac{\overline{0,398}^2}{0,465}$	$= 2,12$
	$R_F = 805$	Arm. tend. $40 \times 20 \times 0,00778 \times \frac{\overline{0,468}^2}{0,465}$	$= 2,93$
			$m = 10,61$
(5) 0,445 | 0,555	$R_c = 40$	Bét. comp. $40 \times \frac{1}{3} \times \overline{0,447}^2$	$= 2,66$
	$R_t = 20$	Bét. tendu. $20 \left(\frac{1}{2} \times \overline{0,553}^2 - \frac{1}{24} \times \overline{0,447}^2\right)$	$= 2,89$
	$R'_F = 679^k$	Arm. comp. $40 \times 20 \times 0,008635 \times \frac{\overline{0,380}^2}{0,447}$	$= 2,22$
	$R_F = 872$	Arm. tend. $40 \times 20 \times 0,006924 \times \frac{\overline{0,486}^2}{0,447}$	$= 2,94$
			$m = 10,71$

Ces résultats montrent qu'inversement à ce qui se passait quand on s'imposait $R_F = 10$ kilogrammes par millimètre carré, la solution la moins économique est celle qui répond au maximum de métal en tension quand on s'impose $R_c = 40$ kilogrammes par centimètre carré. L'armature tendue se fatiguant de plus en plus au fur et à mesure qu'on la diminue pour augmenter l'armature comprimée, il arrive un moment où cette fatigue atteint la limite fixée par le coefficient de sécurité (en ce qui concerne le métal); c'est en ce point que l'on réalise le maximum de résistance et par suite d'économie. Ce point fait l'objet de la troisième question.

3° *Taux de travail du béton comprimé* 40 *kilogrammes. Taux de travail de l'armature tendue* 1 000 *kilogrammes.* — Si l'on s'impose à la fois $R_c = 40$ et $R_F = 1\,000$ kilogrammes, cas introduit déjà dans le tableau sous la rubrique 5bis, il n'y a plus qu'une seule répartition satisfaisant à cette double condition, pour une somme constante des sections des armatures tendue et comprimée.

Cette proportion se trouve comme suit :

On a :

$$x = \frac{R_F + nR_c u}{R_F + nR_c} = \frac{1\,000 + 20 \times 40 \times \frac{4}{60}}{1\,000 + 20 \times 40} = 0,585.$$

Remplaçant x par cette valeur dans l'équation II_c et φ^2 par 0,25

$$2,25 \times \overline{0,585}^2 - 2 \times 0,585\,(1,75 + 20\,p + 20\,p') + 1,25 + 40\,p' + \frac{40}{15}\,(p - p') = 0$$

ou

$$0,7695 - \overbrace{2 \times 0,585\,(1,75 + 20 \times 0,01556)}^{2,4114} + 1,25 + 40\,p' + \frac{40}{15}\,(0,01556 - 2\,p') = 0.$$

D'où :

$$p' = 0,0102$$

et par suite

$$p = 0,0054.$$

Et l'on aura comme moment unitaire :

(5bis) Proportion des armatures	$R_c = 40$	Bét. comp. $40 \times \frac{1}{3} \times \overline{0,415}^2$	$= 2,30$
	$R_t = 20$	Bét. tendu. $20 \left(\frac{1}{2} \times \overline{0,485}^2 - \frac{1}{24} \times \overline{0,415}^2\right)$	$= 3,28$
tension 0,340 | compression 0,660	$R'_r = 670^k$	Arm. comp. $40 \times 20 \times 0,0102 \times \frac{\overline{0,348}^2}{0,415}$	$= 2,36$
	$R_r = 1000$	Arm. tend. $40 \times 20 \times 0,0054 \times \frac{\overline{0,518}^2}{0,415}$	$= 2,79$
			$m = 10,73$

Le moment résistant de la poutre 5bis est donc :

$$10,73 \times 0,30 \times \overline{60}^2 = 11\,586 \text{ kilogrammes.}$$

VIII. — *Même problème dans l'hypothèse d'un béton sans résistance à l'extension.*

Faisant $\alpha = \frac{R_t}{R_r} = 0$ dans l'équation II'_c, on trouve :

$$x^2 - \overbrace{2\,(1 + np + np')\,x}^{1,311\,x} + 1 + 2\,np' + 2\,npu - 2\,np'u' = 0$$

et par suite successivement :

	Rapport des armatures tension	Rapport des armatures compression	$2np'$	$2nu(p-p')$	x	R_c
(1)	1	0	0,00000	+0,0415	$1,311-\sqrt{1,7187-1,0415}=0,488$	60,80
(2)	4	1	0,12448	+0,0249	$1,311-\sqrt{1,7187-1,1489}=0,556$	45,40
(3)	2	1	0,20744	+0,0138	$1,311-\sqrt{1,7187-1,2217}=0,606$	36,55
(4)	1	1	0,31120	+ 0	$1,311-\sqrt{1,7187-1,3112}=0,673$	26,98
(5)	0,445	0,555	0,34543	−0,00457	$1,311-\sqrt{1,7187-1,3413}=0,697$	24,05
(6)	1	4	0,49792	−0,0249	$1,311-\sqrt{1,7187-1,4674}=0,779$	13,73
(7)	0	4	0,62240	−0,0415	$1,311-\sqrt{1,7187-1,5805}=0,939$	3,50

Les moments unitaires correspondants seront :

(1) Rapport des armatures — tension 1 | compression 0

$R_c = 60,80$ — Bét. comp. $60,8 \times \frac{1}{3} \times \overline{0,512}^2 = 5,31$

$R_y = 1000$ — Arm. tend. $60,8 \times 0,311 \times \frac{\overline{0,421}^2}{0,512} = 6,54$

$m = 11,85$

(2) 4 | 1

$R_c = 45,40$ — Bét. comp. $45,40 \times \frac{1}{3} \times \overline{0,444}^2 = 2,98$

$R'_y = 771$ — Arm. comp. $45,40 \times 70 \times 0,003112 \times \frac{\overline{0,377}^2}{0,444} = 0,90$

$R_y = 1000$ — Arm. tend. $45,40 \times 20 \times 0,01245 \times \frac{\overline{0,489}^2}{0,444} = 6,08$

$m = 9,96$

(3) 2 | 1

$R_c = 36,55$ — Bét. comp. $36,55 \times \frac{1}{3} \times \overline{0,394}^2 = 1,71$

$R'_y = 607$ — Arm. comp. $36,55 \times 20 \times 0,0052 \times \frac{\overline{0,327}^2}{0,394} = 1,03$

$R_y = 1000$ — Arm. tend. $36,55 \times 20 \times 0,01035 \times \frac{\overline{0,539}^2}{0,394} = 5,58$

$m = 8,32$

(4) 1 | 4

$R_c = 26,98$ — Bét. comp. $26,98 \times \frac{1}{3} \times \overline{0,327}^2 = 0,96$

$R'_y = 429$ — Arm. comp. $26,98 \times 20 \times 0,00788 \times \frac{\overline{0,260}^2}{0,327} = 0,87$

$R_y = 1000$ — Arm. tend. $26,98 \times 20 \times 0,08778 \times \frac{\overline{0,606}^2}{0,327} = 4,71$

(5) Rapport des armatures — tension 0,445 | compression 0,555	$R_c = 24,05$	Bét. comp. $24,05 \times \frac{1}{3} \times \overline{0,303}^2$	$= 0,73$
	$R'_F = 376$	Arm. comp. $24,05 \times 20 \times 0,008565 \times \frac{\overline{0,237}^2}{0,303}$	$= 0,77$
	$R_F = 1000$	Arm. tend. $24,05 \times 20 \times 0,0069 \times \frac{\overline{0,630}^2}{0,303}$	$= 4,35$
		$m =$	$5,85$
(6) 1 | 4	$R_c = 13,73$	Bét. comp. $13,73 \times \frac{1}{3} \times \overline{0,201}^2$	$= 0,18$
	$R'_F = 183$	Arm. comp. $13,73 \times 20 \times 0,01245 \times \frac{\overline{0,134}^2}{0,201}$	$= 0,31$
	$R_F = 1000$	Arm. tend. $13,73 \times 20 \times 0,031 \times \frac{\overline{0,732}^2}{0,201}$	$= 2,28$
		$m =$	$2,77$
(7)	$R_c = 3,50$	Bét. comp. $3,50 \times \frac{1}{3} \times \overline{0,001}^2$	$= 0,004$
	$R'_F =$	Arm. comp. $3,50 \times 20 \times 0,0155 \times \left(\frac{0,061 - 0,067}{0,061}\right)^2$	$=$ .....
		$m =$	$0,004$

La double condition $R_c = 40$ et $R_F = 1000$, conduit aux pourcentages p et p' suivants :

Comme précédemment, la valeur de x est déterminée par

$$R_F = 2nR\,\frac{x - u}{1 - x}$$

D'où $x = 0,585$ comme plus haut l'équation du second degré devient

$$\overline{0,585}^2 - 2 \times 0,585(1 + 20 \times 0,01556) + 1 + 40p' + \frac{40}{15}(0,01556 - 2p') = 0$$

D'où l'on tire

$$p' = \frac{2,252}{520} = 0,00433$$

et par suite $$p = 0,01123$$

connaissant p et p' et x, on en déduit m comme suit

Proportion des armatures — tension 0,720 | compression 0,280	$R_c = 40$	Bét. comp. $40 \times \frac{1}{3} \times \overline{0,415}^2$	$= 2,30$
	$R'_F =$	Arm. comp. $40 \times 20 \times 0,00433 \times \frac{\overline{0,348}^2}{0,415}$	$= 1,01$
	$R_F = 1000$	Arm. tend. $40 \times 20 \times 0,01123 \times \frac{\overline{0,518}^2}{0,415}$	$= 5,82$
		$m =$	$9,13$

$$M = 9,13 \times 0,30 \times \overline{60}^2 = 9860 \text{ kilogrammètres.}$$

Remarque. — Comparant les résultats obtenus dans les deux méthodes, l'une qui tient compte de la résistance à l'extension du béton, l'autre qui n'en tient aucun compte, on relève des différences considérables principalement dans les solutions voisines des limites. La solution moyenne est parfaitement comparable, puisqu'elle répond aux mêmes taux de travail R_c et R_F. La première méthode accuse 11586 kilogrammètres de résistance avec un rapport d'armatures $\left(\frac{\text{tension}}{\text{compression}}\right) = \frac{34}{66}$, tandis que la seconde accuse seulement 9860 kilogrammètres, avec un rapport d'armature $\frac{72}{28}$, c'est-à-dire à peu près inverse.

IX. — *Quelle épaisseur et quelle armature convient-il de donner à une dalle capable de supporter une surcharge de* 1000 *kilogrammes par mètre carré, sur une portée de* 4 *mètres, avec des taux de travail* $R_c = 45$, $R_F = 1000$. *On suppose* $n = 20$, $R_t = 15$ *et* $u = 0{,}200$?

On a

$$\frac{R_t}{R_c} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3} = \varphi \begin{cases} \varphi^2 = \frac{1}{9} \\ 1 + \varphi^2 = \frac{10}{9} \\ 1 + \varphi^2 + \varphi = \frac{13}{9} \\ 1 + \varphi^2 + 2\varphi = \frac{16}{9} \end{cases}$$

$$R_F = nR_c \frac{x - u}{1 - x}.$$

D'où

$$x = \frac{R_F + nR_c u}{R_F + nR_c}$$

$$x = \frac{1000 + 20 \times 45 \times 0{,}2}{1000 + 20 \times 45} = 0{,}621$$

et par suite $x^2 = 0{,}385641$

$$1 - x = 0{,}379 = (1 - x)^2 = 0{,}143641$$

$$(1 - n - u) = 0{,}179\,; \quad (1 - x - u)^2 = 0{,}032041$$

$$(x - u) = 0{,}421\,; \quad (x - u)^2 = 0{,}177241.$$

Pour $\varphi = \frac{1}{3}$, l'équation II_c devient

$$16 \times 0{,}385641 - 2 \times 0{,}621\left[13 + 180(p + p')\right] + 10 + 72(4p' + p) = 0$$

et toute réduction faite

$$(1) \qquad 151{,}56p - 64{,}44p' = 0{,}024256.$$

L'équation III_c devient

$$m = \begin{cases} \text{Béton comprimé} \ . \ . & 45 \times \frac{1}{3} \times \overline{0{,}379}^2 & = 2{,}155 \\ \text{Béton tendu} \ . \ . \ . \ . & 15 \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{0{,}621}^2 - \frac{1}{6 \times 9} \times \frac{2}{\overline{0{,}379}}\right) & = 2{,}852 \\ \text{Armature comprimée.} & 45 \times 20\,p' \times \frac{\overline{0{,}179}^2}{0{,}379} & = 76{,}080\,p' \\ \text{Armature tendue} \ . \ . & 45 \times 20\,p \times \frac{\overline{0{,}421}^2}{0{,}379} & = 420{,}90\,p \end{cases}$$

ou

$$(2) \qquad m = 420{,}9p + 76{,}08p' + 5{,}007$$

De l'équation (1), on tire

$$(3) \qquad p' = \frac{151{,}56p - 0{,}024256}{64{,}44}.$$

Remplaçant p' par cette valeur dans (2)

$$(4) \qquad p = \frac{64{,}44(m - 5{,}007) + 1.8454}{38653{,}48}.$$

Le problème serait donc résolu, si l'on connaissait le moment m résultant à la fois de la surcharge et du poids mort. Ne connaissant pas à l'avance le poids mort, on appliquera ces équations à diverses épaisseurs.

$$(a) \quad h = 16 \begin{cases} \text{Poids mort } 16 \times 100 \times 0^{kg},25 = 400 \text{ kilogrammes} \\ \qquad\qquad \text{Surcharge} = 1\,000 \quad » \\ \qquad\qquad \text{Charge totale} = \overline{1\,400} \quad » \\ M_1 = \dfrac{1\,400 \times \overline{4}^2}{8} = 2\,800 \text{ kilogrammètres} \\ m_1 = \dfrac{2\,800}{1 \times \overline{16}^2} = 10{,}937 \quad » \end{cases}$$

$$(b)\quad h = 20 \begin{cases} \text{Poids mort } 20 \times 100 \times 0^{kg},25 = 500 \text{ kilogrammes} \\ \qquad\qquad \text{Surcharge} = 1\,000 \quad » \\ \qquad\qquad \text{Charge totale} = 1\,500 \quad » \\ M_2 = \dfrac{1\,500 \times \overline{4}^2}{8} = 3\,000 \text{ kilogrammètres} \\ m_2 = \dfrac{3\,000}{1 \times \overline{20}^2} = 7{,}50 \quad » \end{cases}$$

$$(c)\quad h = 24 \begin{cases} \text{Poids mort } 24 \times 100 \times 0^{kg},25 = 600 \text{ kilogrammes} \\ \qquad\qquad \text{Surcharge} = 1\,000 \quad » \\ \qquad\qquad \text{Charge totale} = 1\,600 \quad » \\ M_3 = \dfrac{1\,600 \times \overline{4}^2}{8} = 3\,200 \text{ kilogrammètres} \\ m_3 = \dfrac{3\,200}{1 \times \overline{24}^2} = 5{,}556 \quad » \end{cases}$$

Dans la solution (*a*), on trouve

$$p = \frac{64{,}44(10{,}937 - 5{,}007) + 1{,}8454}{38\,653{,}48} = 0{,}00993.$$

D'où

$$f = pah = 0{,}00993 \times 100 \times 16 = 15^{cmq},888$$

$$p' = \frac{151{,}56 \times 0.00993 - 0{,}024256}{64{,}44} = 0{,}02248$$

$$f' = p'ah = 0{,}02248 \times 100 \times 16 = 36^{cmq},768.$$

La dalle *a* étant ainsi déterminée, si l'on admet que le béton revient à 75 francs le mètre cube, et l'armature à $0^{fr},35$ le kilogramme, son prix de revient sera de

$$0{,}16 \times 75 + (15{,}888 + 36{,}768)0{,}78 \times 0^{fr},35 = 26^{fr},37.$$

Dans la solution (*b*), on aura de même

$$p = \frac{64.44(7.50 - 5{,}007) + 1{,}8454}{38\,653{,}48} = 0{,}0041$$

$$f = 20 \times 100 \times 0{,}0041 = 8^{cmq},20$$

$$p' = \frac{151.56 \times 0.0041 - 0{,}024256}{64{,}41} = 0{,}0093$$

$$f' = 20 \times 100 \times 0{,}0093 = 18^{cmq}$$

$$f + f' =$$

Prix de revient

$$0,20 \times 75 + 26,80 \times 0,78 \times 0,35 = 22^{fr},32.$$

Enfin dans la solution (*c*), on aura

$$p = \frac{64,44(5.556 - 5\,007) + 1.8454}{38\,653,48} = 0,0096$$

$$f = 24 \times 100 \times 0,0096 = 2^{cmq},30$$

$$p' = \frac{151.56 \times 0,0096 - 0.024256}{64,44} = 0,00188$$

$$f' = 24 \times 100 \times 0,00188 = 4^{cmq},51$$

$$f + f' = 6^{cmq},81$$

Prix de revient

$$0,24 \times 75 + 6,81 \times 0,78 \times 0^{fr},35 = 19^{fr},86$$

Il n'y a pas lieu d'aller plus loin, les pourcentages d'armatures devenant trop faibles ; l'épaisseur 24 étant la plus économique, la réponse au problème est la suivante :

Epaisseur	$h = 24$
Armatures comprimées	$f' = 4,51$; 9 barres de 8 millimètres
Armatures tendues	$f = 2,30$; 9 barres de 6 millimètres (2,52)

X. — *Même problème, en faisant abstraction de la résistance à l'extension du béton.*

On a toujours $x = 0,621$, mais il faut faire $\varphi = 0$ dans l'équation II_c qui devient

$$\overline{0,621}^2 - 2 \times 0,621\left[1 + n(p + p'\right] + 1 + 2np' + 2npu - 2np'u' = 0.$$

D'où l'on tire

$$(1) \qquad 16,84p - 7,16p' = 0,143641.$$

L'équation du moment unitaire, donne en annulant le terme relatif au béton tendu

$$(2) \qquad 420,90p + 76,08p' + 2,155 = m.$$

De (1) on tire

$$p' = \frac{16,84p - 0,143641}{7,16}.$$

D'où remplaçant dans (2)

$$p = \frac{7,16(m - 2,155) + 10,9282}{42,95}.$$

Appliquant ces équations aux épaisseurs 16, 20 et 24, on trouve les résultats inscrits dans le tableau suivant, en regard desquels sont rappelés les résultats du problème précédent.

Épaisseur d'une dalle capable de 1000k de surcharge de 4 mètres de portée	(I) $R_t = 15$			(II) $R_t = 0$			Différence relative en faveur de l'hypothèse I	Prix du mètre carré		
	f	f'	$f+f'$	f	f'	$f+f'$		I	II	Différence en faveur de I
	cmq.	cmq.	cmq.	cmq	cmq.	cmq.				
16	15,89	36,77	52,66	27,49	32,58	60,07	13 %	26,37	28,40	7 %
20	8,20	18,60	26,80	22,90	13,72	36,62	25,2	22,32	25,00	10
24	2,30	4,51	6,81	19,71	»	19,71	65	19,86	23,38	15

Ce tableau montre que l'économie réalisée par la première hypothèse varie de 13 à 65 %, en ce qui concerne les armatures ; et que cette économie se traduit sur le prix des deux éléments par une réduction de prix de 7 à 15 %, avec les prix unitaires choisis arbitrairement.

CHAPITRE V

—

CISAILLEMENT — EFFORTS MAXIMA DANS DES DIRECTIONS OBLIQUES

95. Théorie générale. — On considère une poutre reposant sur deux appuis A et B (fig. 143) et soumise à l'action d'une série de forces P_1, P_2, P_3, produisant des réactions R_A et R_B sur les appuis.

Supposant la poutre coupée en CD, on peut déterminer d'autre part la résultante Q′ des forces R_A, P_1, P_2, situées à gauche de la section CD considérée, d'autre part la résultante Q″ des forces R_B, P_3, P_4, P_5 situées à droite de cette section. On démontre que les forces Q′ et Q″ sont appliquées au même point ; qu'elles sont égales et de signes contraires.

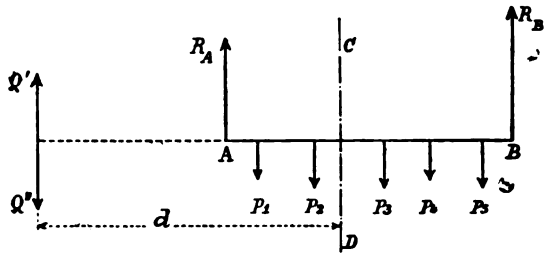


Fig. 143

Pour étudier l'action de ces résultantes Q′ et Q″ sur la section CD ou sur le prisme élémentaire CDC′D′ (fig. 144), on transportera ces forces au droit de cette section en ajoutant les moments Q′*d* et Q″*d*. Considérée comme faisant partie du tronçon de gauche, la section CD sera soumise à l'action du moment Q′*d* et de la force Q′ ; considérée comme faisant partie du tronçon de droite,

la section C'D' sera soumise à l'action du moment $Q''d$ et de la force Q''. Les moments $Q'd$ et $Q''d$ produisent sur l'élément considéré des efforts égaux et de sens contraires indiqués par les flèches. Ces efforts sont les compressions et extensions produites par les moments fléchissants étudiés aux chapitres précédents. Les efforts Q' et Q'' tendent à faire glisser les sections CD et C'D' parallèlement à leur direction, à les *cisailler*.

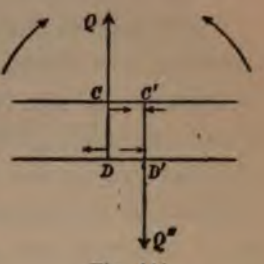


Fig 144

Les forces Q et Q' sont connues sous le nom d'*efforts tranchants* et produisent sur la matière des cisaillements et des glissements.

Les efforts de cisaillement seront maxima quand l'effort tranchant sera maximum, c'est-à-dire sur les appuis (abstraction faite des poutres à section variable), et minima quand l'effort tranchant sera minimum soit généralement dans la partie centrale.

L'action de l'effort tranchant se répartit comme suit :

Soit Δl (fig. 145) l'épaisseur de la tranche infinitésimale CDC'D' ; examinons les conditions d'équilibre du prisme MNPQ de hauteur également infinitésimale Δh découpée dans cette tranche ; on remarque que la face NQ est soumise à l'action d'une fraction de la force Q'' que l'on désignera par $-T'$, et la face MP à une force égale et de sens contraire $+T'$. La résultante de ces deux forces est le moment $T'\Delta l$. Pour que le prisme reste en équilibre, il faut qu'il soit soumis à l'action d'un autre moment égal à $T'\Delta l$, mais de sens contraire ; il faut par suite que les faces MN et PQ soient soumises elles-mêmes à l'action de forces égales et de sens contraires $+S'$, $-S'$, de manière que l'on ait :

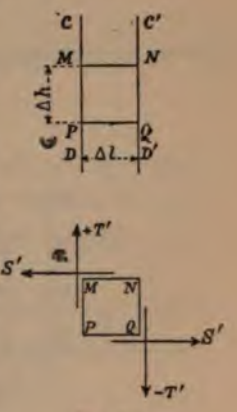


Fig. 145

$$T'\Delta l = S'\Delta h$$

et si

$$\Delta l = \Delta h = 1 ; \qquad T' = S'.$$

Ces forces S′ tendent à cisailler les faces, MN, PQ.

L'effort tranchant Q′ produit donc dans une section *deux séries principales* (¹) *d'efforts de cisaillement, des efforts verticaux* T′ *et des efforts horizontaux* S′, *ces efforts sont égaux par unité de section quand ils sont relevés au même point.*

On déterminera la valeur de ces efforts, dans l'hypothèse de la séparation des sections CD, C′D′, par une tranche de largeur infinitésimale Δl (fig. 146) en remarquant que la section C′D, supporte un moment qui diffère de la quantité $Q'dl$ de celui qui sollicite la section CD. Les efforts supplémentaires S′ résultant de ce moment $Q'\Delta l$ se calculent comme les efforts R_c et R_T développés par les moments ordinaires. On aura en désignant par S'_y l'effort par unité de section qui se développe dans une fibre quelconque située à une distance y de la fibre neutre GG′, par I le moment d'inertie de la section toute entière rapportée à un axe passant par le centre de gravité (²)

$$S'_y = \frac{Q\,dl\,y}{I}$$

et pour une section ΔF

$$S'_y = \frac{Q\,dl\,y}{I} \times \Delta F.$$

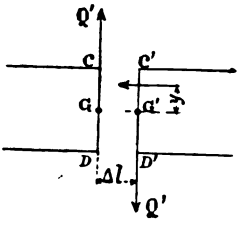


Fig. 146

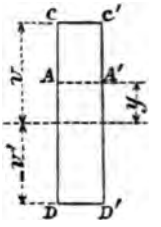


Fig. 147

Cet effort est constant pour tous les éléments situés à la même distance de la fibre neutre ; il décroît avec y, et s'annule avec lui. Comme les sections CD, C′D′ sont très rapprochées, on peut

(¹) On verra plus loin que ces efforts se développent dans toutes les directions.

(²) Pour les fibres extrêmes situées à une distance v de l'axe neutre $S = \frac{Q\,dl\,v}{I}$.

admettre que les efforts normaux R_c et R_t, de compression ou d'extension supportés par l'élément CDC'D' sont égaux.

Par suite les efforts S' ne sauraient agir immédiatement dans l'axe des fibres il faut qu'ils s'exercent tout d'abord le long de ces fibres et en dehors d'elles en cherchant à les entraîner de manière à faire coïncider en fin de compte la force et l'axe de la fibre.

Les efforts S' se transmettent de proche en proche dans la hauteur et par suite l'effort total qui s'exerce sur la section AA' (fig. 147) n'est pas uniquement l'effort élémentaire S' défini ci-dessus, pour les sections ΔF voisines de AA', mais c'est la somme de tous les efforts S' qui se développent entre A et C, ou entre A et D. L'effort total S_y sera donc

$$S_y = \int_y^v \frac{Q\,dl}{I}\, y\,\Delta F = \frac{Q\,dl}{I}\int_y^v y\,\Delta F$$

ou bien

$$S_y = \int_{-v'}^y \frac{Q\,dl}{I}\, y\,\Delta F = \frac{Q\,dl}{I}\int_{-v'}^y y\,\Delta F.$$

Il est facile de voir que ces deux efforts produits par la force Q sont égaux, mais de sens contraires et qu'ils tendent à faire glisser la partie supérieure de la section AA' sur la partie inférieure de cette même section.

L'effort qui en résulte est l'effort de cisaillement horizontal qu'il s'agissait de déterminer, et dont les équations ci-dessus permettent de calculer l'intensité.

En résumé l'effort de cisaillement horizontal est proportionnel à la longueur de la tranche dl considérée et croît proportionnellement à $\int y\Delta F$, jusqu'à la fibre neutre où il atteint sa valeur maxima, pour décroître ensuite, les valeurs de y devenant négatives.

96. Applications. — *Quel est l'effort de cisaillement maximum qui s'exerce sur la poutre* AB *entre les sections* CD *et* C'D', *entre lesquelles l'effort tranchant est supposé constant et égal à* Q ? (v. fig. 148).

Désignant par d la distance des deux sections

$$S = \frac{Qd}{I} \int_y^v y \Delta F.$$

Si la poutre est homogène et à section rectangulaire, de base a et de hauteur h, on a :

$$\Delta F = a dy; \qquad v = \frac{h}{2}; \qquad I = \frac{ah^3}{12}$$

d'où :

$$S = \frac{Qd}{I} \int_0^{\frac{h}{2}} ay\,dy = \frac{Qda}{I} \left(\frac{h}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{Qda}{\frac{ah^3}{12}} \times \left(\frac{h}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{3}{2} \frac{Qd}{h}.$$

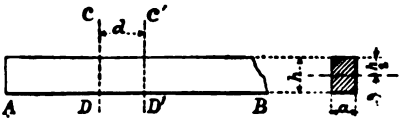


Fig. 148

2° *Quel est l'effort maximum de cisaillement horizontal par unité de section supporté par l'élément d défini ci-dessus ?*

L'effort $S = \frac{3}{2} \frac{Qd}{h}$ trouvé ci-dessus s'exerce sur une section rectangulaire de longueur d et de largeur a ; l'effort par unité de section sera par suite :

$$S = \frac{\frac{3}{2} \frac{Qd}{h}}{ad} = \frac{3}{2} \frac{Q}{ah}.$$

On voit que dans ce cas, l'effort unitaire de cisaillement horizontal ah est égal à 1,5 fois celui relatif à l'effort tranchant moyen qui s'exerce sur cette section.

Remarque. — La formule générale

$$(1) \qquad S_y = \frac{Q\,dl}{I} \int_y^v y\Delta F$$

permet de déterminer très facilement l'effort unitaire de cisaillement horizontal. Supposons en effet que $dl = 1$

$$(2) \qquad S_y = \frac{Q}{I} \int_o^v y\Delta F.$$

Cette valeur représente l'effort de cisaillement horizontal qui se produit dans l'ensemble des fibres A situées à la même distance y de la fibre neutre ; elle est égale à celle de l'effort vertical qui se produit le long des mêmes fibres.

En divisant S_y par la largeur a de la tranche au point considéré, on aura :

$$(3) \qquad S_y = \frac{Q}{aI} \int_y^{\ } y\Delta F$$

valeur qui représente les efforts de cisaillement par unité de section exercés dans le plan horizontal ou dans le plan vertical par l'effort tranchant Q.

Au point de vue géométrique la quantité $\int_y^v y\Delta F$ représente le moment statique des sections élémentaires situées au-dessus de l'horizontale passant par A.

On peut encore interpréter la formule (1) ci-dessus de la façon suivante : On sait que le moment d'inertie d'une section est égal à la surface P de cette section multipliée une première fois par la distance H des centres de gravité des parties de section situées au-dessus de l'axe neutre et une seconde fois par la distance H' des antipoles de ces sections pris par rapport à l'axe neutre (fig. 149) ; en d'autres termes

$$I = FHH'.$$

Les centres de gravité G et G′ sont faciles à déterminer. Pour obtenir l'antipole P, il faut calculer les rayons de gyration K de chacune des parties par la formule :

$$K = \sqrt{\frac{I}{F}}$$

puis porter cette valeur de K, à l'échelle du dessin, sur une perpendiculaire GM à G′O, joindre OM et élever MP perpendiculaire à OM, qui coupe la droite GG′ au point P cherché.

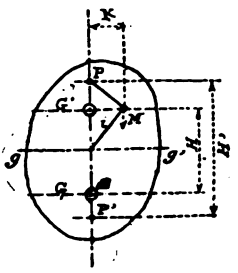


Fig. 149

Il résulte de cette construction que H′ sera toujours plus grand que H, mais que la valeur H′ — H sera d'autant plus petite que la section sera plus élevée.

Se basant sur ces considérations, on simplifiera un peu les valeurs ci-dessus. Faisons $\Delta l = H'$, nous proposant ainsi de déterminer la valeur moyenne du cisaillement sur une tranche de largeur H′, on aura

$$S = \frac{QH'}{I}\int_y^v y\,\Delta F = \frac{QH'}{FHH'}\int_y^v y\,\Delta F$$

d'où :

$$S = \frac{Q}{FH}\int_y^v y\,\Delta F.$$

Expression qui donne la valeur des efforts de cisaillement pour une tranche dont la largeur est H′ ou en exagérant un peu, pour une tranche de largeur H, H étant la distance des centres de gravité des deux membrures.

3° *Quel est l'effort de cisaillement maximum qui se produit dans la poutre à té représentée* (fig. 150), *sous l'action de l'effort tranchant* Q ?

Soit I le moment d'inertie total de cette section, pris par rapport à la fibre neutre, située à la distance x de la partie infé-

rieure de la poutre. Les valeurs de x et de I ont été obtenues par les procédés usuels.

On sait que les efforts de cisaillement par unité de longueur sont donnés par la formule (2)

$$S_y = \frac{Q}{I} \int_y^v \Delta y F.$$

Ils sont maxima dans la fibre neutre où leur valeur atteint

$$S_y = \frac{Q}{I} \int_o^x y \Delta F.$$

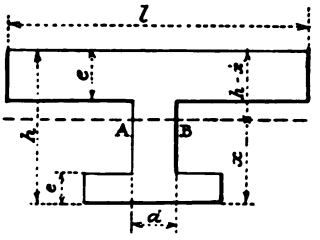


Fig. 150

On a donc avec les notations indiquées (fig. 150) et en calculant l'intégrale pour la membrure supérieure; en décomposant celle-ci en éléments simples on a :

$$\int_o^y = \left(h - x - \frac{e}{2}\right) el + \frac{(h - x - e)^2}{2} a \text{ (1)}$$

d'où :

$$S_y = \frac{Q}{I} \left[\left(h - x - \frac{e}{2}\right) el + \frac{(h - x - e)^2}{2} a\right].$$

Expression dont il est facile de déterminer la valeur avec des données numériques.

(1) $\frac{l}{2} [(h - x)^2 - (h - x - e)^2] + \frac{(h - x - e)^2}{2} \times a.$

4° *Quel est l'effort de cisaillement horizontal dans la fibre neutre sur un tronçon l de la poutre ci-dessus?*

On a trouvé plus haut l'effort par unité de longueur; celui qui se produira sur une longueur l est en admettant que l'effort tranchant et que la section restent constants sur cette longueur, sera

$$S'_y = \frac{Ql}{I}\left[\left(h - x - \frac{e}{2}\right) el + \frac{(h - x - e)^2}{2} a\right].$$

5° *Quel est l'effort de cisaillement horizontal unitaire maximum qui s'exerce dans la poutre ci-dessus?*

L'effort maximum de cisaillement trouvé S_y s'exerce sur toute la largeur de la tranche AB; pour avoir l'effort par unité de section, il faudra donc diviser l'effort trouvé par la largeur a de cette tranche. On aura :

Effort de cisaillement maximum, par unité de section :

$$\frac{Ql}{aI}\left[\left(h - x - \frac{e}{2}\right) el + \frac{(h - x - e)^2}{2} a\right].$$

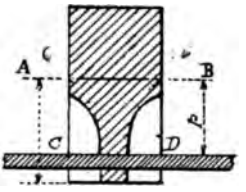


Fig. 151

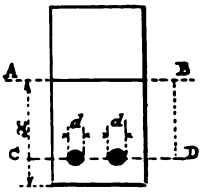


Fig. 151bis

97. Application aux corps hétérogènes. — Les théories ci-dessus ont été développées pour les corps homogènes. On peut néanmoins les appliquer aux corps hétérogènes à la condition de transformer leur section, comme il a été dit pour la flexion, les ramenant ainsi à une section homogène. Cette opération se fait en amplifiant horizontalement la section du fer dans le rapport de son coefficient d'élasticité à celui du béton comprimé et en réduisant en chaque point de la hauteur la section du béton tendu proportionnellement à son coefficient d'élasticité. La section transformée prend alors la forme représentée par la partie hachurée des figures 151 et 151bis.

L'effort tranchant maximum total se produira toujours dans la fibre neutre, mais il n'en sera pas nécessairement de même de l'effort tranchant unitaire maximum.

Examinons en effet ce qui se passe à la hauteur des armatures. La tranche CD de béton doit bien transmettre à la tranche supérieure immédiatement voisine l'effort $S_y = \frac{Q}{I}\int_p^x y\,\Delta F$, mais cet effort n'est pas réparti uniformément sur toute la largeur de la section ; les parties en contact avec l'armature supportent un effort beaucoup plus considérable que les parties voisines et il y a lieu de tenir compte de cette circonstance si l'on veut empêcher tout glissement.

Supposons que l'armature soit assez voisine de l'arête inférieure pour que l'on puisse négliger la partie du béton qui se trouve au-dessous, on aura pour chacune des armatures supposée circulaire

$$\int_p^x y\,\Delta F = \frac{d}{2} \times \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi d^3}{8}$$

d'où en amplifiant dans le rapport n les coefficients d'élasticité

$$S_y = \frac{Q}{I}\, n\, \frac{\pi d^3}{8}.$$

Cet effort étant supporté par une largeur d de béton, l'effort par unité de section sera :

$$S_y = \frac{Q}{I}\, n\, \frac{\pi d^2}{8} = \frac{Qns}{2I}.$$

Cet effort est très probablement supérieur à l'effort moyen déterminé dans la fibre neutre par les formules ci-dessus ; *il y aura donc lieu de déterminer dans chaque cas particulier pour s'assurer s'il ne dépasse pas les valeurs extrêmes que l'on s'est imposées*, et si tel n'est pas le cas, il faudra armer la poutre dans le sens vertical au moyen d'attaches verticales ou inclinées d'étriers ou de treillis, de façon à augmenter la résistance au cisaillement horizontal.

Remarque. — Il a été supposé dans ce qui précède que l'armature était constituée par un fer rond. En cas contraire, s'il s'agissait d'une barre de fer de profil quelconque, il y aurait lieu de calculer le cisaillement à l'aide de la formule

$$S_y = \frac{Q}{Ib} \int (ny\Delta F)$$

dans laquelle b représente la projection sur l'axe neutre de la section de l'armature.

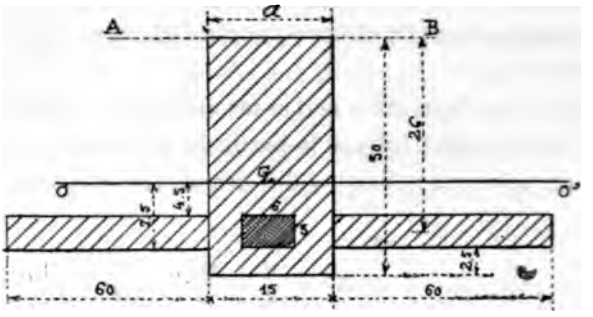


Fig. 152

98. Applications. — *La poutre rectangulaire représentée* (fig. 152) *est armée d'un fer rectangulaire de* 6 × 3. *Elle supporte en son milieu une charge concentrée de* 20 000 *kilogrammes. Sa portée est de* 2 *mètres. On demande les efforts de cisaillement maxima qui s'exercent dans cette poutre au droit des appuis.*

L'effort de cisaillement a été trouvé pour une longueur l, de

$$S_y = \frac{Ql}{I} \int_y^v y\Delta F$$

Q représentant l'effort tranchant a pour valeur sur les appuis $\frac{20\,000}{2} + 30 \times 15 \times 0^{kg},25 = 10\,112$ kilogrammes, le second terme étant relatif au poids mort.

I est le moment d'inertie qu'il est facile de déterminer sur les appuis. En effet en ces points les moments sont très faibles ; on peut admettre par suite que les tensions du ciment ne dépassent

la limite d'élasticité dans aucun point des sections voisines de l'appui. Il en résulte que dans la transformation de la section en section homogène, on ne s'occupera pas du béton tendu dont le rapport du coefficient d'élasticité à celui du béton comprimé peut être admis égal à l'unité. On se bornera à amplifier la section de la quantité correspondant au métal tendu ; admettant 20 pour la valeur du rapport entre le coefficient d'élasticité du métal et du béton, il suffira d'amplifier 20 fois la largeur 6 de l'armature, ce qui donne une saillie de 60 de chaque côté.

Pour déterminer le moment d'inertie de la partie hachurée de la figure 152 on opérera comme suit, en prenant la ligne AB comme axe des moments :

Béton	$30 \times 15 \times \frac{30}{2} = 450$		$\times 15 =$	6750
Métal	$2 \times 60 \times 13 \times 26 = 360$		$\times 26 =$	9360
		Section 810	Moment	16110

La distance de la fibre neutre à l'axe OO′ sera donc :

$$\frac{16110}{810} = 20 \text{ environ.}$$

Le moment d'inertie de la section hachurée a pour valeur, par rapport à OO′

$$I = \frac{15 \times \overline{20}^3}{3} \times \frac{15 \times \overline{10}^3}{3} + \frac{120}{3}\left(\overline{7,5}^3 - \overline{4,5}^3\right)$$

$$I = 58230.$$

On aura donc

$$S_y = \frac{10112 \times l}{58230} \int_y^v y \Delta F.$$

D'où :

1° *Effort de cisaillement le long de la fibre neutre et par unité de section.* Pour

$$l = 1 ; \qquad \Delta F = a dy$$

$$\int_y^v y \Delta F = \int_0^{20} y a dy = a \int_0^{20} y dy = 200 a$$

ou

$$S_y = \frac{10\,112 \times 200\,a}{58\,230}$$

et par unité de section

$$S_y = \frac{10\,112 \times 200}{58\,230} = 34^{kg},73.$$

2° *Effort de cisaillement le long de l'armature métallique.* — On a en négligeant le béton tendu qui se trouve au-dessus de cette armature, omission qui ne dénature pas ici les éléments du problème, mais se borne à présenter plus de sécurité ;

$$\Delta F = 120\,dy \text{ (section d'armature transformée)},$$

d'où

$$\int_y^v y\Delta F = 120 \int_0^3 y dy = 120 \times \frac{3^2}{2} = 540$$

et comme la largeur de l'armature est de b

$$S_y = \frac{10\,112 \times 540}{58\,230 \times 6} = 15^{kg},63.$$

Comme il n'est pas prudent de dépasser pour la résistance au cisaillement du béton les 4/5 de sa résistance à l'extension, si l'on veut se donner une marge de sécurité de 4, 5 ou 6 contre la rupture $\left(\frac{4}{5} \times 20 = 16^{kg}\right)$, le taux de cisaillement ne devra pas dépasser $\frac{16}{4} = 4$ ou $\frac{16}{5} = 3,2$ ou $\frac{16}{6} = 2,67$.

Les valeurs ci-dessus sont donc inadmissibles et il y aura lieu de prévoir des armatures spéciales, attaches ou étriers.

Sans cette précaution, on aurait à craindre soit un glissement de l'armature dans sa gaine de ciment, soit une ligne de rupture oblique vers la fibre neutre. La direction de cette ligne de rupture serait donnée par celle de la composante des efforts de cisaillement et d'extension qui sera étudiée dans les paragraphes suivants.

On a vu par les exemples précédents que les efforts de cisaillement atteignaient parfois des valeurs dangereuses dans les parties des pièces en ciment armé situées immédiatement entre les armatures et la fibre neutre. Il convient donc de renforcer ces régions.

Le procédé le plus simple consiste à y prévoir une armature verticale ou oblique, destinée à résister aux efforts de glissement, tel un clou enfoncé dans des pièces de bois superposées, s'opposant à leur séparation aussi bien verticalement qu'horizontalement.

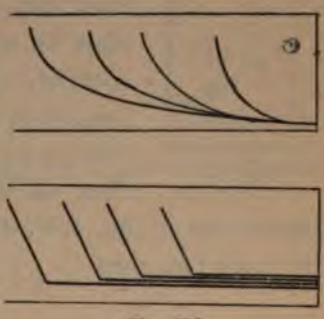


Fig. 153

Il résulte de ce qui précède que les armatures seront d'autant plus efficaces que leurs liaisons avec les différents éléments de la pièce seront plus intimes. Le maximum d'effet sera atteint par l'armature horizontale se divisant en plusieurs éléments recourbés vers le haut (fig. 153).

Nombreux sont les systèmes dont il a été donné quelques exemples dans le livre II. Ed. Coignet emploie des fers ronds de 4 ou 6 millimètres présentés sous forme d'U sous la barre tendue, et tordus contre la barre de compression pour se retourner ensuite vers le bas (Voir fig. 23, p. 122).

Hennebique emploie des fers plats en U, qu'il nomme étriers libres et dont les branches repliées se perdent dans le hourdis (Voir fig. 34 et 35, p. 128).

Le système Perraud et Dumas a recours des feuillards s'enroulant deux fois sur la barre tendue, et chaque branche obliquement orientée se replie sur une tringle correspondante située dans la partie comprimée (Voir fig. 42 et 42bis, p. 130 et 131).

99. Mode de calcul des attaches ou étriers. — Le calcul des attaches ou étriers pourra se faire d'après la méthode générale indiquée plus haut par la formule

$$S_y = \frac{Ql}{I} \int_y^v y \Delta F$$

soit par la formule simple trouvée pour l'effort de cisaillement le long de l'armature.

$$S_y = \frac{QnS}{2I}.$$

Négligeant complètement la résistance à l'extension du béton, ce que l'on peut faire, comme il a été dit plus haut, sans dénaturer les éléments du problème, mais en augmentant simplement la marge de sécurité, on suppose nulle cette résistance jusqu'à la fibre neutre, ce qui permet de considérer y comme la distance de cette fibre neutre à l'axe de la section de l'armature et on le remplacera par h' (fig. 154). On pourra remplacer aussi ΔF par f, de sorte que l'on aura

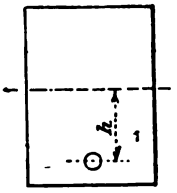


Fig. 154

$$Sy = \frac{Ql}{I} h'f,$$

formule qui permettra de déterminer la section totale f de l'armature quand on se sera fixé la limite S_y que l'on ne veut pas dépasser pour le taux de cisaillement du métal, $\frac{4}{5}$ de 10 kilogrammes par exemple, ou 8 kilogrammes par millimètre carré.

Connaissant f, on en déduira soit la section de chaque armature pour un écartement E donné, soit l'écartement E pour un profil de barre déterminé.

C'est ainsi que pour une valeur de $S_y = 8$ kilogrammes par exemple, on aura

$$8f = S_y = \frac{Ql}{I} h'S,$$

d'où

$E = l = \frac{8fI}{Qh'S}$ (Ecartement $l = E$ des armatures travaillant à 8 kilogrammes et de section f).

$f = \frac{Qlh'S}{8E}$ (Section des armatures écartées de E et travaillant à 8 kilogrammes).

Le moment d'inertie assez pénible à calculer peut être remplacé par la formule $I = SHH'$ (Voir p. 402). Et calculant l'effort de cisaillement pour une longueur $l = H$, on a :

$$S_y = \frac{QH}{fHH'} h'S = \frac{Qh'S}{fH'},$$

f étant la section totale des attaches, R l'effort que l'on entend leur faire supporter, et si l'on pose

$$h'S = \frac{fH}{2},$$

ce que l'on peut faire sans erreur grave, on a pour une longueur $l = E$ (écartement des attaches)

$$\frac{H}{E} fR = S_y = 2Q,$$

d'où

$$E = \frac{HfR}{2Q},$$

formule qui se rapproche beaucoup des formules usitées par certains constructeurs.

Hennebique. $E = \frac{Hf \times 10}{Q}$ (1)

Ed. Coignet. $E = \frac{Hf \times 15}{Q}$.

On pourra donc se servir de l'une de ces relations, avec une approximation suffisante, et une très grande commodité de calcul.

Remarque. — En examinant de près le rôle des attaches ou étriers, au point de vue de la transmission des efforts de glissement et par suite de l'effort d'extension qui résulte du moment de l'armature, on se rend compte des rôles bien différents que ces attaches sont appelées à jouer, suivant qu'elles se bornent à

(1) Q étant ici la moitié de l'effort tranchant.

entourer l'armature ou qu'elles sont liées avec elles d'une façon invariable. Dans le premier cas elles ne paraissent jouer d'autre rôle que d'intéresser tout le béton qui enveloppe l'armature à l'effort de glissement, en augmentant les surfaces travaillant à l'adhérence. Dans le second cas l'attache intervient par sa résistance propre. S'il en est ainsi, ce genre d'attaches pourrait à section moindre rendre les mêmes services que le premier genre et produire cependant encore un résultat plus efficace.

Efforts maxima dans des directions obliques. — En dehors des efforts normaux de compression et d'extension, des efforts de glissement, étudiés plus haut, il se développe encore d'autres efforts dans la matière.

Considérons en effet un prisme infiniment petit (fig. 155) ayant l'unité de longueur, comme hauteur et dont la base serait un triangle rectangle ABC découpé dans la poutre de façon à ce que la face verticale AB soit prise dans une section normale à l'axe de cette poutre. Les faces AB et BC sont soumises à des efforts qui ont été déterminés dans les chapitres précédents. La face AB supporte un effort normal R provenant du moment fléchissant et un effort parallèle S provenant de l'effort tranchant; la résultante P de ces deux forces aura une direction inclinée, et passera comme R par le milieu de AB. La face BC ne supportera qu'un effort parallèle à S. Soit M le point d'intersection des forces P et S' et Q leur résultante. Pour que le prisme soit en équilibre, il faut que la face AC soit soumise à une force égale à Q et de sens contraire ; il faut de plus qu'elle passe par le milieu de AC ; ces conditions permettent de la déterminer.

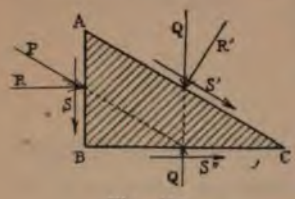


Fig. 155

Ces quelques considérations montrent tout d'abord qu'il faut, pour qu'il y ait équilibre à l'intérieur d'une poutre soumise à l'action d'un moment fléchissant et d'un effort tranchant, qu'il s'y développe un effort bien déterminé, en chaque point de la matière, et sur chaque plan qui passe par ce point. L'angle que fait la force avec le plan est très variable, d'après la construction précédente.

Cette force peut se décomposer en deux autres, une normale et une parallèle à la face AC; on pourra déterminer cette force et ces deux résultantes, en opérant comme il est dit ci-dessus, ou au moyen de la construction suivante, d'après Tetmayer [1] (fig. 156).

Construisons le polygone des forces, en les portant bout à bout et parallèlement à elles-mêmes R, S, S', (voir fig. 156); puis menons des extrémités A et D des parallèles AE et DE aux directions des forces cherchées R', C'; la force normale sera égale à AE et la force parallèle à DE; cette double condition est nécessaire pour que ces différentes forces soient en équilibre.

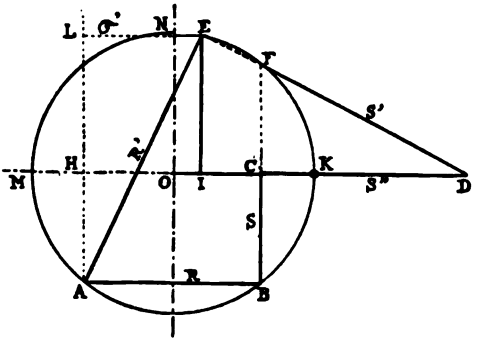


Fig. 156

Prolongeons BC jusqu'à sa rencontre avec ED en F; les deux triangles semblables CFD, ABC donnent:

$$\frac{CD}{CF} = \frac{BC}{AB} = \frac{S'}{S};$$

or comme CD = S', il en résulte que CF = S, quelle que soit l'inclinaison de la face considérée, AC.

Faisons passer un cercle par les points ABF; ce cercle passera aussi par le point E, puisque le quadrilatère ABFE est rectangle en B et en E. Ce cercle qui est constant pour des forces données R et S est donc le lieu des points E.

Abaissons de E une perpendiculaire sur CD, une autre sur AL;

[1] *Die Baumechanik*, Zürcher et Favres, éditeurs à Zurich.

les deux longueurs déterminées par ces droites représentent les efforts par unité de section qui s'exercent sur la face AC.

La longueur EI représente l'effort de glissement unitaire et EL l'effort normal unitaire ; en effet la similitude des triangles EID et ABC, donne

$$\frac{EI}{AB} = \frac{ED}{AC};$$

et comme AB = 1 par hypothèse, que ED = S′ par construction, on en déduit

$$EI = \frac{S'}{AC}.$$

De même la similitude des triangles AEL et ABC, donne

$$\frac{EL}{AB} = \frac{EA}{AC}.$$

D'où

$$EL = \frac{1 \times R'}{AC}.$$

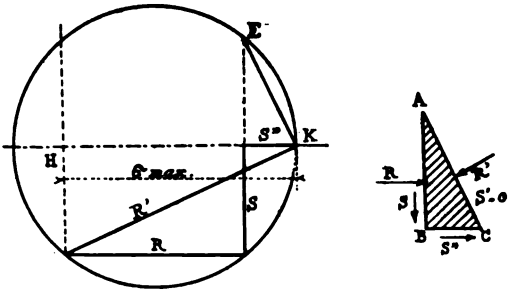


Fig. 157

Cette construction permet de déterminer très facilement les directions des plans passant par le point B qui supportent les efforts normaux ou de cisaillement, maxima ou minima.

L'effort normal unitaire R′ sera maximum quand le point E tombera en K (fig. 157), soit pour un plan parallèlle à EK. Sa valeur représentée par KH a pour mesure

$$\frac{R}{2} + OH = \frac{R}{2} + \sqrt{\frac{R^2}{4} - S^2}.$$

L'effort de cisaillement est nul suivant cette direction.

L'effort unitaire σ sera minimum, quand le point E tombera en M (fig. 158), soit pour un plan parallèle à EM ; il a pour valeur

$$MH = \frac{R}{2} - \sqrt{\frac{R^2}{4} - S''^2}.$$

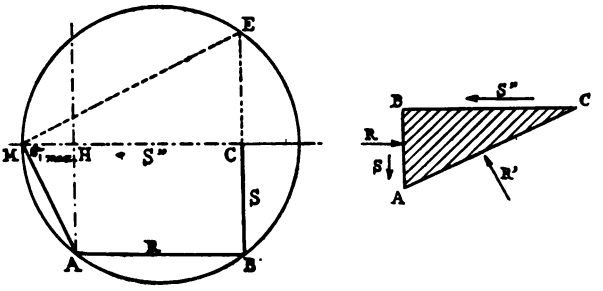


Fig. 158

L'effort de cisaillement le long de cette direction est nul.

Les constructions ci-dessus montrent que ces deux directions de plan sont perpendiculaires entre elles.

Les efforts de cisaillement maxima se produiront quand le point E tombera en N (fig. 159). On a alors

$$\sigma' = \sqrt{\frac{R^2}{4} - S'^2}.$$

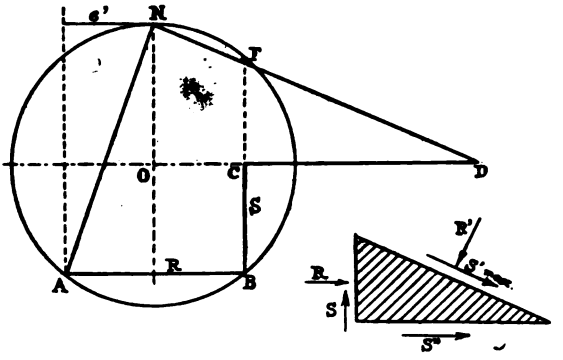


Fig. 159

Les efforts de cisaillement minima se produiront quand E tombera en R (fig. 160) ; ils auront pour valeur

$$OR = \sigma' = -\sqrt{\frac{R^2}{4} - S'}.$$

Il est facile de voir que dans les fibres extrêmes où les efforts de cisaillement sont nuls, les efforts normaux maxima sont parallèles à la fibre neutre, de même que vers la fibre neutre les directions de ces efforts font un angle de 45° avec cette fibre.

Il est facile de voir également que les directions de plans suivant lesquelles les efforts de cisaillement sont maxima forment un angle de 45° avec l'axe neutre dans les fibres extrêmes et qu'ils lui sont au contraire parallèles à la hauteur de cet axe.

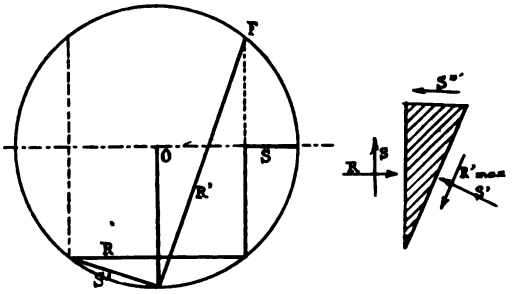


Fig. 160

Si on trace pour une série de points très rapprochés les directions suivant lesquelles ces efforts sont maxima et que l'on joigne ces directions de manière à former une courbe continue, on obtient les courbes du plus grand effort normal ou du plus grand effort de cisaillement (Voir p. 98).

Ces courbes ne présentent pas un très grand intérêt, les maxima se produisant toujours en des lieux bien déterminés, soit dans les fibres extrêmes (effort normal), soit à la fibre neutre (effort de cisaillement). Il semble cependant qu'il y aurait lieu, quand cela est possible, de disposer les armatures verticales de telle sorte qu'elles soient normales aux lignes suivant lesquelles s'exercent les plus grands efforts d'extension.

CHAPITRE VI

CALCUL DES FLÈCHES

100.— Il a été donné (p. 86) une méthode tout à fait générale pour calculer la déformation d'une poutre en béton, dans laquelle les efforts dépassent la limite d'élasticité du béton à l'extension, ou à la fois du béton à l'extension et à la compression.

Par suite de sa généralité, cette méthode peut s'appliquer à l'étude de la déformation des ouvrages en ciment armé, sans aucune modification. Il suffira de remplacer dans ces formules, l'effort R_t du béton tendu par l'effort maximum du béton comprimé et la distance at de la fibre considérée à la fibre neutre par la distance v de la fibre extrême du béton comprimé à cette dernière. On aura alors :

$$\text{Déformation angulaire d'un élément } \Delta(\delta) = \frac{R_c dl}{Ev}$$

$$\text{Déformation angulaire totale } \int_x^{x_h} \frac{R_c dl}{Ev}.$$

Déplacement horizontal d'un point x_h, y_h, relié d'une manière invariable à un élément dont le centre a pour coordonnées x et y

$$(y_h - y)\frac{R dl}{Ev}.$$

Déplacement horizontal total d'un point sous l'action des moments s'exerçant entre les ordonnées y et y_h

$$\Delta x_h = \int_y^{y_h} (y_h - y)\frac{R dl}{Ev}.$$

Déplacement vertical d'un point $x_h y_h$ relié d'une manière invariable au centre de gravité x, y d'un élément dl

$$(x_h - x)\frac{Rdl}{Ev}.$$

Déplacement vertical total d'un point, sous l'action des moments s'exerçant entre les points x, y et $x_h y_h$

$$\Delta y_h = \int_x^{x_h} (x_h - x)\frac{Rdl}{Ev}.$$

Pour calculer ces diverses quantités, on divise la poutre en une série d'éléments ; on détermine pour chacun d'eux, le centre de gravité et sa distance v à la fibre extrême, puis l'effort maximum R de compression dans le béton et on calcule les expressions $\frac{Rdl}{Ev}$, dl étant la largeur de l'élément considéré. Les expressions $\frac{Rdl}{Ev}$, seront assimilées à des forces appliquées au centre de gravité de chaque élément ; elles seront supposées horizontales quand on voudra déterminer un déplacement horizontal, et verticales quand on voudra déterminer un déplacement vertical. On calcule les moments fléchissants que produisent ces quantités, sur la poutre, comme si elles étaient des charges réelles appliquées aux points considérés. Ces moments ne sont autre chose que les déplacements cherchés.

Applications. — Une dalle de $0^m,10$ d'épaisseur, $0^m,60$ de largeur et 2 mètres de portée est chargée en son milieu d'un poids $P = 800$ kilogrammes. Cette dalle est exécutée avec un mélange courant, son armature est à $0^m,030$ de l'arête inférieure ; elle est constituée par 6 barres de 8 millimètres (fig. 161).

On demande la flèche produite par cette force P.

On a en se rapportant aux notations de la page 349

$$u = \frac{3}{10} = 0,30$$

$$p = \frac{6 \times \pi \times \frac{\overline{0,8}^2}{4}}{60 \times 10} = 0,5\ \%.$$

Déterminons les moments produits par cette force

$$m = \frac{Pl}{4} = \frac{800 \times 200}{4} = 40\,000 \text{ kg.cm.}$$

et traçons la courbe correspondante. Divisons la portée en 8 parties égales ; les moments moyens qui se produisent dans chacune de ces parties sont indiqués au tableau suivant. En divisant ces moments par le produit $c^2b = 10 \times 10 \times 60 = 6000$, on obtient le moment unitaire correspondant. Une simple lecture du tableau indiquera l'effort correspondant pour le pourcentage donné ;

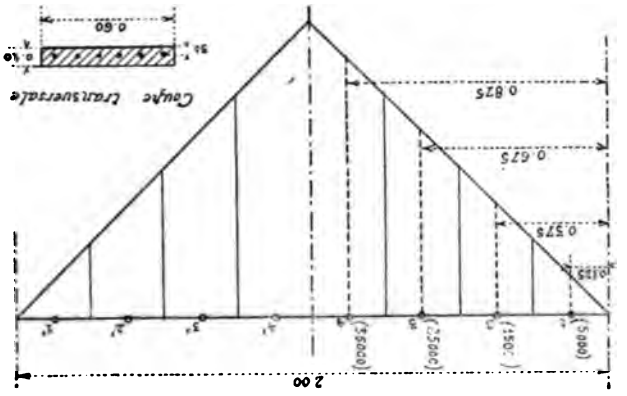


Fig. 161

cet effort est inscrit à la colonne 3. Supposons pour simplifier les calculs que le produit Ev soit constant et égal à $\frac{Eh}{2} = 100\,000 \times \frac{10}{2}$. L'équation générale donnant la flèche au milieu

$$\Delta y_b = f = \sum_0^{\frac{l}{2}} x \frac{R\,dl}{Ev}$$

devient (pour $dl = 25$)

$$f = \frac{25}{500\,000} \sum_0^{\frac{l}{2}} xR = \frac{1}{20\,000} \sum_0^{\frac{l}{2}} xR.$$

La quantité entre parenthèses a été calculée par une série de sommations dans le tableau suivant, par les procédés indiqués (§ 53) en remarquant, comme il a été dit, qu'il faut considérer les

quantités $\Sigma x R$ comme des forces et faire par suite intervenir la réaction sur appuis avec son signe.

Numéros des divisions	Moments fléchissants M	Moments unitaires $\frac{M}{c\varepsilon l} = m$	Efforts correspondant aux moments m	Abscisses x du milieu de chaque division	xR
	1	2	3	4	5
	kg. cm.		R		
1	5 000	0,828	4,5	12,5	56
2	15 000	2,500	12,0	37,5	450
3	25 000	4,167	19.5	62,5	1 220
4	35 000	5,825	40,0	87,5	3 500
			Réaction sur appui.		5 226

On aura finalement

$$f = \frac{5226}{20000} = 0{,}26 \text{ cm.} = 2^{\text{mm}},6.$$

Une poutre rectangulaire dont la section est représentée (fig. 162) *reçoit à son milieu une charge concentrée de* 500 *kilogrammes ; sa portée est de* 5 *mètres, elle est exécutée avec les mélanges usuels ; les armatures inférieures et supérieures sont constituées chacune par* 2 *fers ronds de* 16 *millimètres dont la section totale est* $2 \times 2{,}01 = 4{,}02$, *on demande la flèche prise par cette poutre ?*

On a

$$p = \frac{4{,}02}{200} = 2\,\% \text{ et } \beta = 1.$$

Le moment fléchissant au milieu de la poutre est

$$m = \frac{500 \times 500}{8} = 62500 \text{ kilog.centimètres.}$$

La courbe des moments correspondants est représentée au graphique 162.

Divisons la poutre en 10 parties égales, on aura $\Delta l = 0^{\text{m}},50$. Les moments qui se produisent au milieu de chaque division, mesurés

sur l'épure, sont inscrits sur la figure. On aura en supposant comme précédemment

$$Ev = \frac{Eh}{2} = 100\,000 \times 10 = 1\,000\,000$$

$$f = \frac{50}{1\,000\,000} \sum_0^{\frac{l}{2}} xR = \frac{1}{20\,000} \sum_0^{\frac{l}{2}} xR.$$

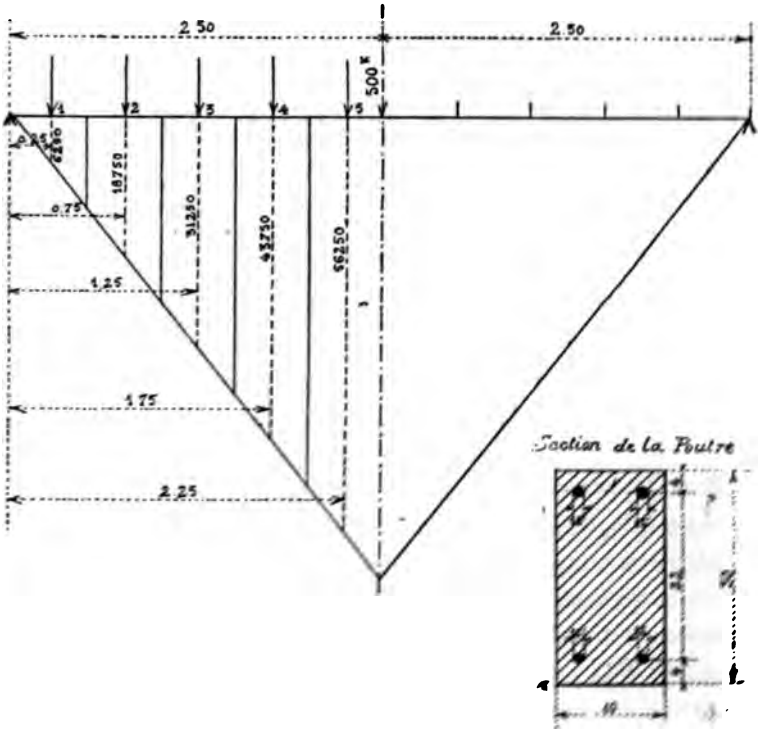


Fig. 172

où (dans la somme ΣxR) sont comprises les réactions sur appuis.

Les efforts R ont été mesurés en calculant tout d'abord le moment unitaire correspondant au moment considéré

$$m = \frac{M}{10 \times 25^2} = \frac{M}{62500}$$

et en mesurant l'effort correspondant sur le graphique. Les abscisses x sont indiquées sur l'épure.

La flèche maximum sera par suite

$$\frac{22130}{20000} = 1^{cm},107 = 11^{mm},07.$$

Numéros des divisions	Moments fléchissants m	Moments unitaires $\frac{M}{4000}$	Efforts correspondant aux moments unitaires	Abscisses x	xR
			R		
1	6250	1,56	5,0	25	125
2	18750	4,68	14,5	75	1088
3	31250	7,81	25,6	125	3200
4	43750	10,94	37,6	175	6580
5	56250	14,06	49,5	225	11138
			Réaction sur appui.		22131

101 *Efforts composés.* — Le principe de la superposition des forces : — « L'effort total produit sur une pièce par une série d'efforts divers est égal à la somme algébrique des efforts produits par chacun d'eux » ne s'applique pas d'une manière rigoureuse aux constructions en ciment armé, car les efforts que ces pièces supportent dépassent généralement la limite d'élasticité. Considérons par exemple, une pièce fléchie et tendue, nous avons vu que l'effort d'extension supporté par le béton ne dépasse jamais une certaine limite et qu'à cette limite la matière peut continuer à s'allonger sans supporter d'efforts supplémentaires. Par conséquent, si elle supporte déjà par suite de la flexion, cet effort limite, l'extension ne produira aucun accroissement d'effort dans cette partie de la section. Il y aura donc lieu de n'employer la règle ci-dessus qu'avec beaucoup de circonspection et de se rendre compte chaque fois de la grandeur des efforts avant de les ajouter ou de les soustraire, comme on le fait, quand le travail ne dépasse nulle part la limite d'élasticité.

Compression et flexion. — La compression et la flexion sont les efforts composés les plus usuels ; on les rencontre réunis dans le calcul des pièces courbes soumises à des efforts locaux concentrés (tuyaux) et dans le calcul des arcs. C'est le seul cas que nous examinerons. L'action d'un moment et d'une force longitudinale

peut toujours être ramenée à l'action d'une force unique P. Soit A le point où cette force coupe la section CD (fig. 163). Supposons la poutre homogène et travaillant dans toutes ses fibres en-dessous de la limite d'élasticité. Les efforts maxima supportés par les fibres extrêmes C et D sont, en désignant par v_1 et v_2 les distances de ces fibres à l'axe neutre GG' et, en appliquant le principe de la superposition des efforts :

$$(1)\quad \begin{cases} 1^\circ \text{ Pour la fibre supérieure C } R_{max.} = \dfrac{N}{S} + \dfrac{Nav_1}{I} \\ 2^\circ \text{ Pour la fibre inférieure B } R_{min.} = \dfrac{N}{S} - \dfrac{Nav_2}{I} \end{cases}$$

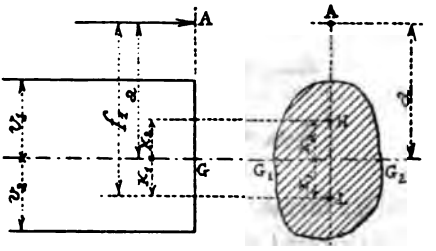


Fig. 163

où N représente la composante horizontale de l'effort P ; a la distance du point A à l'axe GG', S la surface de la section AB et I son moment d'inertie pris par rapport à l'axe de gravité GG'. Les efforts σ varient suivant les ordonnées de la ligne A'B'. Posons(¹)

$$(2)\quad \begin{cases} K_2 = \dfrac{I}{Sv_2} \\ K_1 = \dfrac{I}{Sv_1}. \end{cases}$$

D'où en remplaçant dans les équations (1)

$$R_{max.} = N\left(\frac{1}{S} + \frac{a}{Sk_1}\right) = N\frac{(a + k_1)}{Sk_1}$$

$$R_{min.} = N\left(\frac{1}{S} - \frac{a}{Sk_2}\right) = -N\frac{(a - k_2)}{Sk_2}$$

(¹) Les quantités K représentent les distances du noyau central de la fibre neutre. Le noyau central est la surface déterminée par les axes neutres correspondant à des efforts s'exerçant sur le pourtour de la section considérée. Au point de vue géométrique, le point L est l'antipole du point C par rapport à l'ellipse centrale d'inertie ; de même le point H est l'antipole du point D par rapport à la même ellipse.

Les quantités $(a + k_1)$ et $(a - k_2)$ représentent les distances de la force N aux antipoles des fibres dont on veut déterminer l'effort (fig. 164) et les quantités $N(a + k_1)$ et $N(a - k_2)$ les moments de la force N par rapport aux mêmes points : Posons

$$a + k_1 = f_1 \quad \text{et} \quad a - k_2 = f_2$$

$$(3) \qquad \begin{cases} R_{max.} = \dfrac{Nf_1}{Sk_1} \\ R_{min.} = -\dfrac{Nf_2}{Sk_2} \end{cases}$$

ou en remplaçant k_1 et k_2 par leur valeur

$$(4) \qquad \begin{cases} R_{max.} = \dfrac{Nf_1v_1}{I} = M\dfrac{v_1}{I} \\ R_{min.} = \dfrac{Nf_2v_2}{I} = M\dfrac{v_2}{I}. \end{cases}$$

Sous cette dernière forme, nous voyons que *les efforts dans les fibres extrêmes s'obtiennent en divisant le moment des forces extérieures* (N*f*) *pris par rapport à l'antipole le plus éloigné par le moment de résistance de la section* $\left(\frac{I}{v}\right)$.

Les valeurs de k se déterminent à l'aide des formules 2 ; mais comme celles-ci supposent la valeur de I connue et que cette valeur dépend de la valeur de R, il faudra procéder par approximation. Le procédé le plus simple, consistera à donner à k une valeur arbitraire comprise entre 0,15 et 0,35 h par exemple et à achever les calculs avec cette valeur, quitte à recommencer l'opération si la valeur réelle de k diffère notablement de celle adoptée au début de l'opération.

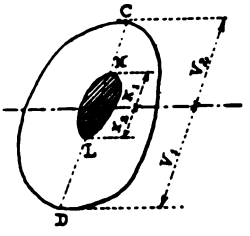


Fig. 164

Pour une section rectangulaire, faiblement armée à sa partie inférieure, k sera très voisin de 0,15 h ; pour une section en T fortement armée à sa partie inférieure, k se rapprochera de 0,35 h.

LIVRE IV

FORMULES SIMPLIFIÉES

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

CHAPITRE PREMIER

DALLES $R_t = 20$

102. — Il a été donné dans le chapitre précédent les formules rationnelles qui régissent le calcul des dalles et poutres en ciment armé. Ces formules ont été l'objet de simplifications algébriques de nature à en faciliter l'usage ; en outre diverses applications en ont été faites de manière à familiariser les ingénieurs avec les notations et les unités proposées.

Mais, bien que déjà simplifiées, ces formules peuvent être encore trouvées d'une manipulation trop laborieuse pour les bureaux techniques chargés de l'élaboration des projets. D'autre part, si elles sont encore admissibles pour la vérification des dimensions choisies arbitrairement, ou données par des formules empiriques plus simples, elles ne permettent de déterminer les dimensions les plus avantageuses qu'à l'aide de longs tâtonnements.

Le présent chapitre - supprimer ces tâtonnements en faisant disparaître causent, grâce

103. Calcul des dalles minces. — *Hypothèses admises.* — On considérera comme dalles minces celles dont l'épaisseur est inférieure à 10 centimètres. Ces dalles seront supposées armées uniquement vers la partie tendue. On admettra en outre une valeur de 0,300 pour u, distance relative de l'axe des armatures à la face tendue. C'est ainsi que dans une dalle de 8 centimètres, la distance ci-dessus mentionnée sera égale en valeur absolue à $0{,}300 \times 8 = 2^{cm},4$.

Application aux équations générales. — Les équations générales trouvées p. 367

$$(1 + 2\varphi + \varphi^2)\, x^2 - 2(1 + \varphi + \varphi^2 + np)x + 1 + \varphi^2 + 2npu = 0$$

$$m = R_c\left[\frac{(1-x)^2}{3} + np\,\frac{(x-u)^2}{1-x} + \varphi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{\varphi^2}{6}(1-x)^2\right]\right]$$

deviennent en remplaçant φ par les valeurs admises ci-dessus n par 20 et u par 0,300.

$$\text{I}\quad \begin{cases} 2{,}019x^2 - 2(1{,}598 + 20p)x + 1{,}177 + 2 \times 20 \times 0{,}300p = 0 \\ m = 47^{kg},5\left[\text{A} + 20p\text{B} + 0{,}421(\text{C} - 0{,}0886\text{A})\right] \end{cases}$$

si l'on convient de désigner par A, B, C, les facteurs respectifs

$$\frac{(1-x)^2}{3} = \text{A}\,; \qquad \frac{\overline{x - 0{,}3}^2}{1-x} = \text{B}\,; \qquad \frac{x^2}{2} = \text{C}.$$

$$\text{II}\quad \begin{cases} 2{,}33x^2 - 2(1{,}803 + 20p)x + 1{,}277 + 2 \times 20 \times 0{,}300p = 0 \\ m = 38^{kg}\left[\text{A} + 20p\text{B} + 0{,}526(\text{C} - 0{,}1385\text{A})\right] \end{cases}$$

$$\text{III}\quad \begin{cases} 2{,}66x^2 - 2(2{,}03 + 20p)x + 1{,}40 + 2 \times 20 \times 0{,}300p = 0 \\ m = 31^{kg},67\left[\text{A} + 20p\text{B} + 0{,}631(\text{C} - 0{,}2\text{A})\right]. \end{cases}$$

Se donnant alors diverses valeurs de p comprises entre 0,0025 et 0,0400, c'est-à-dire des pourcentages variant de 1/4 à 4 %, on calculera aisément les valeurs de x ainsi que celles de m qui leur correspondent.

Pour se rendre compte de la valeur économique de tel ou tel pourcentage, on estimera le prix d'un mètre carré de dalle (à l'épaisseur fictive de 10 centimètres) sur la base de 80 francs le mètre cube de béton complètement mis en œuvre (confectionné,

appliqué, pilonné, y compris les frais de cintrage, les frais généraux et le bénéfice de l'entrepreneur. On estimera de même à $0^{fr}.30$ le centimètre carré d'armatures principales sur 1 mètre de longueur, ajoutant une constante de 2 centimètres carrés pour les armatures secondaires, barres de répartition, dont on verra plus loin l'utilité. Divisant alors ce prix par le nombre de kilogrammètres m trouvé, on aura l'*indice économique* de résistance de la dalle projetée, ou si l'on veut le prix de 100 kilogrammètres de résistance.

Il suffit d'appliquer ces principes aux équations ci-dessus pour obtenir les résultats consignés au tableau suivant.

Dalles minces

$n = 20$; $u = 0,300$; $R_t = 20$ kilogrammes

à une seule armature (partie tendue)

	Pourcentages p	Position de la fibre neutre x	Résistance unitaire m	Prix d'une dalle de $1^{mq},\times 0,10$ F	Indice économique $\frac{F}{m}$	Taux de travail de l'armature R_F
				F		$950 \times \frac{x-0,3}{1-x}$
I Coefficient de sécurité 2	0,0025	0,554	6,45	9,35	1,45	5,41
	0,0050	0,533	6,72	10,10	1,50	4,74
	0,010	0,502	7,08	11,60	1,64	3,85
$R_c = 47^k,50$	0,020	0,467	7,48	14,60	1,95	2,88
$\varphi = 0,421$	0,040	0,419	7,83	20,60	2,63	1,95
						$760 \times \frac{x-0,3}{1-x}$
II Coefficient de sécurité 2,5	0,0025	0,528	5,61	9,35	1,67	3,66
	0,0050	0,511	5,76	10,10	1,75	3,28
	0,0100	0,486	5,97	11,60	1,94	2,75
$R_c = 38^k$	0,0200	0,453	6,22	14,60	2,35	2,12
$\varphi = 0,526$	0,040	0,414	6,42	20,60	3,21	1,48
						$633,33 \times \frac{x-0,3}{1-x}$
III Coefficient de sécurité 3	0,0025	0,510	4,96	9,35	1,89	2,72
	0,0050	0,497	5,05	10,10	2,00	2,48
	0,0100	0,476	5,17	11,60	2,24	2,13
$R_c = 31^k,67$	0,0200	0,446	5,31	14,60	2,75	1,67
$\varphi = 0,631$	0,040	0,412	5,43	20,60	3,80	1,21

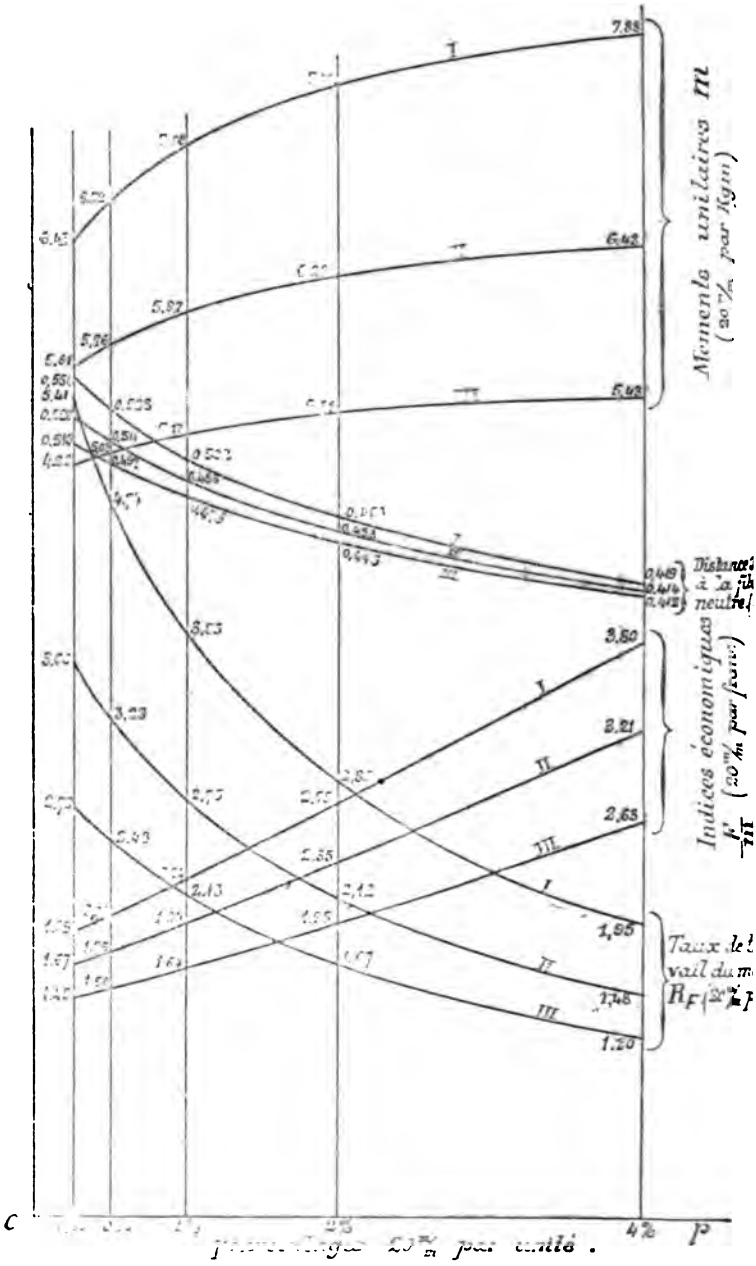

Moments unitaires m
(20 m/m par Kgm)
Indices économiques
Taux de
vail du m
7,88
6,42
5,42
3,80
3,21
2,63
1,95
1,48
1,20
2%
4%
p

Fig. 165

:amen de ce tableau conduit aux observations suivantes :
aurait intérêt à prévoir le plus faible pourcentage possible,
int de vue économique ; mais au point de vue pratique
,005 ou 1/2 % peut être considéré comme minimum. On
:quera également à combien peu s'élève le travail du métal.

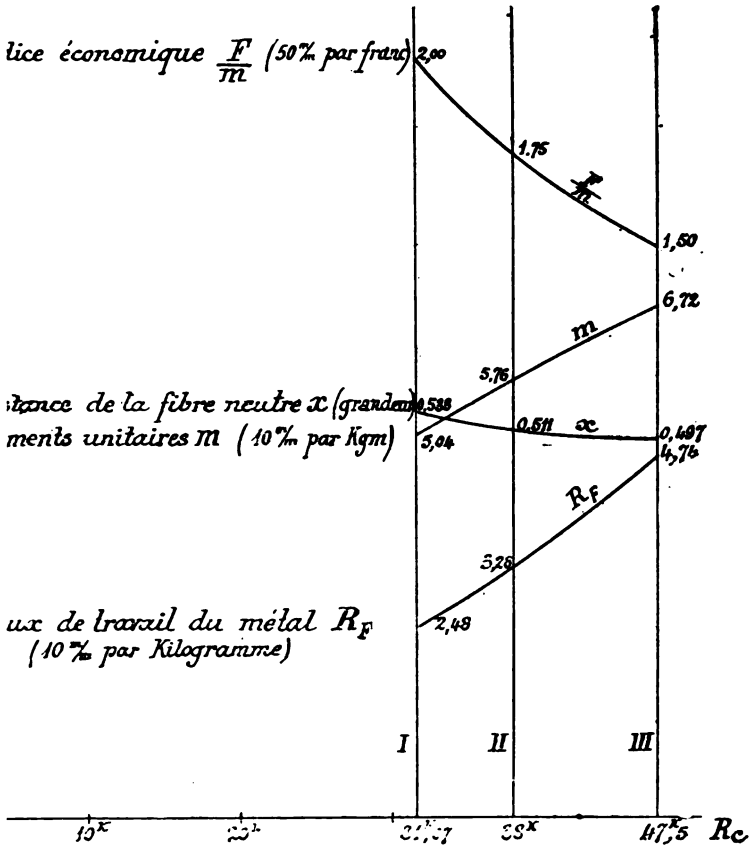


Fig. 166

: égal du fer et de l'acier doux, il n'y aurait donc aucune
ı de préférer telle ou telle nature de métal. On verra cepen-
lans un chapitre suivant qu'en vue de l'éventualité de fissures
ant la résistance à la tension du ciment, il y a lieu d'em-
r exclusivement l'acier doux. *On calculera donc les dalles de*

faible épaisseur, armées uniquement à la tension de 1/2 °/₀ sur base de

$$m_{\mathrm{I}} = 6{,}72\,; \qquad m_{\mathrm{II}} = 5{,}76\,; \qquad m_{\mathrm{III}} = 5{,}05,$$

et

$$x_{\mathrm{I}} = 0{,}533\,; \qquad x_{\mathrm{II}} = 0{,}511\,; \qquad x_{\mathrm{III}} = 0{,}497.$$

suivant qu'il s'agira d'un plancher d'habitation, d'une passere ou d'un pont de chemin de fer.

Il convient de compléter les renseignements donnés par tableau par les graphiques qu'ils permettent de construire.

Le graphique (fig. 165) donne les valeurs de x, m, $\frac{m}{F}$ et pour un pourcentage quelconque, dans chacune des pha I, II ou III.

Le graphique (fig. 166) donne ces mêmes valeurs pour le po centage de 1/2 °/₀ en fonction de R_c.

104. — Applications. — 1° *De quelle surcharge est capable dalle de* 0m08, *armée à la tension à raison de* 1/2 °/₀ *sur une por de* 2 *mètres* (1)?

$$\mathrm{I}\quad \begin{cases} M = 6{,}72\,h^2 = 6{,}72 \times \overline{8}^2 = 430 \text{ kilogrammètres} \\ \dfrac{(p+p') \times \overline{2}^2}{8} = 430 \text{ kilogrammètres} \\ p + p' = \dfrac{8 \times 430}{\overline{2}^2} = 860 \text{ kilogrammes} \\ p' = 0{,}08 \times 2500 = 200 \text{ kilogrammes} \\ p = 860 - 200 = 660 \text{ kilogrammes.} \end{cases}$$

$$\mathrm{II}\quad \begin{cases} M = 5{,}76\,h^2 = 5{,}76 \times \overline{8}^2 = 368^{\mathrm{kgm}},64 \\ p = \dfrac{8 \times 368{,}64}{\overline{2}^2} - 200 = 537^{\mathrm{kg}},28. \end{cases}$$

$$\mathrm{III}\quad \begin{cases} M = 5{,}05\,h^2 = 5{,}05 \times \overline{8}^2 = 323^{\mathrm{kgm}},20 \\ p = \dfrac{8 \times 323{,}20}{\overline{2}^2} - 200 = 446^{\mathrm{kg}},40. \end{cases}$$

(1) La dalle de 0,08 armée à raison de 1/2 °/₀, soit $\frac{80000}{200} = 400$ millimètres ca ou par exemple de 8 × 50, ou 8 ronds de 8 millimètres par mètre.

2° *Déterminer une dalle devant supporter* 400 *kilogrammes de surcharge sur* 2^m,20 *de portée?*

On supposera *a priori* 200 kilogrammes de poids mort, quitte à rectifier cette hypothèse le cas échéant.

Charge totale

$$400 + 200 = 600.$$

$$M = \frac{600 \times \overline{2,20}^2}{8} = 363 \text{ kilogrammètres.}$$

I $$h = \sqrt{\frac{363}{6,72}} = 7,35$$

pour un pourcentage de 1/2 %.

On prendra 8 centimètres.

La section de l'armature sera en millimètres carrés par mètre courant,

$$\frac{73500}{200} = 367,5.$$

Si l'on fait choix de barres rondes de 8 millimètres, section 50 millimètres carrés, l'écartement à prévoir sera de

$$\frac{50}{367,5} = 0^m,136$$

II $$h = \sqrt{\frac{363}{5,76}} = 7,8 \text{ à } 1/2\ \%.$$

On prendra 8 centimètres.

La section de l'armature sera en millimètres carrés

$$\frac{78000}{200} = 890 \text{ millimètres carrés}$$

et si l'on fait choix de ronds de 8 millimètres, section 50 millimètres carrés l'écartement à prévoir sera :

$$\frac{50}{390} = 0^m,128.$$

III $$h = \sqrt{\frac{3,63}{5,05}} = 8,37 \text{ à } 1/2\ \%.$$

En prenant 9 centimètres d'épaisseur, on commet une erre sur le poids mort supposé de 200 kilogrammes au lieu de 225 ki grammes, mais cette erreur pourrait être corrigée par un nouve calcul.

Section de l'armature $\frac{83\,700}{200} = 419$ millimètres carrés.

Si l'on fait choix de ronds de 8 millimètres, section 50 mil mètres carrés, l'écartement à prévoir sera :

$$\frac{50}{419} = 0{,}119.$$

3° *On a fait choix d'une dalle de 8 centimètres pour une su charge vibrante de 1000 kilogrammes sur une portée de 1m,50 déterminer les armatures convenables?*

Charge totale $= 1\,000 + 0{,}08 \times 2500 = 1\,200$ kilogrammes.

$$M = \frac{1\,200 \times \overline{1{,}50}^2}{8} = 337^{kgm},50$$

$$m = \frac{337{,}50}{8^2} = 5{,}27.$$

Se reportant aux indications des tableaux ou des graphiques on trouve

$$\begin{array}{lll} m_{III} = 5{,}31 & \text{pour un pourcentage} & p = 0{,}02 \\ m_{III} = 5{,}17 & \quad » \qquad » & p = 0{,}01 \\ \hline \Delta = 0{,}14 & & \Delta = 0{,}01 \end{array}$$

D'où

$$p = 0{,}01 \left(1 + \frac{5{,}27 - 5{,}17}{0{,}14}\right) = 0{,}01715$$

La section de l'armature est donc :

$$80\,000 \times 0{,}01715 = 1\,372 \text{ millimètres carrés}$$

et si l'on fait choix de ronds de 12 millimètres, section 113 milli- mètres carrés, l'écartement à prévoir sera de

$$\frac{113}{1\,372} = 0{,}0815.$$

4° *Il a été prévu une dalle de 7 centimètres pour une surcharge libre de 500 kilogrammes sur une portée de* $1^m,80$; *de quel degré de sécurité jouit-on ?*

Charge totale $= 500 + 0,07 \times 2500 = 675$ kilogrammes

$$M = \frac{675 \times \overline{1,80}^2}{8} = 273^{kgm},38$$

$$m = \frac{273,38}{7^2} = 5,58.$$

Les tableaux et les graphiques précédents donnent

$m = 5,76$ pour un coefficient de sécurité de 2,5
$m = 5,04$ » » 3,00
$\Delta = 0,72$ $\Delta = 0,50$

Le coefficient de sécurité cherché a donc pour valeur

$$2,5\left(1 + \frac{5,76 - 5,58}{0,72}\right) = 2,75.$$

105. Dalles de forte épaisseur. — On désignera ainsi les dalles d'épaisseur supérieure à 10 centimètres et par suite les poutres rectangulaires de faible hauteur qui ne sont en définitive que des dalles étroites. Ces dalles pourront être armées des deux côtés. Ici il convient d'abaisser la valeur moyenne de u à 0,200. C'est ainsi que dans une dalle de 15 centimètres, l'axe des armatures sera supposée distante de $0,2 \times 15 = 3$ centimètres de la face voisine. La distance u' relative à l'armature comprimée sera prise égale à u', soit à 0,200 également.

Les équations générales précédentes [1] sont modifiées comme suit par l'introduction de l'armature comprimée. On rappellera que n a été pris égal à 20, et que l'on a posé $p' = \beta p$,

$$A = \frac{(1-x)^2}{3}; \quad B = \frac{(x-0,2)^2}{1-x}; \quad C = \frac{x^2}{2};$$

[1] $(1+2\varphi+\varphi^2)x^2 - 2(1+\varphi+\varphi^2+np+np')x + 1+\varphi^2+2np'+2npu-2np'u = 0$
d'où l'on fait

$$n = 20; \quad n' = p\beta \quad \text{et} \quad u = u' = 0,200.$$

enfin on ajoutera

$$D = \frac{(1 - x - 0,2)^2}{1 - x} = \frac{(0,8 - x)^2}{1 - x} :$$

$$\text{I} \begin{cases} 2,019x^2 - 2\left[1,598 + 20p(1 + \beta)\right]x + 1,177 + 8(1 + 4\beta)\,p = 0 \\ m = 47,5\left[A + 20p(B + \beta D) + 0,421(C - 0,0886A)\right] \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} 2,33x^2 - 2\left[1,803 + 20p(1 + \beta)\right]x + 1,277 + 8(1 + 4\beta)p = 0 \\ m = 38\left[A + 20p(B + \beta D) + 0,526(C - 01385A)\right] \end{cases}$$

$$\text{III} \begin{cases} 2,66x^2 - 2\left[2,03 + 20p(1 + \beta)\right]x + 1400 + 8(1 + 4\beta)p = 0 \\ m = 31,67\left[A + 20p(B + \beta D) + 0,631(C - 02A)\right]. \end{cases}$$

On a résolu ces équations pour divers pourcentages compris entre 1/4 et 4 % et diverses valeurs de β comprises entre 0 et 2, cette dernière limite n'ayant été prise en considération que pour saisir dans toute leur étendue les variations des valeurs de x, m, F, $\frac{F}{m}$, R_F et R'_F. Ces valeurs sont consignées dans les tableaux suivants :

Ces tableaux peuvent être appliqués dans toute leur généralité bien que les colonnes F et $\frac{F}{m}$ semblent ne répondre qu'à des dalles de $0^m,10$ d'épaisseur. En réalité les prix indiqués, multipliés par 10 donnent ceux du mètre cube de béton armé dans les divers cas.

On voit que les coefficients de travail limites ne sont dépassés ni pour le fer ni pour l'acier.

On observe en outre que les indices économiques deviennent de plus en plus désavantageux, au fur et à mesure que l'on augmente le pourcentage ; mais cette variation est toujours très faible et d'autant plus faible que la proportion β de métal comprimé est plus grande par rapport au métal tendu. Toutefois il y a lieu de remarquer, que la résistance unitaire m augmentant notablement avec le pourcentage, le poids mort diminue par cela même, ce qui constitue un bénéfice qui n'a pas été escompté dans l'évaluation des prix, parce qu'il varie avec le rapport de la surcharge libre avec le poids mort.

Dalles épaisses (coefficient de sécurité de 2)

$= 20$; $u = u' = 0{,}200$; $R_t = 20^k$; $R =_e 47^k{,}50$

à 2 armatures

	Pourcentage p	Position de la fibre neutre x	Résistance unitaire m	Prix d'une dalle de $0^m{,}10$ F	Indice économique F/m	Taux de travail de l'armature tendue R_F	Taux de travail de l'armature comprimée R'_F
						$9{,}50\,\frac{x-0{,}2}{1-x}$	$9{,}5\,\frac{0{,}8-x}{1-x}$
0	0,0025	0,345	6,75	9,35	1,39	7k,20	»
	0,0050	0,517	7,22	10,10	1,40	6, 25	»
	0,0100	0,478	7,81	11,60	1,48	5, 06	»
	0,0200	0,426	8,53	14,60	1,71	3, 74	»
	00,400	0,370	9,16	20,60	2,25	2, 56	»
,30	0,0025	0,552	6,85	9,57	1,40	7, 46	5k,26
	0,05	0 530	7,50	10,55	1,41	6, 67	5, 46
	0,010	0,500	8,54	12,50	1,47	5, 70	5, 70
	0,020	0,463	10,19	16,40	1,61	4, 65	5, 95
	0,040	0,426	13,00	24,20	1 83	3, 74	6, 22
,60	0,0025	0,559	6,97	9,80	1,41	7, 73	5, 19
	0,0050	0,542	7,76	11,00	1,42	7, 09	5, 35
	0,0100	0,520	9,17	13,40	1,46	6, 33	5, 54
	0,0200	0,495	11,71	18,20	1,55	5, 55	5, 74
	0,0400	0,471	16,48	27,80	1,69	4, 86	5, 91
1	0,0025	0,567	7,11	10,10	1,42	8, 05	5, 11
	0,0050	0,557	8,09	11,60	1,43	7, 66	5, 21
	0,010	0,544	9,96	14,60	1,47	7, 27	5, 33
	0,020	0,531	13,54	20,60	1,52	6, 70	5, 45
	0,020	0,519	20,50	32,60	1,59	6, 30	5, 55
2	0,0025	0,587	7,43	10,85	1,46	8, 90	4, 90
	0,0050	0,590	8,43	13,10	1,48	9, 04	4, 87
	0,010	0,593	11,65	17,60	1,51	9, 17	4, 85
	0,020	0,595	17,30	26,60	1,54	9, 26	4, 81
	0,040	0,598	28,72	44,60	1,55	9, 41	4, 77

tenant compte dans une certaine mesure de ce nouveau ce, on pourra recommander les pourcentages suivants pour 'erses valeurs de β.

(I) $R_e = 47^k{,}50$:

	$p = 0{,}005$	$x = 0{,}517$	$m = 7{,}22$	$R_F = 6{,}23$	$R'_F = 0$
0	$p = 0{,}005$	$x = 0{,}520$	$m = 7{,}50$	$R_F = 6{,}67$	$R'_F = 5{,}46$
0	$p = 0{,}010$	$x = 0{,}530$	$m = 9{,}17$	$R_F = 6{,}33$	$R'_F = 5{,}54$
	$p = 0{,}020$	$x = 0{,}531$	$m = 13{,}54$	$R_F = 6{,}70$	$R'_F = 5{,}45$

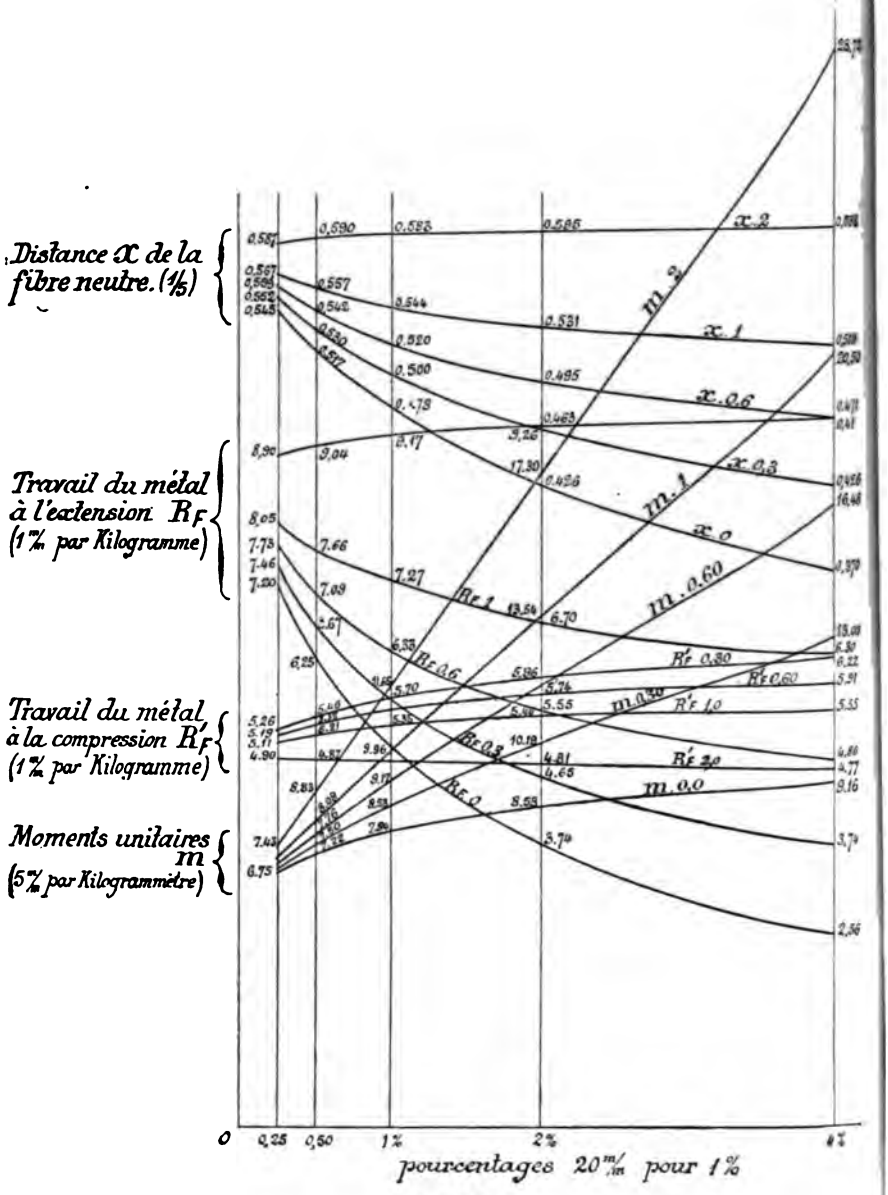

Distance x de la fibre neutre. (1/5)
Travail du métal à l'extension R_F (1 % par Kilogramme)
Travail du métal à la compression R'_F (1 % par Kilogramme)
Moments unitaires m (5 % par Kilogrammètre)
x 2
x 1
x 0,6
x 0,3
x 0
m 2
m 1
m 0,60
m 0,30
m 0,0
R_F 1
R_F 0,6
R_F 0,3
R_F 0
R'_F 0,30
R'_F 0,60
R'_F 1,0
R'_F 2,0
0
0,25
0,50
1 %
2 %
4 %
pourcentages 20 m/m pour 1 %

Fig. 167

Réduisant les applications des équations générales aux proportions choisies ci-dessus, on trouve pour les cas II et III.

$$\text{(II)} \quad R_e = 38^k \begin{cases} R_t = 20 \quad n = 20 \\ u = u' = 0{,}200 \end{cases}$$

$\beta = 0$	$p = 0{,}005$	$x = 0{,}498$	$m = 6{,}08$	$R_F = 4{,}51$	$R'_F = 0,$
$\beta = 0{,}30$	$p = 0{,}005$	$x = 0{,}510$	$m = 6{,}36$	$R_F = 4{,}81$	$R'_F = 5{,}50$
$\beta = 0{,}60$	$p = 0{,}010$	$x = 0{,}504$	$m = 7{,}65$	$R_F = 4{,}66$	$R'_F = 4{,}54$
$\beta = 1$	$p = 0{,}020$	$x = 0{,}520$	$m = 11{,}13$	$R_F = 5{,}07$	$R'_F = 4{,}45$

$$\text{(III)} \quad R_e = 31^k67 \begin{cases} R_t = 20 \quad n = 20 \\ u = u' = 0{,}200 \end{cases}$$

$\beta = 0$	$p = 0{,}005$	$x = 0{,}485$	$m = 5{,}30$	$R_F = 3{,}50$	$R'_F = 0$
$\beta = 0{,}30$	$p = 0{,}005$	$x = 0{,}496$	$m = 5{,}53$	$R_F = 3{,}72$	$R'_F = 3{,}82$
$\beta = 0{,}60$	$p = 0{,}010$	$x = 0{,}494$	$m = 6{,}59$	$R_F = 3{,}68$	$R'_F = 3{,}83$
$\beta = 1$	$p = 0{,}020$	$x = 0{,}512$	$m = 9{,}50$	$R_F = 4{,}05$	$R'_F = 3{,}74$

Les interpolations seront facilitées par le graphique (fig. 167) résumant les résultats indiqués par les tableaux précédents.

106. Applications. — 1° *On donne une dalle de* 16, *armée à raison de* 0,5 % *à la tension et de* 0,15 % *à la compression* (1) *de quelle surcharge* p *est-elle capable sur une portée de* 4 *mètres ?*

On a

$$\beta = \frac{0{,}15}{0{,}50} = 0{,}30$$

d'où

$$\text{I} \begin{cases} m = 7{,}50 \\ M = 7{,}50 h^2 = 7{,}50 \times \overline{16}^2 = 1\,920 \text{ kilogrammètres} \\ \text{Soit } p' \text{ le poids mort} = 2500 \times 0{,}16 = 400 \text{ kilogrammètres} \\ p + p' = \dfrac{8 \times 1\,920}{4^2} = 960 \text{ logrammes} \\ \quad - p' \qquad\qquad = 400 \text{ kilogrammes} \\ \text{D'où } p \qquad\qquad = 560 \text{ kilogrammes} \end{cases}$$

(1) Soit à la tension :
0,005 × 160000 = 800 millimètres carrés, environ 10 ronds de 10 millimètres
Soit à la compression :
0,0015 × 160000 = 267 millimètres carrés, environ 10 ronds de 6 millimètres.

$$\text{II}\begin{cases} m = 6{,}36 \\ M = 6{,}36h^2 = 6{,}36 \times \overline{16}^2 = 1\,628 \text{ kilogrammètres} \\ p + p' = \dfrac{8 \times 1\,628}{\overline{4}^2} = 814 \text{ kilogrammes} \\ \quad - p' \qquad\qquad = \underline{400} \text{ kilogrammes} \\ \quad p \qquad\qquad = 414 \text{ kilogrammes} \end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases} m = 5{,}53 \\ M = 5{,}53h^2 = 5{,}53 \times \overline{16}^2 = 1\,416 \text{ kilogrammètres} \\ p + p' = \dfrac{8 \times 1\,416}{\overline{4}^2} = 708 \text{ kilogrammes} \\ \quad - p' \qquad\qquad = \underline{400} \text{ kilogrammes} \\ \quad p \qquad\qquad = 308 \text{ kilogrammes} \end{cases}$$

2° *Déterminer une paroi de réservoir pouvant supporter indifféremment, sur une ou l'autre face, une surcharge de* 5 *mètres d'eau sur une portée de* 3 *mètres ?*

On aura recours à l'armature symétrique $\beta = 1$; $p = 0{,}02$; $m = 13{,}54$.

$$M = 5\,000 \times \frac{\overline{3}^2}{8} = 5\,625 \text{ kilogrammètres} = mh^2.$$

$$h = \sqrt{\frac{5\,625}{m}} = \sqrt{\frac{5\,625}{13{,}54}} = 20{,}40.$$

On prévoira 21 centimètres d'épaisseur, et cette paroi sera armée tant à la compression qu'à la tension de

$$204\,000 \times 0{,}02 = 4\,080 \text{ millimètres carrés.}$$

soit, par exemple, de 10 ronds de 23 millimètres de diamètre. Ces ronds sont supposés placés à la distance 21 u ou $21 \times 0{,}200 = 4{,}2$ des faces. Cette distance diminuée de l'espace occupé par les barres de répartition, 6 millimètres généralement, et du demi diamètre des directrices, 11,5, soit de 1,75, laisse encore au minimum 2,45 de mortier derrière les armatures. On peut donc rapprocher un peu plus des faces les armatures et bénéficier ainsi d'une nouvelle marge de sécurité.

3° *On dispose d'un hourdis de plancher de* 12, *armé par mètre de largeur, de* 12 *barres de* 8 *millimètres à la partie inférieure et de* 4 *barres de* 8 *millimètres à la partie supérieure. On demande les armatures supplémentaires qu'il y a lieu de prévoir pour que le hourdis prolongé en encorbellement de* 2 *mètres, soit capable d'une surcharge de* 400 *kilogrammes?*

Poids mort du hourdis de 12 : $0{,}12 \times 2500 = 300$ kilog.
Surcharge : 400 »
Charge totale : 700 »

$$M = \frac{700 \times 2^2}{2} = 1\,400 \text{ kilogrammètres.}$$

$$m = \frac{1\,400}{12^2} = 9{,}72.$$

12 ronds de 8^{mm}, section $50^{mmq} = 600$ millimètres carrés.

L'armature tendue du plancher, prolongée, devient l'armature comprimée de l'encorbellement, on posera donc : pourcentage $p' = \frac{600}{120\,000} = 0{,}005$.
Le tableau de la page 437 donne pour $\beta = 0{,}30$

$$\left.\begin{array}{l} p = 0{,}01 \\ p = 0{,}02 \end{array}\right\} \Delta p = 0{,}01 \; ; \qquad \left.\begin{array}{l} m = 8\,53 \\ m = 10{,}19 \end{array}\right\} \Delta m = 1{,}66.$$

On remarquera que pour $\beta = 0{,}30$, $p = \frac{p'}{\beta} = \frac{0.005}{0{,}30} = 0{,}0166$.
Interpolant les deux valeurs ci-dessus qui pour une différence $\Delta p = 1\ \%$, donne une différence $\Delta m = 1{,}66$, on a pour

$$\Delta p = 0{,}66 : \qquad \Delta m = 1{,}66 \times 0{,}66 = 1{,}10,$$

et par suite

$$m = 8{,}53 + 1{,}10 = 9{,}63,$$

valeur très proche de 9.72 cherchée.

L'armatnre supérieure de l'encorbellement devra donc comporter :

0,166 × 120 000 =	1 992	millimètres carrés.	
A déduire :	600	»	déjà prévus.
Reste à prévoir :	1 392	»	

On prendra 6 ronds de 18, section totale = 1 524 millimètres carrés que l'on intercalera 2 par 2 dans chaque intervalle de 0m,25 entre les barres supérieures de 8 millimètres.

CHAPITRE II

—

POUTRES RECTANGULAIRES

ARMATURES SYMÉTRIQUES
" DISSYMÉTRIQUES $\Big\}\ R_t = 20$

es poutres rectangulaires ne constituent qu'un cas particulier dalles de forte épaisseur, il serait donc superflu de revenir les méthodes de calcul proposées pour la détermination de rs dimensions, si les valeurs convenables à prendre pour u, ne éraient pas autant de celles qui ont été choisies pour les dalles. été pris en effet $u = 0{,}300$ pour des épaisseurs inférieures à entimètres et $u = 0{,}200$ pour des épaisseurs supérieures, mais nprises entre 10 et 20. Or pour des poutres rectangulaires de nde hauteur, cette valeur peut s'abaisser jusqu'à 0,050, et augnter ainsi considérablement le nombre de kilogrammètres dont nièce est capable. Ce nouvel examen de la question sera fait ncipalement dans le but de compléter les connaissances dévepées relatives à l'influence de la valeur de u et du pourcentage.

07. Armatures symétriques. — On désignera par armatures nétriques celles qui présentent la même section, à la compresn et à l'extension, autrement dit celles qui répondent à $\beta = 1$.)ans ce cas, les formules générales à appliquer sont :

$$\begin{cases} 2{,}019x^2 - 2(1{,}598 + 40p)x + 1{,}177 + 40p = 0 \\ m = 47{,}5\left[A + 20p(B + D) + 0{,}421(C - 0{,}0886A)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2{,}33x^2 - 2(1{,}803 + 40p)x + 1{,}277 + 40p = 0 \\ m = 38\left[A + 20p(B + D) + 0{,}526(C - 0{,}1385A)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2{,}66x^2 - 2(2{,}03 + 40p)x + 1{,}400 + 40p = 0 \\ m = 31{,}67\left[A + 20p(B + D) + 0{,}631(C - 0{,}2A)\right] \end{cases}$$

Formules dans lesquelles A, B, C, D, ont les valeurs mentionnées p. 435 au chapitre précédent.

Il suffit de se donner une valeur de p, pour tirer des premières équations la valeur de x correspondante. Il est à remarquer que ces équations ne contiennent pas la valeur de u, de sorte que la position de la fibre neutre est indépendante de u.

Portant la valeur de p choisie et celle de x que l'on vient de déterminer dans les secondes équations, on obtient la valeur de m. Les valeurs de B et D qui entrent dans ces équations subissent de grandes variations quand u varie, contrairement à celle de A et C qui sont indépendantes de u. La valeur de m se composera donc d'une partie $[A + a(C - bA)]\ R_c$, indépendante de u, mais fonction de p, puisque fonction de x, et d'une partie éminemment variable et avec p et avec u, $40p(B + D)$.

Le tableau ci-après résume les valeurs de x, m, R_F et R'_F, relatives à des pourcentages de 1 à 5 % dans les trois cas considérés, (sécurité 2, 2,5 et 3 en fonction de R_c) pour $u = 0{,}050$, $u = 0{,}100$ et $u = 0{,}200$, et toujours dans l'hypothèse de $R_t = 20$ kilogrammes et $n = 20$.

On rappellera que

$$R_F = 20R_c \frac{x - u}{1 - x}$$

et que

$$R'_F = 20R_c \frac{1 - x - u}{1 - x}.$$

L'examen de ce tableau montre l'importance des variations de u, d'autant plus grande que le pourcentage et que la valeur de R_c sont plus élevées.

C'est ainsi que lorsque u passe de 0,200 à 0,050, le moment unitaire augmente de

Cas	$p = 1$	$p = 5$
I	47 %	91,5 %
II	43,5	90,5
III	40	88,5

Si l'on construit les courbes représentatives des moments unitaires en portant ces valeurs en ordonnées (en prenant

Valeurs de x, m, R_F et R'_F pour $\beta = 1$

$R_t = 20, \quad n = 20$

		p														
		1 %			2 %			3 %			4 %			5 %		
		u			u			u			u			u		
		0,200	0,100	0,050	0,200	0,100	0,050	0,200	0,100	0 050	0,200	0,100	0,050	0,200	0,100	0,050
I	x	»	0,544	»	»	0,531	»	»	0,523	»	»	0,519	»	»	0,517	»
	m	9,96	12,85	13,63	13,54	19,21	22,66	17,02	25,38	30,46	20,50	31,56	38,27	23,98	37,75	46,10
	R_F	7,27	9,25	10,29	6,70	8,73	9,74	6,43	8,42	9,42	6,30	8,28	9,26	6,23	8,20	9,18
	R'_F	5,33	7,42	8,46	5,45	7,47	8,49	5,52	7,51	8,50	5,55	7,52	8,51	5,57	7,53	8,52
II	x	»	0,528	»	»	0,520	»	»	0,515	»	»	0,513	»	»	0,512	»
	m	8,33	10,58	11,95	11,13	15,57	18,26	13,90	20,48	24,48	16,67	25,41	30,71	19,46	30,36	36,97
	R_F	5,28	6,89	7,70	5,07	6,65	7,44	4,94	6,50	7,29	4,88	6,44	7,22	4,84	6,42	7,19
	R'_F	4,38	5,99	6,80	4,45	6,02	6,81	4,47	6,03	6,82	4,48	6,04	6,82	4,47	6,04	6,82
III	x	»	0,517	»	»	0,512	»	»	0,509	»	»	0,508	»	»	0 507	»
	m	7,19	9,03	10,14	9,50	13,13	15,33	11,78	17,20	20,49	14,09	21,30	25,68	16,37	25,36	30,82
	R_F	4,16	5,47	6,12	4,05	5,35	6,00	3,99	5,28	5,92	3,97	5,25	5,90	3,94	5,23	5,87
	R'_F	3,71	5,02	5,68	3,74	5,03	5,68	3,75	5,04	5,69	3,76	5,05	5,69	3,76	5,05	5,69

Remarque. — Mêmes valeurs de x pour les 3 valeurs de u.

pour abscisses les valeurs $p = 1, 2, 3, 4$ et $5\ ^0/_0$, on remarque ces courbes diffèrent très peu de lignes droites, de sorte que $u = 0{,}200$, on peut écrire avec une exactitude suffisante

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & m = 6{,}455 + 3{,}505\ p \\ \text{II} & m = 5{,}5475 + 2{,}7825p \\ \text{III} & m = 4{,}895 + 2{,}295\ p \end{array}\right\} u = 0{,}200$$

formules dans lesquelles p est le nombre exprimant le pourcentage, 1, 2 ou 5, et non pas 0,01... 0,02... 0,05.

Si l'on divise maintenant les deux termes de ces expressions par la valeur de R_c correspondante, $47^{kg},50$ pour I, 38 kilogrammes pour II, $31^{kg},67$ pour III, et si l'on met R_c en facteur commun, l

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & m = (0{,}136 + 0{,}0735p) \times 47^{kg},50 \\ \text{II} & m = (0{,}146 + 0{,}0730p) \times 38^{kg} \\ \text{III} & m = (0{,}154 + 0{,}0725p) \times 31^{kg},67 \end{array}\right\} u = 0{,}200$$

On obtiendra dans les mêmes conditions pour $u = 0{,}100$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & m = 6{,}625 + 6{,}225p \\ \text{II} & m = 5{,}635 + 4{,}945p \\ \text{III} & m = 4{,}9475 + 4{,}0825p \end{array}\right\} u = 0{,}100$$

et ensuite

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & m = (0{,}139 + 0{,}131p) \times 47^{kg},50 \\ \text{II} & m = (0{,}148 + 0{,}130p) \times 38^{kg} \\ \text{III} & m = (0{,}156 + 0{,}129p) \times 31^{kg},67 \end{array}\right\} u = 0{,}100$$

Et de même pour $u = 0{,}50$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & m = 6{,}7625 + 7{,}8675p \\ \text{II} & m = 5{,}695 + 6{,}255p \\ \text{III} & m = 4{,}97 + 5{,}17p \end{array}\right\} u = 0{,}050$$

et ensuite

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & m = (0{,}142 + 0{,}165p) \times 47^{kg},50 \\ \text{II} & m = (0{,}150 + 0{,}164p) \times 38^{kg} \\ \text{III} & m = (0{,}157 + 0{,}163p) \times 31^{kg},67 \end{array}\right\} u = 0{,}050$$

Remarquant que si l'on applique les expressions moyennes obtenues pour II et les trois valeurs de u, aux cas extrêmes I et III, on ne commet que des erreurs négligeables en pratique de 1 à 2 % en plus pour I ou en moins pour III, on pourra résumer déjà le tableau précédent à :

$$m = (0{,}146 + 0{,}0730p)R_c \text{ pour } u = 0{,}200$$
$$m = (0{,}148 + 0{,}130p)R_c \text{ pour } u = 0{,}100$$
$$m = (0{,}150 + 0{,}164p)R_c \text{ pour } u = 0{,}050$$

Enfin prenant pour nouvelle moyenne, celle qui correspond à $u = 0{,}100$, soit à 0,148 pour le premier terme, on peut admettre la formule générale suivante, fonction de R_c, de p et de u.

$$m = \left[0{,}148 + (0{,}194 - 0{,}607u)p\right]R_c.$$

Les travaux du métal étant toujours très faibles, d'après le tableau de la page 445 on n'a pas à s'en soucier.

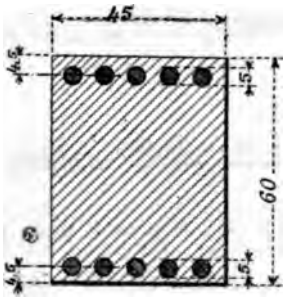


Fig. 168

108. Application I. — *On donne une poutre rectangulaire de 45 de largeur, 60 de hauteur, armée symétriquement de 5 barres rondes de 50 millimètres dont l'axe se trouve à 4,5 des faces extrêmes, on demande le moment de résistance de cette poutre avec un coefficient de sécurité de 2,5 par rapport au béton (fig. 168) ?*

La section de la poutre $= 45 \times 60 = 2700$ centimètres carrés
des armatures $= 5 \times 19{,}635 = 98{,}175$ »

Le pourcentage est

$$p = \frac{9817.5}{2700} = 3,636$$

$$u = \frac{4,5}{60} = 0,075.$$

$$R_c = 38 \text{ kilogrammes.}$$

On a donc

$$m = \left[0,148 + (0,194 - 0,607 \times 0,075) \times 3,636\right] \times 38 \text{ kilog.}$$

ou

$$m = 26,14$$

On a donc

$$M = mah^2 = 26,14 \times 0,45 \times 60^2$$

$$M = 42347 \text{ kilogrammètres.}$$

On remarquera que d'après le tableau (p. 445) dans le cas II qui répond au coefficient de sécurité demandé, on aurait pour $u = 0,075$ moyenne entre (0,100 et 0,050),

$$m = \frac{24.48 + 20,48}{2} = 22,48 \text{ pour } p = 3$$

et

$$\frac{30.71 + 25.41}{2} = 28,06 \text{ pour } p = 4.$$

Interpolant entre $p = 3$ et $p = 4$, pour $p = 3,636$ on aurait

$$m = 22,48 + (28,06 - 22,48)0,636$$

ou

$$m = 26,03.$$

L'approximation est donc voisine de $\frac{26,14 - 26,03}{26,03} = 0,38$ %.

Si l'on désire se rendre compte des travaux du métal, on remarquera que pour $p = 3$

$$R_F = \frac{7.29 + 6.50}{2} = 6,90$$

$$R'_F = \frac{6.82 + 6,03}{2} = 6,42$$

et pour $p = 4$

$$R_F = \frac{7.22 + 6,44}{2} = 6,83$$

$$R'_F = \frac{6.82 + 6,04}{2} = 6,43.$$

Interpolant à nouveau, pour $p = 3,636$

$$R_F = 6,83 + (6,90 - 6,83) \times 0,636 = 6,87$$

$$R'_F = 6,42 + (6,43 - 6,42) \times 0,626 = 6,426.$$

Application II. — *On demande la résistance de la poutre ci-dessus dont la hauteur serait portée à* 70. — *On admet* $R_c = 40$ *kilogrammes.*

Section de la poutre $45 \times 70 = 3150$ centimètres carrés
» des armatures $5 \times 19,635 = 98,175$ »

$$p = \frac{9817,5}{3150} = 3,12$$

$$u = \frac{4,5}{70} = 0,0643$$

$$R_c = 40 \text{ kilogrammes}$$

$$m = [0,148 + (0,194 - 0,607 \times 0,0643) \times 3,12] \times 40$$

$$m = 35$$

D'où

$$M = mah^2 = 35 \times 0,45 \times \overline{70}^2 = 77175 \text{ kilogrammètres.}$$

Application III. — *On demande la résistance de la poutre ci-dessus dont la hauteur serait conservée, et la largeur portée à* 50. $R_c = 40$ *kilogrammes.*

Section de la poutre $50 \times 70 = 3500$ centimètres carrés
» des armatures $5 \times 19,635 = 98,175$ »

$$p = \frac{9817.5}{3500} = 2,8$$

$$u = \frac{4,5}{70} = 0,0643$$

$$R_c = 40 \text{ kilogrammes}$$

$$m = [0,148 + (0,194 - 0,607 \times 0,0643) \times 2,8] \times 40$$

$$m = 32$$

$$M = mah^2 = 32 \times 0,50 \times \overline{70}^2 = 78400 \text{ kilogrammètres.}$$

On ne gagne donc que très peu en augmentant la largeur des poutres.

Application IV. — *Déterminer une poutre rectangulaire à armatures symétriques capable de supporter une surcharge de* 3000 *kilogrammes par mètre courant sur* 6 *mètres de portée. On veut limiter à* 30 *kilogrammes le travail du béton.*

L'équarrissage de la poutre ressort généralement de considérations pratiques. On le supposera de $16 \times 50 = ah$.

Le poids propre $= 16 \times 50 \times 0^{kg},25 =$ 200 kilogrammes
Surcharge 3000 »
Total 3200 »

$$M = \frac{3200 \times \overline{6}^2}{8} = 14400 \text{ kilogrammètres}$$

$$m = \frac{M}{ah^2} = \frac{14400}{0,16 \times 50^2} = 36$$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{36}{30} = 1,20$$

D'autre part on a

$$\frac{m}{R_c} = 0,148 + (0,194 - 0,007u)p.$$

Faisant provisoirement $u = 0,100$

$$\frac{m}{R_c} = 1,20 = 0,148 + 0,133p$$

$$p = \frac{1,200 - 0,148}{0,133} = 7,90$$

Ce pourcentage élevé montre que l'épaisseur de 16 n'est pas suffisante, on essaiera 24

poids propre $= 24 \times 50 \times 0,25 =$ 300 kilogrammes
Surcharge $=$ 3000 »
Charge totale $=$ 3300 »

$$M = \frac{3\,300 \times 6^2}{8} = 14\,850 \text{ kilogrammètres}$$

$$m = \frac{14\,850}{0{,}24 \times 50^2} = 24{,}75$$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{24{,}75}{30} = 0{,}825$$

$$p = \frac{0{,}825 - 0{,}148}{0{,}133} = 5{,}10$$

$$s = ah \times 0{,}051 = 0{,}051 \times 0{,}24 \times 50 = 61{,}20.$$

Le pourcentage est encore trop élevé à moins que l'on n'admette des barres rondes superposées comme l'indique la figure 169. Il faudrait 6 ronds de 37 millimètres, section 64^{cmq},50.

Soit

$$S = 24 \times 50 = 1\,200$$

$$s = 6 \times 10{,}75 = 64{,}5$$

$$p = \frac{64{,}5}{1\,206} = 5{,}37$$

$$u = \frac{8}{50} = 0{,}160$$

$$m = \left[0{,}148 + (0{,}194 - 0{,}607 \times 0{,}160) \times 5{,}37\right] \times 30 = 20{,}07$$

$$M = 20{,}07 \times 0{,}24 \times \overline{50}^2 = 12\,042.$$

La hauteur choisie est insuffisante ; on essaiera 60

Poids propre 26 × 60 × 0,25 =	390	kilogrammes
Surcharge =	3 000	»
Charge totale =	3390	»

$$M = \frac{3\,390 \times 6^2}{8} = 15\,255 \text{ kilogrammètres}$$

$$m = \frac{15\,255}{0{,}26 \times 60^2} = 16{,}30$$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{16{,}30}{30} = 0{,}543$$

$$p = \frac{0{,}543 - 0{,}148}{0{,}133} = 2{,}97$$

$$s = 0{,}0297 \times 26 \times 60 = 46{,}53$$

ou 3 ronds de 45 millimètres ; section 47,70.

On essaiera 3 ronds de 42, section 41,56, car l'on pourra prendre $u = 0{,}075$ au lieu de $u = 0{,}100$. D'autre part on portera la largeur à 26. D'où

$$S = 26 \times 60 = 1\,560$$

$$s = 3 \times 13{,}85 = 41{,}56$$

$$p = \frac{41{,}56}{1\,560} = 2{,}66$$

$$u = \frac{4{,}50}{60} = 0{,}075$$

$$m = \left[0{,}148 + (0{,}194 - 0{,}607 \times 0{,}075) \times 2{,}66\right] 30 = 16{,}32$$

$$M = 0{,}26 \times \overline{60}^2 \times 16{,}32 = 15\,275$$

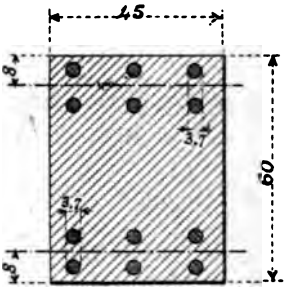


Fig. 169

Application V. — *Déterminer une poutre supportant avec un coefficient de sécurité de* 2, *un moment de* 6500 *kilogrammètres.*

Chaque ingénieur suivra la méthode qui lui conviendra pour abréger les tâtonnements ; et parmi celles-ci la plus rapide est de déterminer à l'avance les résistances d'une série de poutres à équarrissages variés, et plus ou moins fortement armées.

On proposera ici une méthode également rapide.

On a trouvé :

$$m = \left[0{,}148 + (0{,}194 - 0{,}607u)p\right] R_c$$

si l'on fait $u = 0{,}100$ et $p = 2{,}5$ valeur convenable, cette expression devient

$$m = 0{,}481 R_c.$$

On a donc pour $M = 6\,250$ kilogrammètres

$$ah^2 = \frac{M}{0{,}481 R_c}$$

et pour $a = 0,16$

$$h = \sqrt{\frac{M}{0,481 \times 0,16 \times R_c}} = 0,525\sqrt{M} \text{ pour } R_c = 47,50.$$

Ici M est égal à 6250,

$$\sqrt{M} = 79$$
$$h = 0,525 \times 79 = 41,50$$

On prendra $h = 42$. D'où

$$S = 16 \times 42 = 672$$
$$s = 0,025 \times 672 = 16,80$$

On prendra 2 ronds de 32, section = 16,08

$$p = \frac{16,08}{672} = 0,024$$
$$u = \frac{3,50}{42} = 0,0835$$
$$m = \left[0,148 + (0,194 - 0,607 \times 0,097)2,40\right] \times 47,50 = 23,32$$
$$M = 23,32 \times 0,16 \times \overline{42}^2 = 6582 \text{ kilogrammètres.}$$

109. Armatures dissymétriques. — L'armature dissymétrique introduit une nouvelle inconnue β, qui complique le problème.

On aura une relation entre β et p, en se donnant des valeurs particulières de x, comprises dans des limites convenables, inspirées par l'examen des tableaux déjà obtenus au chapitre des dalles de forte épaisseur; par exemple

$$x = 0,450, \qquad 0,475, \qquad 0,500.$$

Prenons par exemple $x = 0,450$ et considérons d'abord le cas I. L'équation

$$2,019x^2 - 2(1,598 + 20p(1 + \beta)x + 1,177 + 8(1 + 4\beta)p = 0$$

donne

$$2,019 \times \overline{0,450}^2 - 2 \times 1,598 \times 0,45 - 18p(1 + \beta) + 1,177 + 8(1 + 4\beta)p = 0$$

d'où

$$\beta = \frac{10p - 0,148}{14p}.$$

Il y a lieu de vérifier en outre, si la valeur de R_F n'est pas trop forte

$$R_F = \frac{20R_r(x - u)}{1 - x} = \frac{950(0.450 - u)}{0,550}.$$

D'où pour $u = 0,050$ — $R_F = 6,90$ — valeur faible.

Opérant de même pour $x = 0,475$, $x = 0,500$, et ce dans les 3 cas, on trouve le tableau suivant des valeurs de β.

Cas	x	β	R_F		
			$u = 0,200$	$u = 0,100$	$u = 0,050$
I . . .	0,450	$(10p - 0,148) \times \frac{1}{14p}$	4,32	6,05	6,90
	0,475	$(11p - 0,114) \times \frac{1}{13p}$	4,97	6,78	7,70
	0,500	$(12p - 0,084) \times \frac{1}{12p}$	6,00	8,00	9,00
II . . .	0,450	$(10p - 0,136) \times \frac{1}{14p}$	4,32	6,05	6,90
	0,475	$(11p - 0,090) \times \frac{1}{13p}$	4,97	6,78	7,70
	0,500	$(12p - 0,056) \times \frac{1}{12p}$	6,00	8,00	9,00
III . . .	0,450	$(10p - 0,112) \times \frac{1}{14p}$	4,32	6,05	6,90
	0,475	$(11p - 0,072) \times \frac{1}{13p}$	4,97	6,78	7,70
	0,500	$(12p - 0,035) \times \frac{1}{12p}$	6,00	8,00	9,00

Connaissant β en fonction de p, on aura le moment unitaire uniquement en fonction de p, en appliquant les équations sus indiquées (p. **443**) pour chacun des trois cas et il suffira de se donner p pour déterminer complètement m et β.

On obtient ainsi le nouveau tableau ci-après :

R.	x	u	m	β
	0,450	0,200	$2.59p + 4,40$	$\frac{10p - 0.148}{14p}$
		0.100	$4.61p + 2,94$	
		0,050	$5,85p + 2,07$	
47k,50	0,475	0,200	$2,99p + 4,90$	$\frac{11p - 0,114}{13p}$
		0.100	$5,31p + 3,59$	
		0,050	$6,72p + 2,91$	
	0.500	0,200	$3,42p + 5,11$	$\frac{12p - 0.084}{12p}$
		0,100	$6,08p + 4,18$	
		0.050	$7,70p + 3,61$	
	0,450	0,200	$2,97p + 4,05$	$\frac{10p - 0 126}{14p}$
		0,100	$3.69p + 3,06$	
		0.050	$4,68p + 2.47$	
38k	0,475	0,200	$2,39p + 4.43$	$\frac{11p - 0.090}{13p}$
		0,100	$4.25p + 3,68$	
		0,050	$5,38p + 3,23$	
	0,500	0.200	$2,74p + 4,80$	$\frac{12p - 0,056}{12p}$
		0,100	$4,86p + 4,30$	
		0.050	$6,16p + 4,00$	
	0,450	0,200	$1,73p + 3,69$	$\frac{10p - 0.112}{14p}$
		0,100	$3.07p + 2.95$	
		0,050	$3,90p + 2,51$	
1k,67	0,475	0.200	$1,99p + 4,09$	$\frac{11p - 0,072}{13p}$
		0.100	$3.54p + 3,59$	
		0,050	$4.48p + 3,29$	
	0,500	0,200	$2,28p + 4.47$	$\frac{12p - 0,035}{12p}$
		0,100	$4.05p + 4,21$	
		0,050	$5,13p + 4,06$	

onnant à p les valeurs 2, 3, 4 et 5 %, les valeurs de m de-
nent déterminées ainsi que celles de $\beta = \frac{ap - b}{pc}$; or comme
pourcentage des armatures comprimées $= \beta p$, on remarquera

$$\frac{ap - b}{pc} \times p = \frac{ap - b}{c} = p'$$

n peut donc dresser un troisième tableau donnant m et p'

pour 3 valeurs de x (0,450 — 0,475 — 0,500) pour les 3 valeurs de u(0,200 — 0,100 et 0,050) et les 3 valeurs de R_c (47^{kg},50 — 38^{kg} — 31^{kg},67). Ces tableaux suivent :

I. — $R_c = 47^k,50$

p	x	p'	m		
			$u = 0,200$	$u = 0,100$	$u = 050$
2	0,450	0,37	9,58	12 16	13,77
	0,475	0,82	10,88	14.21	16.35
	0,500	1,30	11,95	16,34	19.01
3	0,450	1,09	12.17	16,77	19.62
	0,475	1,66	13 87	19,52	23.07
	0,500	2,30	15.37	22,42	26,71
4	0,450	1,80	14.76	21,38	25.47
	0,475	2.51	16.86	24 83	29,79
	0,500	3,30	18,79	28,50	34,41
5	0,450	2 51	17,35	25.99	31,22
	0,475	3,36	19,85	30,14	36,51
	0,500	4,30	22,21	34,58	42,11

II. — R_c = 38 kilogrammes

p	x	p'	m		
			$u = 0,200$	$u = 0,100$	$u = 0,050$
2	0,450	0,53	8 19	10,44	11,83
	0.475	1,00	9,21	12,18	13,99
	0,500	1.53	10,28	14.02	16,32
3	0,450	1,24	10,26	14,13	16.51
	0 475	1,84	11,60	16,43	19,37
	0,500	2,53	13,02	18,88	22,48
4	0,450	1,96	12,33	17,82	21.19
	0.475	2,69	13,99	2[illegible],68	24.75
	0,500	3,53	15,76	23,74	28,64
5	0.450	2,67	14,40	21,51	25,87
	0.475	3,54	16,38	24,93	30,13
	0,500	4,53	18,50	28,60	34,80

III. — $R_c = 31^k,67$

p	x	p'	m		
			$u = 0,200$	$u = 0,100$	$u = 0,050$
2	0,450	0,63	7,15	9,09	10,81
	0,475	1.14	8,07	10,67	12.25
	0,500	1,71	9,03	12,31	14,32
3	0,450	1,35	8,88	12,16	14,21
	0,475	1,98	10,06	14,21	16,73
	0,500	2,71	11,31	16,35	19,45
4	0,450	2,06	10,61	15,23	18,11
	0,475	2,83	12,05	17,75	21,21
	0,500	3,71	13,59	20,41	24,58
5	0,450	2,78	12,34	18,30	22,01
	0,475	3,68	14,04	21,29	25,69
	0,500	4,71	15,87	24,46	29,71

Pour chaque valeur de p, la valeur de m en fonction de p', est une courbe très voisine d'une droite que l'on peut prendre sans erreur sensible, de sorte que les 3 tableaux peuvent déjà se résumer comme suit :

		Valeurs de m		
		$u = 0,200$	$u = 0,100$	$u = 0,050$
I	$p = 2$	$8,64 + 2,55p'$	$10,50 + 4.49p'$	$11,68 + 5,64p'$
	$p = 3$	$9,29 + 2,64p'$	$11,63 + 4.66p'$	$13,23 + 5,86p'$
	$p = 4$	$9,92 + 2,69p'$	$12,84 + 4,75p'$	$14,74 + 5,96p'$
	$p = 5$	$10,54 + 2,71p'$	$13,95 + 4,80p'$	$16,19 + 6,03p'$
II	$p = 2$	$7,08 + 2,09p'$	$8,54 + 3.58p'$	$9,45 + 4,40p'$
	$p = 3$	$7,61 + 2,14p'$	$9,56 + 3,68p'$	$10,77 + 4,62p'$
	$p = 4$	$8,05 + 2,18p'$	$10,43 + 3,77p'$	$11,89 + 4,74p'$
	$p = 5$	$8,51 + 2,20p'$	$11,33 + 3,85p'$	$13,05 + 4,80p'$
III	$p = 2$	$6,05 + 1,74p'$	$7,21 + 2,98p'$	$7,97 + 3,71p'$
	$p = 3$	$6,47 + 1,79p'$	$7.99 + 3,09p'$	$9,08 + 3,86p'$
	$p = 4$	$6,89 + 1.81p'$	$8,76 + 3,14p'$	$10,02 + 3,92p'$
	$p = 5$	$7,26 + 1.83p'$	$9,43 + 3 19p'$	$11,05 + 3,94p'$

Ces diverses expressions de m, comprennent un premier membre éminemment variable avec p. et un second membre qui n'augmente que très peu avec p ; la fonction qui relie les premiers membres relatifs à des valeurs de R_c et de u, déterminées, est presque une ligne droite, on peut donc écrire, en admettant pour le second membre, celui qui est relatif à $p = 2$, et qui est minimum.

Cas	$u = 0,200$	$u = 0,100$	$u = 0,50$
I	$m = 7,37 + 0,653p + 2,55p'$	$m = 8,20 + 1,15p + 4,49p'$	$m = 8,68 + 1,50p + 5,64p'$
II.	$m = 6,12 + 0,48p + 2,09p'$	$m = 6,68 + 0,93p + 3,58p'$	$m = 7,05 + 1,20p + 4,49p'$
III.	$m = 5,25 + 0,40p + 1,74p'$	$m = 5,73 + 0,74p + 2,98p'$	$m = 5,91 + 1,03p + 3,71p'$

Et enfin, observant que $R_c = 47,50$, 38 et $31^{kg},67$ respectivement dans les cas I, II et III, on aura en mettant R_c en facteur commun

(1) $u = 0,200$; $m = (0,160 + 0.013p + 0,055p')R_c$

(2) $u = 0,100$; $m = (0,175 + 0.024p + 0,10p')R_c$

(3) $u = 0,050$; $m = (0,185 + 0,032p + 0,12p')R_c$

qui résument avec une approximation très grande, et en tous cas inférieure à la réalité, les divers tableaux ci-dessus.

110 Application I. — *On a prévu une poutre rectangulaire de* 0.16 × 0,45 *armée à la tension de* 2 *barres de* 32, *à la compression de* 2 *barres de* 26 *millimètres pour résister à un moment de* 6000 *kilogrammètres. Les axes des armatures se trouvent à* 0,04 *des faces extrêmes. On demande le travail des matières* (fig. 170).

$$m = \frac{6000}{0,16 \times 45^2} = 18,52$$

$$u = \frac{0.04}{0,45} = 0,089.$$

$$p = \frac{100s}{ah} = \frac{100 \times 2 \times 8.04}{16 \times 45} = 2,22$$

$$p' = \frac{100s'}{ah} = \frac{100 \times 2 \times 5.31}{16 \times 45} = 1,47.$$

L'équation moyenne (2), répondant à $u = 0,100$, devient pour un pourcentage de 2 % des armatures tendues, et de 1,2 % des armatures comprimées ($\beta = 0,60$)

$$\frac{m}{R_c} = 0,343$$

D'où

$$M = mah^2 = 0,343SR_ch.$$

On aurait de même pour $u = 0,100$, $p = 0,04$ et $p' = 0,024$ ($\beta = 0,60$)

$$\frac{m}{R_c} = 0,511$$

$$M = mah^2 = 0,511SR_ch$$

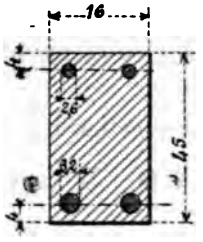


Fig. 170

Interpolant les divers paramètres des équations (2) et (3) relatives à $u = 0,100$ et $u = 0,050$, on a pour $u = 0,089$

$$m = 0,1772 + 0,02576p + 0,1044p'$$

et pour $p = 2,22$, $p' = 1,47$

$$m = 0,1772 + 0,0572 + 0,1535 = 0,3879$$

D'où

$$R_c = \frac{18,52}{0,3879} = 47^{kg},75$$

Se reportant alors au tableau de la page 456 relatif à $R_c = 47,50$ on trouve par interpolation que pour $p = 2,22$

pour $x = 0,450$, $p' = 0,45$
$x = 0,475$, $p' = 0,91$
$x = 0,500$, $p' = 1,41$
$x = 0,509$ $p' = 1,47$.

D'où

$$R_F = 20 \times 47,75 \frac{0,509 - 0,089}{0,491} = 8^{kg},15$$

$$R'_F = 20 \times 47,75 \frac{0,491 - 0,089}{0,491} = 7^{kg},80$$

Application II. — *Même problème en supposant que les barres comprimées et tendues sont toutes de 32 millimètres.*

On a

$$S = 16 \times 45 = 720$$
$$p = p' = 2,22$$
$$u = 0,089$$
$$m = 18,52$$

$$R_c = \frac{18,52}{0,148 + (0,194 - 0,607 \times 0,089)2,22} = 40^{kg},50$$

Les valeurs de R_F et de R'_F s'obtiennent à l'aide du tableau de la page 145.

On trouve ainsi que pour $u = 0,089$, $p = 2,22$, $R_c = 47,50$.

$$R_F = 6,74 \qquad R'_F = 6,19.$$

De même pour $u = 0,089$, $p = 2,22$, $R_c = 38$

$$R_F = 6,66 \qquad R'_F = 6,11.$$

On aura donc pour $R_c = 40,50$

$$R_F = 6,68 \qquad R'_F = 6,13.$$

Application III. — *On peut se demander de combien on augmenterait la résistance de la poutre sus mentionnée, en substituant aux barres comprimées de 26, des barres de 32, et admettant un même travail du béton de 47^{kg},50.*

On a trouvé M = 6 000 kilogrammètres pour les barres comprimées de 26.

L'armature symétrique aurait donné

$$m = [0,148 + (0,194 - 0,607 \times 0,089) \times 2,22] \times 47,75 = 21,92$$

$$M = 21,92 \times 0,16 \times 45^2 = 7102.$$

L'augmentation serait donc de $\frac{1102}{6000}$ de 18,3 %.

Et l'augmentation du métal de :

Au lieu de 4 barres de 8,04 = 32,16

2 barres de 8,04 et 2 de 5,31 = 26.70

Différence = 5,46

$$\frac{5,46}{32,16} = 17\ \%.$$

L'armature symétrique est donc un peu plus avantageuse.

CHAPITRE III

—

DALLES MINCES } $R_t = 0$
» ÉPAISSES

111. Dalles minces ($R_t = 0$). — On a vu que la seule différence entre les dalles minces ou épaisses et même entre les poutres rectangulaires résidait dans la valeur à prévoir pour u.

Pour les dalles dont l'épaisseur est inférieure à $0^m,10$, la valeur convenable est $u = 0,300$.

Pour ces faibles épaisseurs, il n'y a pas lieu *a priori* de prévoir d'armatures à la compression ; les formules à employer sont donc :

$$x^2 - 2(1 + np)x + 1 + 2npu = 0 \tag{1}$$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{(1-x)^2}{3} + np\frac{(x-u)^2}{1-x} \tag{2}$$

qui pour $n = 20$ et $u = 0,300$, deviennent :

$$x^2 - 2(1 + 20p)x + 1 + 12p = 0 \tag{1'}$$

$$\frac{m}{R_c} = A + 20pB \tag{2'}$$

A étant toujours égal à

$$\frac{(1-x)^2}{3} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{(x-0.3)^2}{1-x}.$$

On peut déterminer x pour une valeur quelconque de p, et portant cette valeur de x dans (2'), on obtient $\frac{m}{R_c}$.

Le taux de travail du métal a pour valeur

$$R_F = n\frac{x-u}{1-x}R_c$$

où l'on tire en posant $n = 20$:

$$\frac{R_F}{R_c} = 0{,}2\,\frac{x - u}{1 - x} \qquad)$$

ırrangeant de façon que R_F soit exprimé en kilogrammes par illimètre carré.

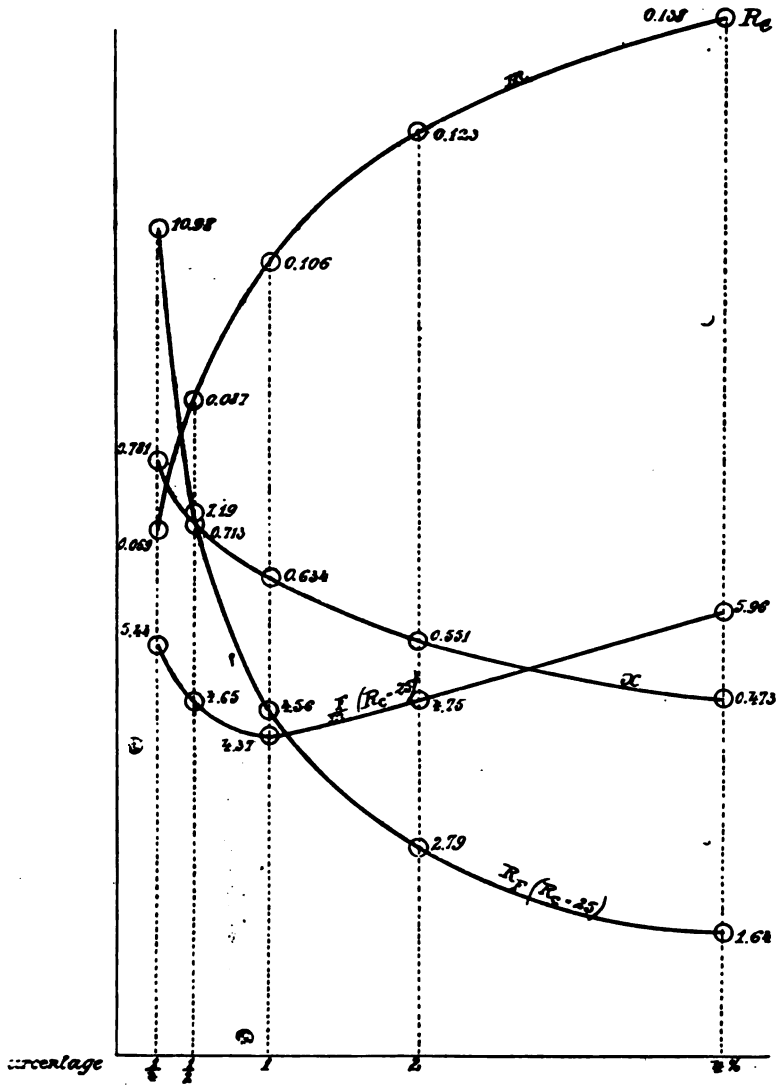


Fig. 171

Se donnant successivement :

$$p = 0{,}0025 \qquad 0{,}0050 \qquad 0{,}01 \qquad 0{,}02 \qquad 0{,}04,$$

on obtient les valeurs suivantes de $\frac{m}{R_c}$ et $\frac{R_F}{R_c}$

	$p = 0{,}0025$	0,0050	0,010	0,020	0,040
x =	0,781	0,713	0,634	0,551	0,473
$\frac{m}{R_c}$ =	0,069	0,087	0,106	0,123	0,138
$\frac{R_F}{R_c}$ =	0,440	0,287	0,182	0,112	0,065
$\frac{F}{m}$ =	5,44	4,65	4,37	4,75	5,96

Ces valeurs ont été reportées en ordonnées sur le graphique (fig. 171) aux abscisses correspondantes répondant aux pourcentages.

Soit pour des coefficients de sécurité par rapport à la limite d'élasticité du béton, de 2, 2 5, 3, 3,80, c'est-à-dire pour

		$R_c = 47^k,50$	38 kilog.	$31^k,67$	25 kilog.
$p = 0{,}0025$	m	3,28	2,62	2,18	1,72
	R_F =	20,86	16,69	13,91	10,98
	$\frac{F}{m}$ (1) =	2,85	3,58	4,29	5,44
$p = 0{,}0050$	m =	4,13	3,31	2,75	2,17
	R_F =	13,67	10,93	9,11	7,19
	$\frac{F}{m}$ =	2,44	3,04	3,68	4,65
$p = 0{,}010$	m =	5,03	4,03	3,36	2,65
	R_F =	8,66	6,93	5,78	4,56
	$\frac{F}{m}$ =	2,30	2,88	3,46	4,37
$p = 0{,}020$	m =	5,84	4,67	3,89	3,07
	R_F =	5,31	4,25	3,54	2,79
	$\frac{F}{m}$ =	2,50	3,12	3,76	4,15
$p = 0{,}040$	m =	6,55	5,24	4,37	3,45
	R_F =	3,12	2,49	2,08	1,64
	$\frac{F}{m}$ =	3,14	3,94	4,73	5,96

(1) $\frac{F}{m}$ rapport entre le prix d'un mètre carré de dalle à l'épaisseur de 0m,1 et son moment unitaire, dans les conditions de prix énoncées plus haut, pour l béton et le métal, soit 80 francs le mètre cube, 0 fr. 30 le centimètre carré d'ar mature sur un mètre de longueur, et en comptant 2 centimètres carrés pou les armatures secondaires.

De ces chiffres et du graphique précédent on peut tirer les conclusions suivantes :

1° Le pourcentage le plus économique est voisin de l'unité (1 %);

2° Le moment de la dalle armée à raison de 1 % n'atteint que :

$$m = 5{,}03 \qquad 4{,}03 \qquad 3{,}36 \qquad 2{,}65$$

avec des coefficients de sécurité

$$C = 2 \qquad 2{,}5 \qquad 3 \qquad 3{,}80$$

et des taux de travail

$$R_F = 8{,}66 \qquad 6{,}93 \qquad 5{,}78 \qquad 4{,}56$$

alors que l'hypothèse $R_t = 20$, donnait dans les mêmes conditions

$$m = 7{,}08 \qquad 5{,}97 \qquad 5{,}17$$

soit un excédent de

$$40{,}7\ \% \qquad 48\ \% \qquad 54\ \%.$$

Or la pratique journalière indique que l'on peut en toute sécurité demander une résistance $m = 6$ avec $p = 1/2$ %, alors que l'hypothèse de $R_t = 0$ donne pour $p = 1$ %, $m = 5{,}03$ dans les mêmes conditions théoriques de sécurité.

Si l'on s'arrête à la valeur $p = 0{,}01$, on posera donc :

$$x = 0{,}634 \qquad m = 0{,}106\ R_c$$

$$R_F = 20 \times \frac{0{,}334}{0{,}366} \qquad R_c = 0{,}182\ R_c.$$

Si l'on ne veut pas dépasser $R_F = 12$ kilogrammes pour l'acier, il faudra donner à R_c des valeurs inférieures à :

$$R_c = \frac{12}{0{,}182} = 66 \text{ kilogrammes.}$$

Si l'on ne veut pas dépasser $R_F = 10$ kilogrammes pour le fer, il faudra donner à R_c des valeurs inférieures à :

$$R_c = \frac{10}{0{,}182} = 55 \text{ kilogrammes.}$$

Ceci montre, comme on n'admettra jamais de telles fatigues pour le béton, qu'il n'y a pas à se préoccuper du travail du métal dans les dalles minces armées à raison de 1 %.

112. Dalles épaisses. — On aurait de même pour les dalles de 0,10 à 0,20 d'épaisseur pour lesquelles on prendra $u = 0{,}200$ au lieu de $u = 0{,}300$ et dans le cas de $p' = 0$ (c'est-à-dire les dalles n'étant armées qu'à la tension)

$$x^2 - 2(1 + 20p)x + 1 + 8p = 0 \tag{1}$$

$$\frac{m}{R_c} = A + 20pB \tag{2}$$

A étant égal à

$$\frac{(1-x)^2}{3} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{(x - 0{,}2)^2}{1 - x}.$$

Appliquant ces équations à diverses valeurs de p, on aura pour

		$p = 0{,}0025$	$0{,}0050$	$0{,}010$	$0{,}020$	$0{,}040$
$\beta = 0$	$x =$	0,763	0,688	0,600	0,506	0,414
	$\frac{m}{R_c} =$	0,086	0,109	0,133	0,157	0,177
	$\frac{R_v}{R_c} =$	0,475	0,313	0,200	0,124	0,073

Si l'on suppose que ces dalles sont armées aussi à la compression, on se servira pour la détermination de x de l'équation suivante :

$$x^2 - 2\left[1 + np(1 + \beta)\right]x + 1 + 2np\beta + 2npu - 2np\beta u' = 0$$

qui devient pour $u = 0{,}200$, et $n = 20$

$$x^2 - 2\left[1 + 20p(1 + \beta)\right]x + 1 + 8p(1 + 4\beta) = 0 \tag{3}$$

et de l'équation

$$\frac{m}{R_c} = \frac{(1-x)^2}{3} + 20p\beta\frac{(1 - x - 0{,}200)^2}{1 - x} + 20p\frac{(x - 0{,}200)^2}{1 - x}. \tag{4}$$

Ces équations résolues pour les diverses valeurs de p ci-dessus et $\beta = 0{,}30$ donnent :

		$p = 0{,}0025$	$0{,}0050$	$0{,}010$	$0{,}020$	$0{,}040$
$\beta = 0{,}30$	$x =$	0,765	0,700	0,618	0,541	0,473
	$\frac{m}{R_c} =$	0,036	0,114	0,145	0,189	0,254
	$\frac{R_v}{R_c} =$	0,475	0,334	0,219	0,148	0,103
	$\frac{R'_v}{R_c} =$	0,029	0,067	0,035	0,113	0,124

on trouverait de même pour $\beta = 0{,}60$

		$p = 0{,}0025$	$0{,}0050$	$0{,}010$	$0{,}020$	$0{,}040$
$\beta = 0{,}60$	$x =$	0,766	0,702	0,634	0,570	0,517
	$\frac{m}{R_c} =$	0,037	0,116	0,157	0,218	0,324
	$\frac{R_v}{R_c} =$	0,495	0,336	0,237	0,172	0,131
	$\frac{R'_v}{R_c} =$	0,029	0,062	0,091	0,107	0,107

et pour $\beta = 1$

		$p = 0{,}0025$	$0{,}0050$	$0{,}010$	$0{,}020$	$0{,}040$
$\beta = 1$	$x =$	0,763	0,710	0,652	0,600	0,564
	$\frac{m}{R_c} =$	0,088	0,120	0,170	0,253	0,409
	$\frac{R_v}{R_c} =$	0,490	0,352	0,260	0,200	0,167
	$\frac{R'_v}{R_c} =$	0,028	0,062	0,085	0,100	0,113

Recherchant les solutions les plus économiques, sur la base des prix conventionnels ci-dessus, on trouve pour $R_c = 30$ kilo-

Pourcentages	$\beta = 0$			$\beta = 0{,}30$			$\beta = 0{,}60$			$\beta = 1$		
	m	F	$\frac{F}{m}$	m	F	$\frac{F}{m}$	m	F	$\frac{F}{m}$	m	F	$\frac{F}{m}$
	kgm.	fr.		kgm.	fr.		kgm.	fr.		kgm.	fr	
1/4 %	2,58	9,35	3,62	2,58	9,57	3,71	2,61	9,80	3 75	2,64	10,10	3,82
1/2 »	3,27	10,10	3,09	3,42	10,55	3,08	3,48	11,00	3,16	3,60	11,60	3,22
1 »	3,99	11,60	2,91	4,35	12,50	2,87	4,71	13,40	2 84	5,10	14,60	2,86
2 »	4,71	14,60	3,08	5,67	16,40	2,89	6,54	18,20	2,78	7,59	20,60	2,72
4 »	5,31	20,60	3,88	7,62	24,20	3,17	9,72	27,80	2,86	12,27	32,60	2,65

grammes par exemple, et pour diverses valeurs de β et de p, les valeurs de m, de F et de $\frac{F}{m}$, inscrites dans le tableau précédent et représentées dans le graphique (fig. 172).

Les chiffres soulignés sont des minima ; ils correspondent donc aux solutions les plus économiques ; on saisit encore mieux la loi des variations de prix par le graphique. On voit que pour β = 0 et β = 0,30, le pourcentage de 1 % est à recommander ; pour

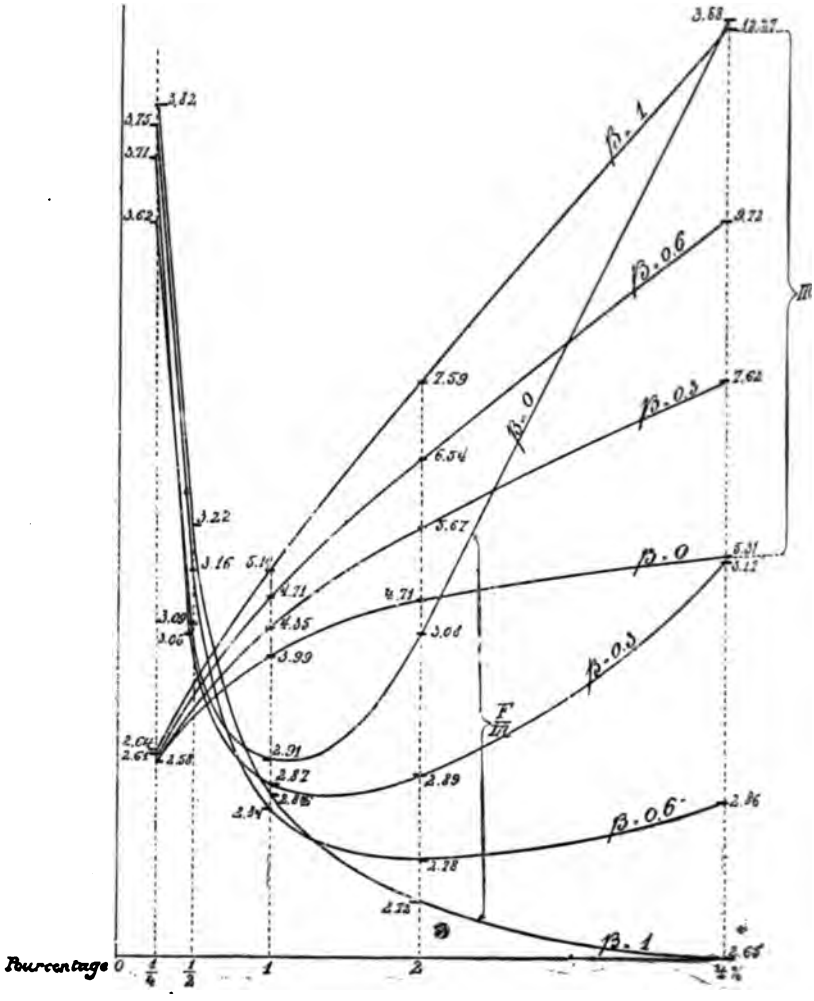


Fig. 172

$\beta = 0{,}60$ 2 % devient plus économique et pour $\beta = 1$, on voit qu'il conviendrait de recourir à des pourcentages élevés, si ces derniers peuvent se loger pratiquement. Mais comme la capacité de résistance, croît très vite avec β et avec p, on est conduit à prévoir parfois de fortes valeurs de β et de p aux dépens de l'économie.

Examinant maintenant les taux de travail du métal, on voit que pour un pourcentage de 1 % et $\beta = 0$ $\frac{R_F}{R_c} = 0{,}200$. Si l'on prend 12 kilogrammes comme effort limite pour l'acier, on a

$$R_c = \frac{12}{0{,}200} = 60 \text{ kilogrammes,}$$

et pour le fer

$$R_c = \frac{10}{0{,}200} = 50 \text{ kilogrammes,}$$

en supposant $n = 20$ dans les 2 cas.

Dans ce cas non plus, il n'y a donc pas lieu de se préoccuper de la fatigue du métal pour des valeurs de R_c inférieures à 50 kilogrammes.

Pour le pourcentage de 2 %, on a pour

	$\beta = 0{,}30$	$\beta = 0{,}60$	$\beta = 1$
$\frac{R_F}{R_c} =$	0,148	0,172	0,200
$\frac{R'_F}{R_c} =$	0,113	0,107	0,100

et pour $p = 0{,}04$

$\frac{R_F}{R_c} =$	0,103	0,131	0,167
$\frac{R'_F}{R_c} =$	0,124	0,117	0,113

Les taux de fatigue du métal comprimé et du métal tendu, sont encore plus faibles ; il n'y a pas à s'en préoccuper non plus, ils n'atteindront jamais la valeur limite.

Comparant les valeurs de $\frac{m}{R_c}$ répondant à $\beta = 0$ et $u = 0{,}200$,

avec celles primitivement trouvées pour $u = 0{,}300$, on pourra remarquer l'influence considérable de la valeur de u. Le tableau suivant résume d'ailleurs les valeurs calculées de x, $\frac{m}{R_c}$ et $\frac{R_r}{R_c}$ pour $\beta = 0$ et diverses valeurs de p.

		$u = 0{,}300$	$u = 0{,}200$	$u = 0{,}100$	$u = 0{,}050$
x	$p = 0{,}01$.	0.634	0,600	0,568	0,552
	$p = 0{,}02$.	0.551	0,506	0.462	0.441
	$p = 0{,}04$.	0,473	0,414	0,358	0,330
$\frac{m}{R_c}$	$p = 0{,}01$.	0.106	0,132	0,164	0,179
	$p = 0{,}22$.	0,123	0,155	0,194	0.214
	$p = 0{,}04$.	0,138	0,177	0,220	0,243
$\frac{R_r}{R_c}$	$p = 0{,}01$.	0,182	0,200	0,216	0,224
	$p = 0{,}02$.	0,112	0,124	0,134	0,140
	$p = 0{,}04$.	0,065	0,073	0,080	0,083

Soit très approximativement pour $\beta = 0$ et $n = 20$

$$p = 0{,}01, \quad x = 0{,}5356 + 0{,}328u$$
$$p = 0{,}02, \quad x = 0{,}4190 + 0{,}440u$$
$$p = 0{,}04, \quad x = 0{,}3014 + 0{,}572u,$$

valeurs que l'on pourrait réunir sous une même expression

$$x = a + bu$$

a et b étant des fonctions de p.

De même on aurait pour $\frac{m}{R_c}$

$$p = 0{,}01, \quad \frac{m}{R_c} = 0{,}1936 - 0{,}292u$$

$$p = 0{,}02, \quad \frac{m}{R_c} = 0{,}2322 - 0{,}364u$$

$$p = 0{,}04, \quad \frac{m}{R_c} = 0{,}264 - 0{,}420u,$$

et pour $\frac{R_v}{R_c}$

$$p = 0{,}01, \qquad \frac{R_v}{R_c} = 0{,}2324 - 0{,}168u$$

$$p = 0{,}02, \qquad \frac{R_v}{R_c} = 0{,}1456 - 0{,}112u$$

$$p = 0{,}04, \qquad \frac{R_v}{R_c} = 0{,}0866 - 0{,}072u.$$

Comme il y a avantage à prévoir des armatures comprimées pour des pourcentages supérieurs à 2 %. — On a calculé les valeurs de $\frac{m}{R_c}$. pour diverses valeurs de β ; elles sont résumées dans le tableau suivant :

	$\beta = 0{,}30$			$\beta = 0{,}60$			$\beta = 1$		
	$u =$ 0,200	$u =$ 0,100	$u =$ 0,050	$u =$ 0,200	$u =$ 0,100	$u =$ 0,050	$u =$ 0,200	$u =$ 0,100	$u =$ 0,050
$p = 2$ % x	0,541	0,513	0,499	0,570	0,555	0,548	0,600	0,600	0,600
$p = 4$ » x	0,473	0,438	0,420	0,517	0,498	0,491	0,560	0,560	0,560
$p = 2$ % $\frac{m}{R_c}$	0,189	0 256	0,293	0,218	0,316	0,393	0,253	0,393	0,478
$p = 4$ » $\frac{m}{R_c}$	0,254	0.359	0,417	0,324	0,491	0,591	0,405	0,659	0,813
$p = 2$ % $\frac{R_v}{R_c}$	0.148	0,169	0,179	0.172	0.204	0.220	0,200	0 250	0.275
$p = 4$ » $\frac{R_v}{R_c}$	0,103	0.120	0,127	0.131	0,158	0,173	0.163	0,209	0,232
$p = 2$ % $\frac{R'_v}{R_c}$	0,113	0,159	0,180	0,107	0,155	0,178	0,085	0,150	0,175
$p = 4$ » $\frac{R'_v}{R_c}$	0,124	0,164	0,183	0,117	0,160	0,179	0,109	0,154	0,177

Ces tableaux sont suffisants pour la vérification des dimensions d'un projet, en interpolant entre les valeurs indiquées ci-dessus pour des valeurs de β ou de p intermédiaires ; ils sont même commodes pour établir un projet.

On peut aussi grouper comme suit les valeurs ci-dessus pour $p = 0{,}02$

$$u = 0{,}200, \qquad \frac{m}{R_c} = 0{,}157 + 0{,}096\beta$$

$$u = 0{,}100, \qquad \frac{m}{R_c} = 0{,}194 + 0{,}199\beta$$

$$u = 0{,}050, \qquad \frac{m}{R} = 0{,}211 + 0{,}264\beta$$

et pour $p = 0{,}04$

$$u = 0{,}200, \qquad \frac{m}{R_c} = 0{,}177 + 0{,}228\beta$$

$$u = 0{,}100, \qquad \frac{m}{R_c} = 0{,}220 + 0{,}439\beta$$

$$u = 0{,}050, \qquad \frac{m}{R_c} = 0{,}243 + 0{,}570\beta$$

ou encore entre les limites de $p = 0{,}02$ et $0{,}04$

$$\text{A} \quad \begin{cases} u = 0{,}200, & \dfrac{m}{R_c} = 0{,}137 + 0{,}010p + \beta(0{,}066p - 0{,}036) \\ u = 0{,}100, & \dfrac{m}{R_c} = 0{,}168 + 0{,}013p + \beta(0{,}120p - 0{,}041) \\ u = 0{,}050, & \dfrac{m}{R_c} = 0{,}185 + 0{,}0145p + \beta(0{,}153p - 0{,}042). \end{cases}$$

113. — Application I. — *De quelle surcharge est capable sur une portée de 2 mètres, une dalle de* $0^m{,}08$ *armée à la tension seulement, à raison de* 1 %. *On ne veut pas dépasser* 30 *kilogrammes pour le taux de travail du béton.*

Ces formules sont susceptibles d'autres transformations :

Donnons-nous β ; 1° $\beta = 0$ pour

$$u = 0{,}200, \qquad \frac{m}{R_c} = 0{,}137 + 0{,}010p.$$

D'où

$$M = mah^2 = ah^2(0{,}137 + p)R_c$$

en rétablissant pour p sa valeur absolue, soit $p = 0{,}01$ pour 1 %, ou

$$M = (0{,}137ah + s)hR_c$$
$$M = (0{,}137S + s)hR_c$$

en appelant S la section ah.

On trouverait de même pour

$$u = 0{,}100, \qquad M = (0{,}168S + 1{,}3s)hR_c$$
$$u = 0{,}050, \qquad M = (0{,}185S + 1{,}45s)hR_c.$$

Suivant la même marche, on aurait pour $\beta = 0{,}60$

$$u = 0.200, \quad M = (0{,}116S + 5s)hR_c$$
$$u = 0{,}100, \quad M = (0{,}143S + 8{,}5s)hR_c$$
$$u = 0{,}050, \quad M = (0{,}160S + 10{,}6s)hR_c$$

et pour $\beta = 1$

$$u = 0{,}200, \quad M = (0{,}101S + 7{,}6s)hR_c$$
$$u = 0{,}100, \quad M = (0{,}127S + 13{,}3s)hR_c$$
$$u = 0{,}050, \quad M = (0{,}143S + 18{,}7s)hR_c.$$

Remarque. — Ces formules ne sont guère valables qu'entre les limites $p = 0{,}02$ à $p = 0{,}04$ et si l'on se donne $p = 0{,}02$ et $p = 0{,}04$ ou $s = \frac{S}{50}$ et $s = \frac{S}{25}$ et qu'on admette en moyenne $u = 0{,}100$, on aurait pour $\beta = 0{,}60$

$$p = 0{,}02, \quad M = (0{,}143S + \frac{8{,}5}{50}S)hR_c = 0{,}313SR_ch$$

$$p = 0{,}04, \quad M = (0{,}143S + \frac{8{,}5}{5}S)hR_c = 0{,}483SR_ch.$$

Formule très suggestive, puisque le moment serait égal au produit de demi-section du béton (environ) par la hauteur de la poutre et le taux de travail admis.

On a trouvé pour $p = 0{,}01$, $\beta = 0$

$$\frac{m}{R_c} = 0{,}106.$$

D'où

$$m = 0{,}106R_c = 0{,}106 \times 30 = 3^{kg},18$$
$$M = 3{,}18h^2 = 3{,}18 \times 8^2 = 203 \text{ kilogrammètres}$$
$$M = 203 = (P + P')\frac{l^2}{8} = (P + P') \times \frac{2^2}{8}$$
$$P + P' = \frac{203 \times 8}{2^2} = 406 \text{ kilogrammes}$$

moins $\quad P = 0{,}08 \times 2500 = \underline{200}$ kilogrammes

$$P' = 206 \text{ kilogrammes}$$

On aura

$$R_p = 0{,}182 \times 30 = 5^{kg},46.$$

Application II. — *On suppose qu'on a projeté une dalle de* $0^m,08$ *armée à raison de* $1/2\ ^0/_0$ *pour une résistance normale de* $m = 6,72$, *dans l'hypothèse que le béton présentera à l'extension une résistance de* 20 *kilogrammes. On demande le travail du béton comprimé et du métal dans le cas où la résistance à l'extension du béton serait nulle.*

La valeur de $\frac{m}{R_c}$ pour $p = 0,005$ est de 0,087.

Il faut donc poser $0,087 R_c = 6,72$.

D'où

$$R_c = \frac{6,72}{0,087} = 77^{kg},20$$

$$R_F = 0,287 \times 77,20 = 22^{kg},16.$$

Application III. — *Déterminer une dalle devant supporter* 400 *kilogrammes de surcharge sur* $2^m,20$ *de portée, pour des taux de travail limites de* $R_c = 30$ *kilogrammes et* $R_F = 12$ *kilogrammes (acier).*

Essayant 0,10 d'épaisseur

$$P = 0,10 \times 2500 = 250 \text{ kilogrammes}$$
$$P' = 400 \quad »$$
$$P + P' = 650 \quad »$$

$$M = \frac{650 \times \overline{2.20}^2}{8} = 393 \text{ kilogrammètres}$$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{393}{\overline{10}^2 \times 30} = 0,131.$$

Comme on peut admettre $u = 0,200$, on trouve dans les tables précédentes que $\frac{m}{R_c} = 0,133$ pour $p = 0,01$.

On armera donc cette dalle à raison de $1\ ^0/_0$.

$R_F = 0,200 \times 30 = 6$ kilogrammes (inférieur à 12 kilogrammes).

Application IV. — *Calculer une dalle capable de* 1 000 *kilogrammes de surcharge sur* 4 *mètres de portée ; on ne veut pas dépasser* $R_c = 30$; $R_F = 12$ *kilogrammes.*

Essayant $h = 15$

$$P = 0{,}15 \times 2500 = 375 \text{ kilogrammes}$$
$$P' = 1000 \quad »$$
$$P + P' = 1375 \quad »$$

$$M = \frac{1375 \times 4^2}{8} = 2750 \text{ kilogrammètres}$$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{2750}{15^2 \times 30} = 0{,}407.$$

Consultant les tables ci-dessus, on voit que l'on ne peut réaliser une telle résistance, avec $0^m,15$ d'épaisseur, sans recourir à des barres comprimées.

Pour obtenir $\frac{m}{R} = 0{,}409$; il faut $p = 0{,}04$; $\beta = 1$.

On pourrait aussi supposer $h = 20$.

$$P = 0{,}20 \times 2500 = 500 \text{ kilogrammes}$$
$$P' = 1000 \quad »$$
$$P + P' = 1500 \quad »$$

$$M = \frac{1500 \times 4^2}{8} = 3000 \text{ kilogrammètres}$$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{3000}{20^2 \times 30} = 0{,}250.$$

Or les tables ci-dessus donnent $\frac{m}{R_c} = 0{,}256$ pour $p = 0{,}02$ et $\beta = 0{,}30$ ($u = 0{,}100$ ce qui est suffisant).

Quelle est la solution la plus économique ?

$$h = 15, \qquad 0{,}15 \times 80 = 12^{fr},»»$$
$$s = p \times 1500$$
$$s = 0{,}04 \times 1500 \times 0{,}30 = 18,\ »»$$
$$s' \quad » \quad = 18,\ »»$$
$$\text{barres de répartition } 2 \times 0{,}30 = 0,\ 60$$
$$48^{fr},60$$

$$h = 20, \qquad 0{,}20 \times 80 = 16^{fr},»»$$
$$s = 0{,}02 \times 2000 \times 0{,}30 = 12,\ »»$$
$$s' = 0{,}3 \times 0{,}02 \times 2000 \times 0{,}30 = 3,\ 60$$
$$\text{barres de répartition} \quad 0.\ 60$$

On obtiendrait des solutions plus économiques encore avec des épaisseurs plus fortes.

Nota. — Les prix indiqués ne doivent être considérés qu'au point de vue de la comparaison économique des solutions.

Application V. — *Déterminer une poutre capable d'une surcharge de* 2000 *kilogrammes par mètre courant sur une portée de* 6 *mètres. Limites de travail :* $R_c = 30$ *kilogrammes,* $R_F = 10$ *kilogrammes.*

Négligeant d'abord le poids mort, on a

$$M = \frac{2000 \times 6^2}{8} = 9000 \text{ kilogrammètres.}$$

Essayons $h = 30$, $a = 25$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{9000}{30^2 \times 30 \times 0,15} = \frac{M}{h^2 \times R_c \times \frac{a}{100}} = 2,222.$$

Cette valeur de $\frac{m}{R_c}$ étant trop forte, essayons

$$h = 40, \quad a = 25$$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{9000}{40^2 \times 30 \times 0,25} = 0,750.$$

On a trouvé pour $p = 0,04$

$$\frac{m}{R_c} = 0,220 + 0,439\beta = 0,750.$$

D'où

$$\beta = \frac{0,750 - 0,220}{0,439} = 1,21.$$

La valeur de β n'étant pas admissible, et le pourcentage p étant déjà trop élevé, on essaiera

$$h = 50, \quad a = 25$$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{9000}{50^2 \times 30 \times 0,25} = 0,480.$$

D'où pour $p = 0{,}04$

$$\beta = \frac{0{,}480 - 0{,}220}{0{,}439} = 0{,}592.$$

La poutre sera dès lors déterminée provisoirement comme suit :

$p = 0{,}04 \times 50 \times 25 = 50$ cmq. On prendra 3 ronds de $47 = 52{,}05$
$\beta = 50 \times 0{,}592 \quad = 29{,}6$ » » » $36 = 30{,}54$

Premières corrections. — L'épaisseur de $0^m{,}25$ est un peu juste pour 3 barres de 47, il faut au moins 0,26

$$\begin{aligned} 3 \times 4{,}7 &= 14{,}10 \\ 2 \text{ intervalles de } 4 &= 8{,}\text{»» } \\ 2 \text{ recouvrements extérieurs} &= \underline{3{,}90} \\ & \quad 26{,}\text{»» } \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} P = 50 \times 26 \times 0{,}25 &= 325 \text{ kilogrammes} \\ P' &= \underline{2\,000} \quad \text{»} \\ P + P' &= 2\,325 \quad \text{»} \end{aligned}$$

$$M = \frac{2\,325 \times 6^2}{8} = 10\,462 \text{ kilogrammètres}$$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{10\,462}{50^4 \times 30 \times 0{,}26} = 0{,}535.$$

Il faut au moins 4 centimètres de l'axe des armatures aux faces libres, d'où

$$u = \frac{4}{50} = 0{,}080$$

$$p = \frac{52{,}05}{50 \times 26} = 0{,}04$$

$$p' = \frac{30{,}54}{50 \times 26} = 0{,}0235$$

$$\beta = \frac{p'}{p} = \frac{0{,}0235}{0{,}04} = 0{,}59.$$

Or pour $u = 0{,}100$, on a

$$\frac{m}{R_c} = \begin{cases} 0{,}168 + 0{,}013p + \beta(0{,}120p - 0{,}036) \\ 0{,}168 + 4 \times 0{,}013 + 0{,}59(4 \times 0{,}120 - 0{,}0 \end{cases}$$

On a de même pour $u = 0{,}050$

$$\frac{R_c}{m} = 0{,}185 + 0{,}0145p + \beta(0{,}153p - 0{,}042).$$

$$= 0{,}185 + 4 \times 0{,}0145 + 0{,}59(4 \times 0{,}153 - 0{,}042) = 0{,}6$$

Interpolant, on trouverait pour $u = 0{,}080$

$$\frac{R_c}{m} = \frac{(0{,}629 - 0{,}479) \times 0{,}020}{0{,}050} + 0{,}479$$

$$= 0{,}479 + 0{,}60 = 0{,}539.$$

$$\frac{R_c}{m} = 0{,}539 \text{ au lieu de } 0{,}535.$$

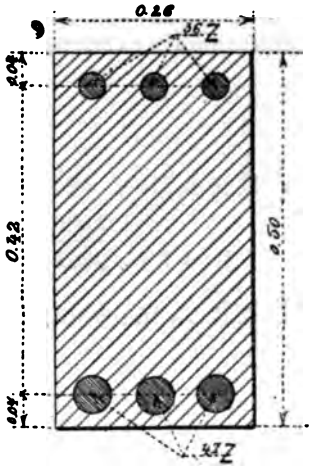


Fig. 173

Justification exacte. — On a projeté une poutre de 26 (fig. 173), on demande les taux exacts de fatigue des matér quand cette poutre est soumise à un moment de 10462 kilog mètres. Reprenons les formules générales

$$x^2 - 2\left[1 + np(1 + \beta)\right]x + 1 + 2np\beta + 2npu - 2np\beta u =$$

faisons

$$n = 20, \quad p = 0{,}04, \quad \beta = 0{,}59, \quad u = u' = 0{,}080$$

$$x^2 - 2(1 + 0{,}8 \times 1{,}59)x + 1 + 1{,}6 \times 0{,}59 + 1{,}6 \times 0{,}08 - 1{,}6 \times 0{,}59 \times 0.$$

$$x^2 - 2 \times 2{,}272x + 1{,}996 = 0$$

$$x = 0{,}493$$

l'équation des moments

$$\frac{m}{R_c} = \frac{(1-x)^2}{3} + 20p\beta\,\frac{(1-x-u)^2}{1-x} + 20p\,\frac{(x-u)^2}{1-x}$$

donne

$$\frac{R_c}{m} = \frac{(1-0{,}493)^2}{3} + 20 \times 0{,}04 \times 0{,}59\,\frac{(1-0{,}493-0.080)^2}{1-0{,}493}$$

$$+ 20 \times 0{,}04\,\frac{(0.493-0{,}080)^2}{1-0{,}493} = 0{,}0857 + 0{,}1697 + 0{,}2691 = 0{,}5245.$$

D'où

$$R_c = \frac{10\,462}{50^2 \times 0{,}26 \times 0{,}5245} = 30^{kg}{,}80 \text{ par centimètre carré}$$

$$R_F = \frac{20 \times 30{,}80}{100}\,\frac{0.493-0.080}{1-0{,}493} = 5^{kg}{,}01 \text{ par millimètre carré.}$$

$$R'_F = \frac{20 \times 30.80}{100}\,\frac{1-0{,}493-0.080}{1-0{,}493} = 5^{kg}{,}18 \qquad »$$

Application VI. — *On se contente d'un coefficient de sécurité de 2 par rapport à la limite d'élasticité du béton.* ($R_c = 47^{kg}{,}50$).

On suppose que l'on conserve le même équarrissage de manière à conserver le moment de 10462 kilogrammètres.

$$\frac{m}{R_c} = \frac{10\,462}{50^2 \times 47{,}50 \times 0{,}26} = 0{,}337$$

pour $p = 0{,}02$, $u = 0{,}100$, on a trouvé

$$\frac{m}{R_c} = 0{,}194 + 0{,}1993 = 0{,}337$$

$$\beta = \frac{0{,}337 - 0{,}194}{0{,}199} = 0{,}718.$$

D'où

$p = 50 \times 25 \times 0{,}02 = 25$ centimètres carrés : 3 ronds de $33 = 25{,}65$
$p' = 25 \times 0{,}718 \quad = 17{,}95 \quad$ » $\quad 3 \quad$ » $\quad 28 = 18{,}45$

Premières corrections. — On a supposé $u = 0{,}100$ et $u = 0{,}080$.

$$p = \frac{25{,}65}{50 \times 26} = 0{,}0197$$

$$\beta = \frac{18{,}45}{25{,}65} = 0{,}719$$

pour $u = 0,100$, on a

$$\frac{m}{R_c} = 0,168 + 2 \times 0,013 \times 0,719(2 \times 0,120 - 0,036) = 0,341$$

pour $u = 0,050$, on a

$$\frac{m}{R_c} = 0,185 + 2 \times 0,0145 + 0,719(2 \times 0,153 - 0,042) = 0,404.$$

Interpolant, on trouverait pour $u = 0,080$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{(0,404 - 0,341) \times 0,020}{0,050} + 0,341 = 0,366.$$

$$\frac{m}{R_c} = 0,366 \text{ au lieu de } 0,337.$$

Les sections des fers ont été un peu forcées; on pourrait réduire aussi l'épaisseur a; nous allons d'ailleurs faire la vérification exacte.

Justification exacte. — On a projeté une poutre de 26×50, avec 3 ronds à la compression de 28 et 3 ronds à la tension de 33, pour un moment de 10462 kilogrammètres, on demande les taux de travail des matières, pour

$$n = 20 ; \quad p = 0,0197 ; \quad \beta = 0,719 ; \quad u = u' = 0,080$$

$$x^2 - 2(1 + 0,394 \times 1,719) + 1 + 0,788 \times 0,719 + 0,788 \times 0,08 - 0,788 \times 0,719 \times 0,080 = 0$$

$$x^2 - 2 \times 1,677x - 1,586 = 0$$

$$x = 0,570$$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{0,430^2}{3} + 20 \times 0,0197 \times 0,719 \times \frac{0,350^2}{0,430} + 20 \times 0,0197 \times \frac{0,490^2}{0,430}$$

$$\frac{m}{R_c} = 0,0616 + 0,0862 + 0,200 = 0,348.$$

D'où

$$R_c = \frac{10462}{50^2 \times 0,26 \times 0,348} = 46^{kg},25 \text{ par centimètre carré}$$

$$R_F = \frac{20 \times 46,25}{100} \times \frac{0,490}{0,430} = 10^{kg},54 \text{ par millimètre carré}$$

$$R'_F = \frac{20 \times 46,25}{100} \times \frac{0,350}{0,430} = 7^{kg},53 \quad »$$

CHAPITRE IV

—

ÉLÉMENT DE PLANCHER NERVURÉ

$R_t = 20$

114. La valeur qui a été désignée par λ (voir fig. 174) est indéterminée dans ce sens que l'on ne sait pas *a priori* la fraction d'ailes dont le concours est efficace à la résistance de la nervure. Le problème se présente donc d'une façon complexe. Dans un premier essai, qui sera reproduit à l'annexe (chap. I), on a éliminé cette indétermination en recherchant un minimum certain de largeur d'aile efficace.

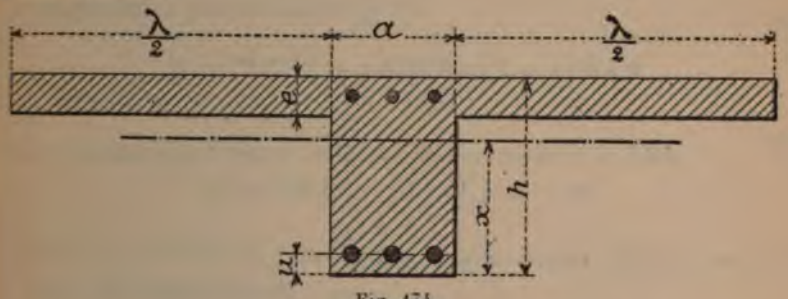


Fig. 174

Dans le présent chapitre, on a eu l'idée de simplifier le problème en se donnant une valeur moyenne de λ, et de rechercher les variations du moment de résistance du solide en fonctions des variations de λ en dessus en dessous de la valeur moyenne, quand on s'impose une valeur de R_p.

Dans ces conditions, la valeur de R_c est inconnue *a priori* ce qui empêche de se servir de l'équation en φ de la fibre neutre et oblige à recourir à l'équation en α. En effet $\frac{R_t}{R_p} = \alpha$ est connu

puisque l'on se donne à la fois la limite du taux de travail du béton et celle du métal à l'extension.

Ces formules ont été trouvées, page 364

$$(1-\alpha n)^2x^2 - 2\left[1 + e\lambda + n(p+p') - (1-\alpha n)\alpha n u\right]x$$
$$+ 1 + e\lambda(2-e) + 2n(p' - p'u' + pu) + \alpha^2 n^2 u^2 = 0.$$

$$\frac{M}{R_c} = \frac{1-x^2}{3} + \frac{e\lambda}{3}\left[\frac{e^2}{1-x} + 3(1-x-e\right] + np'\frac{(1-x-u')^2}{1-x}$$
$$+ np \times \frac{(x-u)^2}{1-x} + \varphi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{\varphi^2}{6}(1-x)^2\right].$$

Appliquons ces formules au cas moyen, ayant pour paramètres :

$$\alpha = \frac{R_t}{R_F} = \frac{20}{1300} = 0{,}01538\,; \quad \alpha n = 0{,}3076\,; \quad 1 - \alpha n = 0{,}6924$$

$$e = 0{,}25\,;\ \lambda = 15\,;\ n = 20\,;\ p = 0{,}03\,;\ p' = 0\,;\ u = 0{,}090 = u'$$

$$0{,}479x^2 - 2\left[1 + 0{,}25 \times 15 + 20 \times 0{,}03 - 0{,}6924 \times 0{,}01538 \times 20 \times 0{,}090\right]x$$
$$+ 1 + 0{,}25 \times 15(2 - 0{,}25) + 2 \times 20 \times 0{,}03 \times 0{,}090$$
$$+ (20 \times 0{,}09 \times 0{,}01538)^2 = 0$$

ou

$$0{,}479x^2 - 2 \times 5{,}3308x + 7{,}67127 = 0,$$

ou

$$x^2 - 2 \times 11{,}12x + 16{,}001 = 0,$$
$$x = 0{,}745$$
$$1 - x = 0{,}255$$
$$x - u = 0{,}655$$
$$R_c = \frac{R_F}{20} \times \frac{0{,}255}{0{,}655}$$

et pour

$$R_F = 1300 \qquad R_c = 25^k{,}31$$

$$\varphi = \frac{R_t}{R_c} = \frac{20}{25{,}31} = 0{,}7902$$

$$\varphi^2 = 0{,}624\,; \qquad \frac{\varphi^2}{6} = 0{,}104.$$

On peut alors calculer $\frac{m}{R_c}$ comme suit :

$$\frac{(1-x)^2}{3} = \frac{\overline{0,255}^2}{3} = 0,0217$$

$$\frac{e\lambda}{3}\left[\frac{e^2}{1-x} + 3(1-x-e)\right] = 1,25\left[\frac{0,0625}{0,255} + 3(0,255-0,250)\right] = 0,3250$$

$$np\,\frac{(x-u)^2}{1-x} = 20 \times 0,03 \times \frac{\overline{0,655}^2}{0,255} = 1,0094$$

$$\varphi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{\varphi^2}{6}(1-x)^2\right] = 0,7902\left[\frac{\overline{0,745}^2}{2} - 0,104 \times \overline{0,255}^2\right] = 0,2139$$

$$\frac{m}{R_c} = 1,5700$$

D'où

$$m = 1,57 \times 25,31 = 39^k,74$$

$$M = \frac{mah^2}{100} = \frac{39,74 \times a \times h^2}{100}$$

remplaçant a par sa valeur $\frac{s}{ph}$ [1]

$$M = \frac{39,74\,sh}{100p}$$

et comme on a trouvé cette expression pour $p = 0,03$,

$$M = 13,25\,sh$$

pour $R_t = 20$ alors que toutes autres choses égales, on trouvera (chapitre suivant)

$$M = 10,86\,sh$$

pour $R_t = 0$.

Admettant provisoirement que cette expression moyenne de la résistance s'applique sans erreur notable par excès à toutes autres valeurs des paramètres, on pourra dire, si l'on calcule une poutre

[1] Ne pas oublier que le pourcentage p s'entend ici, la totale des armatures tendues à la section de béton comp teur h et de largeur a de nervure, quelle que soit l'étend seur du hourdis.

à simple té à l'aide de cette expression $M = 13,25\,sh$, que le taux de travail du métal ne dépassera guère 13^k par millimètre carré, que celui du béton comprimé ne dépassera guère $47^k,50$ et que par suite la poutre sera calculée avec un coefficient de sécurité de 2, par rapport aux limites d'élasticité des matières. Si l'on désire un coefficient de sécurité de 2,5 ou de 3, si l'on ne veut pas, autrement dit, dépasser $10^k,4$ pour le métal et respectivement $8^k,67$, il n'est pas dores et déjà prouvé qu'il suffira de réduire dans le rapport correspondant la caractéristique 13,25 trouvée plus haut.

Le premier soin va être de s'en assurer.

A cet effet, on reprendra les équations précédentes, en faisant cette fois :

$R_r = 10^k,40$

$$\alpha = \frac{20}{1040} = 0,01923$$
$$\alpha n = 0,3846$$
$$1 - \alpha n = 0,6154$$
$$(1 - \alpha n)^2 = 0,3787$$
$$x^2 - 2 \times 14,071\,x + 20,258 = 0$$
$$x = 0,739$$
$$1 - x = 0,261$$
$$x - u = 0,649$$
$$R_c = \frac{1040}{20} \times \frac{0,261}{0,649} = 20^k,91$$
$$\varphi = \frac{20}{20,91} = 0,9565$$
$$\frac{c^2}{6} = 0,152$$
$$\frac{m}{R_c} = \left\{\begin{array}{l} 0,0227 \\ 0,3406 \\ 0,9683 \\ 0,2511 \\ \hline 1,5823 \end{array}\right.$$
$$m = 1,5823 \times 20,91 = 33^k,08$$

et par suite

$$M = 11,03\,sh$$

au lieu de

$$\frac{2}{2,5} \times 13,25 = 10,60$$

pour

$R_r = 10^k,4$ millimètre carré

$R_c = 20^k,91$ centimètre carré

au lieu de

$$\frac{2}{2,50} \times 47,50 = 38$$

$R_r = 867^k$

$$\alpha = \frac{20}{867} = 0,02307$$
$$\alpha n = 0,4614$$
$$1 - \alpha n = 0,5386$$
$$(1 - \alpha n)^2 = 0,2901$$
$$x^2 - 2 \times 18,305\,x + 26,446 = 0$$
$$x = 0,735$$
$$1 - x = 0,265$$
$$x - u = 0,645$$
$$R_c = \frac{867}{20} \times \frac{0,265}{0,645} = 17^k,81$$
$$\varphi = \frac{20}{17,81} = 1,123$$
$$\frac{c^2}{6} = 0,510$$
$$\frac{m}{R_c} = \left\{\begin{array}{l} 0,0234 \\ 0,3510 \\ 0,9419 \\ 0,3017 \\ \hline 1,6180 \end{array}\right.$$
$$m = 1,6180 \times 17,81 = 28,82$$

et par suite

$$M = 9,61\,sh$$

au lieu de

$$\frac{2}{3} \times 13,25 = 8,83$$

pour

$R_r = 8^k,67$ millimètre carré

$R_c = 17^k,81$ centimètre carré

au lieu de

$$\frac{2}{3} \times 47,50 = 31,67$$

Ce qui montre : 1° que c'est bien la limite R_F qui fixe le coefficient de sécurité dans le cas des poutres à simple té.

2° Que la caractéristique augmente quand on abaisse les limites admises pour les travaux des matières.

On pourra, par suite, admettre l'expression générale

$$M = \frac{13,25}{13} R_F sh \text{ et } a\ fortiori\ R_F sh,$$

R_F représentant la limite que l'on s'impose en millimètres carrés pour le métal et le coefficient de sécurité étant $\frac{26}{R_F}$.

L'expression $M = R_F sh$ ne s'applique exactement qu'aux paramètres moyens choisis plus haut et le coefficient de sécurité de 2 ; on vient de voir que l'erreur commise pour des coefficients de sécurité supérieurs à 2 était par défaut, c'est-à-dire favorable à la résistance. Il s'agit maintenant de faire la même recherche pour les variations des autres facteurs.

Variation de u

$$u = 0,03 \qquad 0,090 \qquad u = 0,200$$

$$\alpha = \frac{20}{1300} = 0,00538 ; \quad \alpha n = 0,3076 ; \quad 1 - \alpha n = 0,6924$$

$$(1 - \alpha n)^2 = 0,4794 ; \quad (1 - \alpha n)\alpha n = 0,213 ; \quad \alpha^2 n^2 = 0,0946$$

$$e = 0,25 ; \quad \lambda = 15 ; \quad n = 20 ; \quad p = 0,03 ; \quad p' = 0,$$

soit pour

$$u = 0,03 ; \quad (1 - \alpha n)\alpha n u = 0,00639 ; \quad \alpha^2 n^2 u^2 = 0,0000851$$
$$u = 0,200 \qquad = 0,0426 ; \qquad = 0,00378.$$

L'équation relative à $u = 0,03$ devient :

$$0,479 x^2 - 2[1 + 0,25 \times 15 + 20 \times 0,03 - 0,0192] x + 1$$
$$+ 0,25 \times 15(2 - 0,25) + 2 \times 20 \times 0,03 \times 0,03 + 0,0000851 = 0$$

ou

$$0,479 x^2 - 2 \times 5,3436 x + 7,59858 = 0$$
$$x^2 - 2 \times 11,155 x + 15,863 = 0$$
$$x = 0,735.$$

On aurait de même pour $u = 0,200$

$$0,479\,x^2 - 2 \times (5,35 - 0,0426)x + 7,5625 + 0,240 + 0,00378 = 0$$

ou

$$x^2 - 2 \times 11,080\,x + 16,297 = 0$$
$$x = 0,753.$$

D'où successivement :

	$u = 0,030$	$u = 0,090$	$u = 0,200$
$x =$	0,735	0,745	0,753
$1 - x =$	0,265	0,255	0,247
$x - u =$	0,705	0,655	0,553
$R_c =$	$24^k,43$	$25^k,31$	$29^k,03$
$\varphi =$	0,818	0,790	0,689
$\frac{\varphi^2}{6} =$	0,1115	0,104	0,079
$\frac{m}{R_c} =$	0,023	0,0217	0,020
	0,351	0,3250	0,305
	1,125	1,0094	0,743
	0,214	0,2139	0,192
	1,713	1,5700	1,260
$m =$	$41^k,85$	$39^k,74$	$36^k,58$

Quand la valeur de u augmente :

La fibre neutre s'élève.

Le taux de travail du béton comprimé s'élève, mais reste cependant dans des limites convenables.

La résistance diminue, mais l'erreur par défaut n'est que de $\frac{39,74 - 36,58}{36,58} = 8,65\,\%$ pour la limite extrême $u = 0,200$ qui ne s'applique qu'aux poutres excessivement basses. A rappeler que le taux de travail a été supposé constant et égal à 13^k par millimètre carré.

Variations de λ

$$\lambda = 5 \qquad \lambda = 15 \qquad \lambda = 25$$

$$\alpha = \frac{20}{1\,300} = 0,01538 : \quad \alpha n = 0,3076 ; \quad 1 - \alpha n = 0,6924$$

$$(1 - \alpha n)^2 = 0,4794 ; \quad (1 - \alpha n)\alpha n u = 0,01917 ; \quad \alpha^2 n^2 u^2 = 0,00766$$

$$e = 0,25 ; \quad n = 20 ; \quad p = 0,03 ; \quad p' = 0 ; \quad R_t = 20.$$

Soit pour $\lambda = 5$,

$$0{,}479\,x^2 - 2\left[1 + 1{,}25 + 0{,}60 - 0{,}01917\right]x + 1 + 1{,}25 \times 1{,}75 + 0{,}108 + 0{,}00766 = 0$$

$$x^2 - 2 \times 5{,}91\,x + 6{,}8815 = 0$$

$$x = 0{,}614.$$

Et pour $\lambda = 25$,

$$0{,}479\,x^2 - 2\left[1 + 0{,}60 - 0{,}01917 + 6{,}25\right]x + 1 + 6{,}25 \times 1{,}75 + 0{,}108 + 0{,}00766 = 0$$

$$x^2 - 2 \times 16{,}348 + 25{,}148 = 0$$

$$x = 0{,}788.$$

D'où successivement :

	$\lambda = 5$	$\lambda = 15$	$\lambda = 25$
$x =$	0,614	0,745	0,788
$1 - x =$	0,386	0,255	0,212
$x - u =$	0,524	0,655	0,698
$R_e =$	47,88	25,31	19,74
$\frac{m}{R_e} =$	0,050	0,022	0,015
	0,238	0,325	0,414
	0,426	1,009	1,379
	0,032	0,214	0,307
	0,746	1,570	2,115
$m =$	35,72	39,74	41,65

Quand la valeur de λ augmente :

La fibre neutre s'élève.

Le taux de travail du béton comprimé s'abaisse rapidement ; il ne dépasse à peine le maximum permis, $47^k,50$, pour une sécurité de 2 que pour $\lambda = 5$, c'est-à-dire pour un minimum qui ne se présente pas généralement et alors l'on peut prévoir les armatures comprimées.

La résistance augmente sensiblement ; l'erreur par défaut maximum est de $\frac{39{,}74 - 35{,}72}{35{,}72} = 11{,}30\ \%$; elle ne se produit que pour des écartements de nervure très faibles,
comme on vient de le dire, on prévoit des armatu

Variations de e

$$e = 0{,}05 \qquad e = 0{,}50$$
$$(1 - \alpha n)\alpha n u = 0{,}01917\,; \quad \alpha^2 n^2 u^2 = 0{,}00766$$
$$\lambda = 15\,; \quad n = 20\,; \quad p = 0{,}03\,; \quad p' = 0\,; \quad R_t = 20.$$

Soit pour $e = 0{,}05$,

$$0{,}479\,x^2 - 2\left[1 + 0{,}75 + 0{,}60 - 0{,}01917\right]x + 1 + 0{,}75 \times 1{,}95 + 0{,}108 + 0{,}00766 = 0$$
$$x^2 - 2 \times 4{,}866\,x + 5{,}382 = 0\,; \qquad x = 0{,}589.$$

On trouverait de même pour $e = 0{,}50$,

$$0{,}479\,x^2 - 2 \times \left[1 + 7{,}50 + 0{,}60 - 0{,}01917\right]x + 1 + 7{,}50 \times 1{,}50 + 0{,}108 + 0{,}00766 = 0$$
$$x^2 - 2 \times 18{,}957 + 25{,}815 = 0\,; \qquad x = 0{,}694.$$

On trouve ainsi pour

	$e = 0{,}05$	$e = 0{,}20$	$e = 0{,}25$	$e = 0{,}30$	$e = 0{,}50$
$x =$	0,589	0,737	0,745	0,743	0,694
$1 - x =$	0,411	0,263	0,255	0,257	0,306
$x - u =$	0,499	0,647	0,655	0,653	0,604
$R_c =$	53k,53	26k,42	25k,31	25k,58	32k,93
$\frac{m}{R_c} =$	0,056	0,023	0,022	0,022	0,031
	0,817	0,311	0,325	0,331	1,762
	0,363	0,955	1,009	0,995	0,715
	0,064	0,201	0,214	0,171	0,251
	1,300	1,520	1,570	1,519	2,759
$m =$	77,39	40,15	39,74	38,86	90,91

Quand e augmente ou diminue à partir de $e = 0{,}25$:

La fibre neutre s'abaisse.

Le taux de travail du béton s'accroît, surtout quand e diminue et peut même dépasser les limites attendues (53,53 au lieu de 47,50) pour de très faibles épaisseurs, $\frac{1}{20}$ de la hauteur. Dans ces cas exceptionnels, il y aurait lieu de prévoir des armatures comprimées.

Mais la résistance augmente par contre considérablement, de sorte que tout compte fait, comme on n'a pris que 39,74 au lieu de 77,39, comme résistance unitaire, la fatigue du béton comprimé est presque réduite de moitié.

Pour les épaisseurs les plus courantes en-dessous de la moyenne $e = 0{,}20$ et $e = 0{,}30$ par exemple, l'erreur par défaut peut atteindre $\frac{39{,}74 - 38{,}86}{38{,}86} = 2{,}27\ \%$.

Variations de p

$$p = 0{,}01 \qquad p = 0{,}06$$

$$(1 - \alpha n)\alpha n u = 0{,}01917\,; \qquad \alpha^2 n^2 u^2 = 0{,}00766$$

$$\lambda = 15\,; \quad e = 0{,}25\,; \quad n = 20\,; \quad p = 0\,; \quad R_t = 20.$$

Soit pour $p = 0{,}01$,

$$0{,}479\,x^2 - 2\left[1 + 3{,}75 + 0{,}20 - 0{,}019\right]x + 1 + 3{,}75 \times 1{,}75 + 0{,}036 + 0{,}00766 = 0$$

$$0{,}479\,x^2 - 2 \times 10{,}294\,x + 15{,}865 = 0\,; \qquad x = 0{,}802.$$

Et pour $p = 0{,}06$

$$0{,}479\,x^2 - 2\left[1 + 3{,}75 + 1{,}20 - 0{,}019\right]x + 1 + 3{,}75 \times 1{,}75 + 0{,}216 + 0{,}00766 = 0$$

$$x^2 - 2 \times 12{,}382\,x + 16{,}241 = 0\,; \qquad x = 0{,}674.$$

Ces valeurs de x, ainsi que $x = 0{,}771$ pour $p = 0{,}02$ et pour $x = 0{,}721$ pour $p = 0{,}04$, permettent de tracer le tableau suivant :

	$p = 0{,}01$	$p = 0{,}02$	$p = 0{,}03$	$p = 0{,}04$	$p = 0{,}06$
$x =$	0,802	0,771	0,745	0,721	0,674
$1 - x =$	0,198	0,229	0,255	0,279	0,326
$x - u =$	0,712	0,681	0,655	0,631	0,584
$R_c =$	18,08	21,83	25,31	28,74	36,28
$\frac{m}{R_c} =$	0,013	0,017	0,022	0,026	0,039
	0,202	0,262	0,325	0,389	0,511
	0,512	0,810	1,009	1,141	1,255
	0,347	0,265	0,214	0,176	0,122
	1,074	1,354	1,570	1,732	1,927
$m =$	19,42	29,60	39,74	[illegible]	69,91
$\frac{m}{p} =$	19,42	14,80			11,65

Quand le pourcentage augmente :

La fibre neutre s'abaisse.

Le taux de travail du béton comprimé, s'élève mais reste fort en dessous des limites que l'on s'est données.

La résistance augmente à peu près proportionnellement au pourcentage mais un peu moins vite. En admettant la formule moyenne $M = 13{,}25\,sh$, on commet donc une erreur par défaut dès que l'on dépasse 3 %, et cette erreur atteint

$$\frac{13{,}25 - 11{,}65}{11{,}65} = 13{,}70\ \%$$

pour les pourcentages extrêmes, et

$$\frac{13{,}25 - 12\ 45}{12{,}45} = 6{,}40\ \%$$

pour le pourcentage déjà si fort de 4 %.

Variations de β

$$\beta = 0{,}50 \qquad \beta = 1$$

$$\lambda = 15\,; \qquad e = 0{,}25\,; \qquad u = 0{,}090\,; \qquad p = 0{,}03\,; \qquad n = 20.$$

$$\beta = 0{,}50 \qquad p' = 0{,}015$$

$$0{,}479\,x^2 - 2\left[1 + 3{,}75 + 20\,(0{,}03 + 0{,}015) - 0{,}019\right]x + 1 + 3{,}75 \times 1{,}75 + 0{,}000767 + 0{,}654 = 0$$

$$x^2 - 2 \times 11{,}755\,x - 17{,}155 = 0\,;$$

$$x = 0{,}753.$$

$$\beta = 1 \qquad p' = 0{,}03$$

$$0{,}479\,x^2 - 2\left[1 + 3{,}75 + 20\,(0{,}03 + 0{,}03) - 0{,}019\right]x + 1 + 3{,}75 \times 1{,}75 + 0{,}000767 + 1{,}20 = 0$$

$$x^2 - 2 \times 12{,}382 - 18{,}292 = 0\,;$$

$$x = 0{,}762.$$

Soit pour :

	$\beta = 0$	$\beta = 0,50$	$\beta = 1$
$x =$	0,745	0,753	0,762
	0,255	0,247	0,238
	0,655	0,663	0,672
$R_e =$	25,31	24,21	23,02
$\frac{m}{R_e} =$	0,022	0,020	0,019
	0,325	0,304	0,285
	1,009	1,068	1,138
	0,000	0,030	0,055
	0,214	0,228	0,246
	1,570	1,650	1,743
	39,74	39,95	40,12

Quand β augmente :

La fibre neutre s'élève.

Le taux de travail du béton diminue légèrement.

La résistance augmente d'une façon si peu importante que l'on peut la déterminer avec une grande approximation avec l'expression moyenne $M = Rsh$, trouvée plus haut pour $\beta = 0$.

En résumé :

1° Le moment de résistance d'un élément de plancher nervuré peut être pris avec une approximation suffisante égal à 13,25 p, p étant exprimé en unités de pourcentage, pour un travail du métal de 1 300 kilogrammes par cm², et si l'on admet un travail du béton à l'extension de $R_t = 20$ kilogrammes.

2° La fatigue du béton à la compression reste moindre, relativement aux limites d'élasticité.

Ici on aura avec une approximation moindre que dans le cas suivant $R_t = 0$ le moment unitaire correspondant à un travail $K \times 1\,300$ kilogrammes pour le métal ; c'est-à-dire que le moment sera approximativement seulement $K \times 13,25\ p$, K étant égal à 2/3 par exemple, si l'on veut disposer d'un coefficient de sécurité de 3 au lieu de 2 par rapport à la limite d'élasticité du métal.

Le graphique (fig. 175) résume d'ailleurs bien les influences de la variation des divers facteurs de la résistance.

Ce graphique a été obtenu de la façon suivante :

Portant les valeurs de $\lambda = 5$, 15, 25 en abscisses, et en ordonnées les moments unitaires correspondants, on obtient la ligne λ, dont les ordonnées augmentent d'abord proportionnellement puis un peu moins vite.

Portant de même les valeurs des moments unitaires répondant

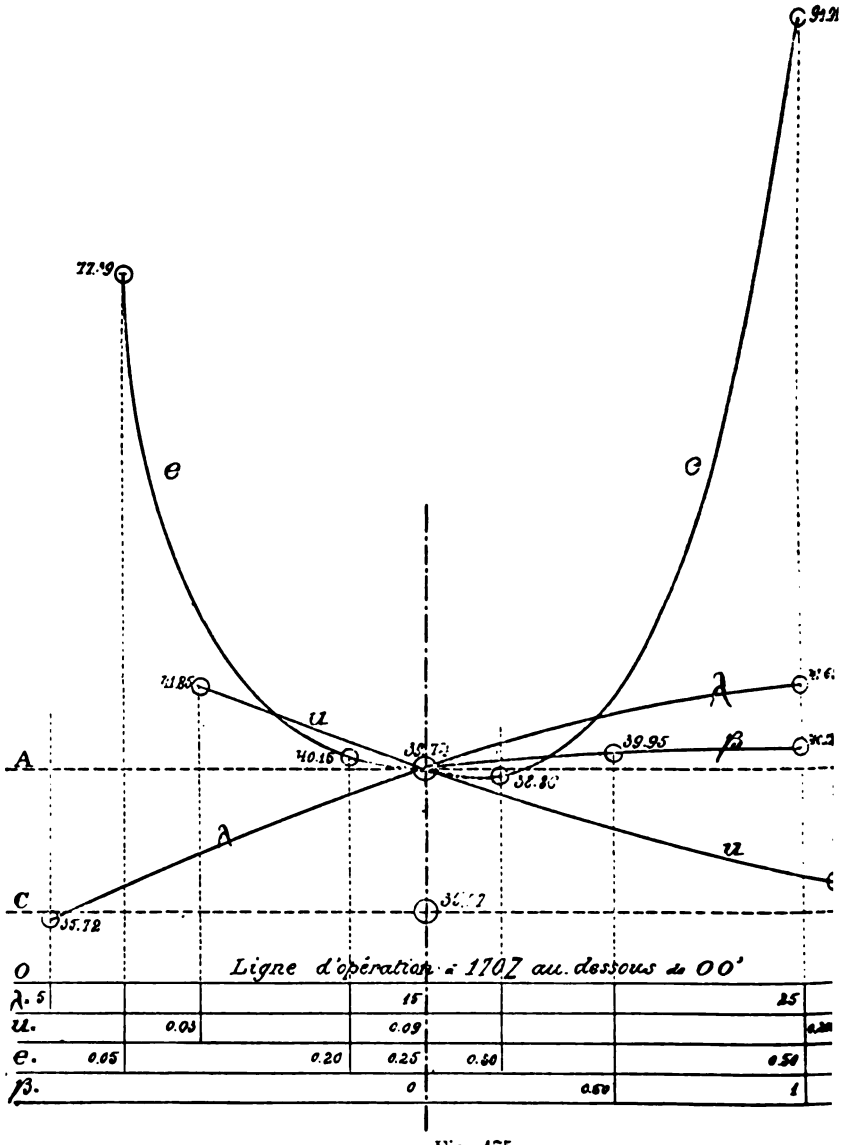


Fig. 175

à diverses valeurs de e, on obtient une courbe très aplatie de 0,20 à 0,30 et qui s'élève rapidement pour des valeurs moindres de e, plus rapidement encore pour des valeurs supérieures à 0,30.

La courbe des moments unitaires augmente proportionnellement quand u diminue, et diminue un peu moins vite quand u augmente.

Enfin la courbe des moments relatifs à β est sensiblement une droite s'écartant très peu d'une parallèle à l'axe des t, et montrant le peu d'intérêt à recourir à une armature comprimée.

La parallèle CD à l'axe des x, ayant pour ordonnée 35,77, soit l'ordonnée moyenne diminuée de 10 %, se trouve toujours au-dessous des valeurs extrêmes des divers facteurs, ce qui montre que l'erreur par défaut commise en prenant $m = 13,25\,p$, n'atteint jamais 10 %.

Les moments unitaires en fonction du pourcentage n'ont pas été représentés dans le graphique. Ils sont à peu près proportionnels ; ils augmentent cependant quand le pourcentage diminue ; c'est là une propriété caractéristique du concours apporté par le béton tendu.

On admettra donc la formule

$$m = 13,25\,p = \frac{M \times 100}{ah^2}$$

si l'on prend pour unité de p, le centième :

$$0,03 \qquad 3\,\% \qquad p = 3.$$

Si au contraire on conserve pour p sa valeur absolue

$$13,25\,p = \frac{100\,M}{ah^2}$$

et comme

$$p = \frac{s}{ah}$$

s étant la section des armatures tendues, exprimée en centimètres carrés

$$13,25\,\frac{s}{ah} \times ah^2 = 100\,M$$

$$M = 13,25\,sh$$

formule dans laquelle h est la hauteur totale de l'élément de plancher nervuré, de la face comprimée extrême du hourdis à la face tendue extrême de la nervure, y compris le béton qui recouvre les armatures. Cette expression répond à $R_F = 1300$ kilogrammes.

Quant à R_c, on a vu que sa valeur pour le cas moyen est de $25^k,31$ pour $p = 0,03$.

Si au lieu de partir de $R_F = 1300$ kilogrammes, répondant à un coefficient de sécurité de 2 par rapport à la limite d'élasticité du métal, on était parti de $R = 1040$ kilogrammes, répondant au coefficient de sécurité 2,5, on aurait trouvé pour le même cas moyen :

$$e = 0,25 ; \quad \lambda = 15 ; \quad n = 20 ; \quad p = 0,03 ; \quad p' = 0 ;$$
$$u = 0,090$$

et toujours $R_t = 20$ kilogrammes.

$$\alpha = 0,01923 ; \quad \alpha n = 0,3846 ; \quad \alpha n u = 0,0346 ;$$
$$\alpha^2 n^2 u^2 = 0,0012 ; \quad 1 - \alpha n = 0,6154 ; \quad (1 - \alpha n)^2 = 0,379 ;$$
$$(1 - \alpha n) \times \alpha n u = 0,0213.$$

L'équation de la fibre neutre devenait :

$$0,379\, x^2 - 2\,(1 + 0,25 \times 15 + 20 \times 0,03 - 0,0213)\, x + 1 + 0,25$$
$$\times 15 \times 1,75 + 2 \times 20 \times 0,03 \times 0,090 + 0,0012 = 0$$

ou

$$x^2 - 2 \times 14,06\, x + 20,24 = 0 ;$$
$$x = 0,740 ; \quad 1 - x = 0,260 ; \quad x - u = 0,650 ;$$
$$R_c = \frac{1\,040}{20} \times \frac{0,260}{0,650} = 20^k,80 ;$$
$$\varphi = \frac{20}{20,80} = 0,962 ; \quad \frac{\varphi^2}{6} = 0,154 ;$$
$$\frac{m}{R_c} = \frac{\overline{0,260}^2}{3} + 1,25 \left[\frac{\overline{0,25}^2}{0,260} + 3\,(0,260 - 0,250)\right] + 20 \times 0,03$$
$$\times \frac{\overline{0,650}^2}{0,260} + 0,962 \left(\frac{\overline{0,740}^2}{2} - 0,154 \times \overline{0,260}^2\right);$$
$$\frac{m}{R_c} = 0,022 + 0,337 + 0,975 + 0,234 = 1,568 ;$$
$$m = 1,568\, R_c = 1,568 \times 20,80 = 32,61.$$

De même si l'on était parti de $R_F = 866,7$ répondant à un coefficient de sécurité de 3 par rapport à la limite d'élasticité du métal, on aurait obtenu, pour le même cas moyen :

$$e = 0,25; \quad \lambda = 15; \quad n = 20; \quad p = 0,03; \quad p' = 0;$$
$$u = 0,090$$

et toujours $R_t = 20$.

$$\alpha = 0,02307; \quad \alpha n = 0,46136; \quad \alpha nu = 0,0415;$$
$$\alpha^2 n^2 u^2 = 0,0017; \quad 1 - \alpha n = 0,5386; \quad (1 - \alpha n)^2 = 0,290;$$
$$(1 - \alpha n)\, \alpha nu = 0,0224.$$

L'équation de la fibre neutre devenait :

$$0,290\, x^2 - 2\,(1 + 0,25 \times 15 + 20 \times 0,03 - 0,0224)\, x + 1 + 0,25$$
$$\times 15 \times 1,75 + 2 \times 20 \times 0,03 \times 0,090 + 0,0017 = 0$$

ou

$$x^2 - 2 \times 18,37\, x + 26,45 = 0;$$
$$x = 0,735; \quad 1 - x = 0,265; \quad x - u = 0,645;$$
$$R_c = \frac{866,7}{20} \times \frac{0,265}{0,645} = 17^k,80;$$
$$\varrho = \frac{20}{17,80} = 1,124; \qquad \frac{\varrho^2}{6} = 0,210;$$
$$\frac{m}{R_c} = \frac{\overline{0,265}^2}{3} + 1,25 \left[\frac{\overline{0,25}^2}{0,265} + 3\,(0,265 - 0,250)\right] + 20 \times 0,03$$
$$\times \frac{\overline{0,645}^2}{0,265} + 1,124 \left(\frac{\overline{0,735}^2}{2} - 0,210 \times \overline{0,265}^2\right);$$
$$\frac{m}{R_c} = 0,023 + 0,350 + 0,942 + 0,287 = 1,602;$$
$$m = 1,602 \times 17,80 = 28,52.$$

Suivant la même marche de calcul que pour $R_F = 1\,300$ kilogrammes, valeur pour laquelle on a trouvé

$$M = 13,25\, sh \qquad (R_F = 1\,300^k)$$

dont le coefficient est obtenu en divisant par p le moment unitaire trouvé de 39,74 pour $p = 3$, on pourra poser :

$$M = 10,87 \qquad (\text{pour } R_F = 1040)$$

en divisant par $p = 3$ le moment unitaire de 32,61 trouvé ci-dessus. Et de même

$$M = 9{,}51\ sh \qquad (\text{pour } R_F = 1\,040)$$

en divisant par $p = 3$ le moment unitaire de 28,52 trouvé en dernier lieu pour un coefficient de sécurité de 3.

Divisant maintenant ces coefficients

13,25	10,87	9,51

respectivement par

13^k	10,4	8,67

on trouve

1,02	1,04	1,10

ce qui montre que dans le cas où l'on ne néglige pas la résistance du ciment à l'extension, la résistance n'est pas rigoureusement proportionnelle au taux de travail du métal; si l'on augmente ce taux de 8,67 à 13 kilogrammes, c'est-à-dire de 50 %, la résistance n'augmente que de

$$\frac{13{,}25 - 9{,}51}{9{,}51} = 39{,}40\ \%.$$

115.—Application I.— *Un élément de plancher de 3 mètres* $\times 6^m{,}50$ *avec hourdis de* $0^m{,}11$ *et nervure de* $0^m{,}16$ *de largeur et de* $0^m{,}40$ *de hauteur, a été armé à la tension de 2 barres rondes de 35 millimètres de diamètre, dont l'axe se trouve à* $0^m{,}05$ *de la face tendue extrême; on demande le travail du métal sous une charge de 400 kilogrammes et pour une portée de 6,50* (v. *fig.* 176).

a) *Calcul rapide.* — On a $R_t = 0$, $s = 19{,}24$ et $h = 51$

Volume du hourdis $= 0{,}11 \times 3 \quad = 0{,}330$

Volume de la nervure $= 0{,}15 \times 0{,}40 = 0{,}064$

$\overline{0{,}394}$

Poids mort $\quad P = 0{,}394 \times 2\,500 = \quad 985$ kilogrammes

Surcharge $\quad P' = 3 \times 400 \quad = 1\,200$ »

$P + P' = 2\,185$ »

$$M = \frac{2\,185 \times \overline{6{,}5}^2}{8} = 11\,540 \text{ kilogrammètres.}$$

Pour

$R_F = 1\,300^k \quad M = 13{,}25sh = 13{,}25 \times 19{,}24 \times 51 = 13\,001^{kgm}$

$R_F = 1\,040^k \quad M = 10{,}87sh = 10{,}87 \times 19{,}24 \times 51 = 10\,666$ »

Une interpolation donne par millimètre carré

$$R_F = 10{,}40 + \frac{(11\,540 - 10\,666)\,(13 - 10{,}40)}{13\,001 - 10\,666}$$

$$R_F = 10{,}4 + 0.96 = 11{,}36.$$

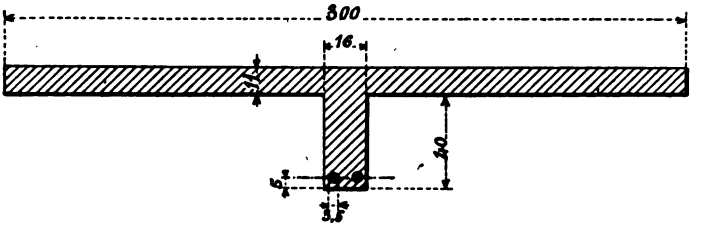


Fig. 176

b) *Calcul exact.* — Les formules précédentes ont été établies avec des paramètres moyens mentionnés plus haut ; il y a lieu de rechercher ici par la même méthode les formules correspondantes, relatives à

$$e = \frac{11}{51} = 0{,}216\,; \qquad u = \frac{5}{51} = 0{,}098$$

$$\lambda = \frac{300 - 16}{10} = 17{,}75\,; \qquad p = \frac{19{,}24}{16 \times 51} = 0{,}0236\,; \qquad p' = 0$$

$$n = 20\,; \qquad R_t = 20.$$

1° *En partant de* $R_F = 1\,300$ kilogrammes

$$\alpha = \frac{20}{1\,300} = 0{,}01538$$

$$\alpha n = 20 \times 0{,}01538 = 0{,}3076\,; \qquad \alpha nu = 0{,}3076 \times 0{,}098 = 0{,}0301$$

$$\alpha^2 n^2 u^2 = \overline{0{,}0301}^2 = 0{,}0009$$

$$1 - \alpha n = 1 - 0{,}3076 = 0{,}6924\,; \qquad (1 - \alpha n)^2 = 0{,}479$$

$$(1 - \alpha n)\alpha nu = 0{,}6924 \times 0{,}0301 = 0{,}0208$$

$$0{,}479x^2 - 2(1 + 0{,}216 \times 17{,}75 + 20 \times 0{,}0236 - 0{,}0208)\,x$$
$$+ 1 + 0{,}216 \times 17{,}75 \times (2 - 0{,}0216)$$
$$+ 2 \times 20 \times 0{,}0236 \times 0{,}098 + 0{,}0009 = 0$$

ou

$$x^2 - 2 \times 11{,}033 + 16{,}558 = 0$$

d'où

$$x = 0{,}778$$

$$1 - x = 0{,}222$$

$$x - u = 0{,}680$$

$$R_c = \frac{1\,300}{20} \times \frac{0{,}222}{0{,}680} = 21^{kg},22$$

$$\varphi = \frac{20}{21{,}22} = 0{,}942$$

$$\frac{\varphi^2}{6} = 0{,}148$$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{\overline{0{,}222}^2}{3} + \frac{0{,}216 \times 17{,}75}{3}\left[\frac{\overline{0{,}216}^2}{0{,}222} + 3(0{,}222 - 0{,}216)\right]$$

$$+ 20 \times 0{,}0236 \times \frac{\overline{0{,}680}^2}{0{,}222} + 0{,}942\left(\frac{\overline{0{,}778}^2}{2} - 0{,}148 \times \overline{0{,}222}^2\right)$$

$$\frac{m}{R_c} = 0{,}01643 + 0{,}29158 + 0{,}9831 + 0{,}2779 = 1{,}569$$

$$m = 1{,}569 \times 21{,}22 = 33^{kg},19$$

$$\frac{m}{p} = \frac{33{,}19}{2{,}36} = 14{,}06.$$

On trouverait de même en partant de $R_F = 1\,040$ kilogrammes

$$\alpha = \frac{20}{1\,040} = 0{,}01923$$

$$\alpha n = 0{,}3846, \quad \alpha n u = 0{,}0377, \quad \alpha^2 n^2 u^2 = 0{,}0014$$

$$1 - \alpha n = 0{,}6151, \quad (1 - \alpha n)^2 = 0{,}379$$

$$(1 - \alpha n)\alpha n u = 0{,}0232$$

$$0{,}379x^2 - 2(1 + 0{,}216 \times 17{,}75 + 20 \times 0{,}0236 - 0{,}0232)x$$

$$+ 1 + 0{,}216 \times 17{,}75(2 - 0{,}216) + 2 \times 20 \times 0{,}0236 \times 0{,}098 + 0{,}0014$$

ou

$$x^2 - 2 \times 13{,}939 + 20{,}926 = 0.$$

D'où

$$x = 0{,}772$$
$$1 - x = 0{,}228$$
$$x - u = 0{,}674$$
$$R_c = \frac{1\,040}{20} \times \frac{0.228}{0{,}674} = 17^{kg},59$$
$$\varphi = \frac{20}{17{,}59} = 1{,}137, \quad \frac{\varphi^2}{6} = 0{,}215$$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{\overline{0{,}228}^2}{3} + \frac{0.216 \times 17{,}75}{3}\left[\frac{\overline{0{,}216}^2}{0{,}228} + 3 \times (0{,}228 - 0{,}216)\right]$$
$$+ 20 \times 0{,}0236 \times \frac{\overline{0.674}^2}{0{,}228} + 1{,}137\left(\frac{\overline{0.772}^2}{2} - 0{,}215 \times \overline{0{,}228}^2\right)$$

ou

$$\frac{m}{R_c} = 0{,}0173 + 0{,}3067 + 0{,}9405 + 0{,}3261 = 1{,}5906$$
$$m = 1{,}5905 \times 17{,}59 = 27{,}98$$
$$\frac{m}{p} = \frac{27{,}98}{2{,}36} = 11{,}85.$$

Ces premiers résultats montrent déjà que l'erreur commise en prenant la formule générale $M = 13{,}25\ sh$ pour $R_F = 1\,300$ kilogrammes est de $\frac{14{,}06 - 13.25}{14{,}06} = 5{,}75\ \%$ par défaut et en prenant

$$M = 10{,}87sh \text{ pour } R_F = 1\,040 \text{ kilogrammes}$$

au lieu de

$$M = 11{,}85sh$$

on a commis une erreur par défaut de

$$\frac{11{,}85 - 10.87}{11{,}85} = 7{,}15\ \%.$$

On détermine le travail exact du métal en interpolant entre

$$M = 14{,}06 \times 981{,}24 = 13\,796 \text{ pour } R_F = 1\,300$$
$$M = 11{,}85 \times 981{,}24 = 11\,628 \text{ pour } R_F = 1\,040$$

D'où en millimètres carrés

$$R_F = 10{,}40 + \frac{(11\,540 - 11\,628)(13 - 10{,}40)}{13\,796 - 11\,628} = 10{,}40 - 0{,}0001$$

ou

$$R_F = 10^{kg}{,}40 \text{ par millimètre carré}$$

et par suite, comme il a été trouvé plus haut : $R_c = 17^{kg}{,}59$.

Application II. — *Même problème que* I, *en augmentant la surcharge de* 50 %.

On aura comme plus haut

$$P = 985 \text{ kilogrammes}$$
$$P' = 1{,}5 \times 1\,200 = 1\,800 \quad »$$
$$P + P' = 2\,785 \quad »$$
$$M = \frac{2\,785 \times \overline{6{,}50}^2}{8} = 14\,705 \text{ kilogrammètres.}$$

a) *Calcul rapide*

$M = 13{,}25 \times 981{,}24 = 13001$ kgm. pour $R_F = 1300$
$M = 10{,}87 \times 981{,}24 = 10666$ » » $R_F = 1040$

combien pour $M = 14\,705$ kilogrammètres.

On voit que R_F est supérieur à 1 300 kilogrammes ; mais en interpolant au-delà de cette limite, on a en millimètres carrés

$$R_F = 10{,}40 + \frac{(14\,705 - 10\,166)(13 - 10{,}40)}{13\,001 - 10\,666}$$
$$R_F = 10{,}40 + 4{,}46 = 14{,}86.$$

b) *Calcul exact.*

Appliquant les valeurs exactes trouvées plus haut

$M = 14{,}06 \times 981{,}24 = 13\,796$ kgm. pour $R_c = 1\,300$ kilog.
$M = 11{,}85 \times 981{,}24 = 11\,628$ » » $R_c = 10{,}40$

combien pour 14 705 kilogrammètres.

R_F est encore supérieur à 1 300 kilogrammes, et en interpolant au-delà de $R_F = 1\,300$ on a en millimètres carrés

$$R_F = 10{,}40 + \frac{(14\,705 - 11\,628)(13 - 10{,}40)}{13\,796 - 11\,628}$$

$$R_F = 10{,}40 + 3{,}69 = 14^{kg}{,}09$$

et de même pour R_c, puisque $R_c = 21^{kg}{,}22$ pour $R_F = 1\,300$

et $R_c = 17^{kg}{,}59$ » $R_F = 1\,040$

$$R_c = 17{,}59 + \frac{(21{,}22 - 17{,}59)(13 - 10{,}40)}{(14{,}09 - 10{,}40)}$$

$$R_c = 17{,}59 + 5{,}15 = 22^{kg}{,}74.$$

Calculer un plancher de 400 kilogrammes de surcharge, avec nervures de 7 mètres de portée, écartées de 3 mètres d'axe en axe. On demande un coefficient de sécurité de 2 par rapport à la limite d'élasticité du métal.

a) Calcul rapide. — On essaiera *a priori* un équarrissage de 16 × 30.

Poids mort de la poutre $16 \times 30 \times 0^{kg}{,}25 =$ 120 kilogrammes

Charge transmise par un hourdis de 0,10 pesant 250 kilogrammes $3 \times 650 = 1\,950$ »

$P + P' = 2\,070$ »

$$M = \frac{2\,070 \times 7^2}{8} = 12\,679 \text{ kilogrammètres.}$$

On a d'autre part :

$$h = 30 + 10 = 40$$

$$R_F = 1\,300 \text{ kilogrammes}$$

$$M = 13{,}25sh.$$

D'où

$$s = \frac{12\,679}{13{,}25 \times 40} = 23^{cmq}{,}92$$

On prévoira par exemple 2 barres rondes de 40 millimètres, section $2 \times 12{,}56 = 25{,}12$; et la largeur de 16 sera suffisante.

b) Calcul exact. — Données

$$h = 50, \quad c = \frac{10}{50} = 0{,}20, \quad \lambda = \frac{300 - 16}{16} = 17{,}75$$

$$u = \frac{4}{40} = 0{,}100, \quad p = \frac{25{,}12}{16 \times 50} = 0{,}0314$$

$$n = 20, \quad R. = 20$$

On aura donc successivement

$$\alpha = \frac{R_t}{R_F} = \frac{20}{1300} = 0{,}0154$$

$$(1 - \alpha n)\alpha n u = 0{,}0213$$

$$(1 - \alpha n)^2 = 0{,}479$$

$$\alpha^2 n^2 u^2 = 0{,}00095$$

$$0{,}479x^2 - 2(1 + 0{,}20 \times 17{,}75 + 0{,}628 - 0{,}0213)x + 1$$

$$+ \frac{0{,}20 \times 17{,}75}{3}(2 - 0{,}20) + 2 \times 20 \times 0{,}0314 \times 0{,}1 + 0{,}00095 = 0.$$

D'où

$$x^2 - 2 \times 10{,}765x + 15{,}692 = 0$$

$$x = 0{,}766$$

$$1 - x = 0{,}234$$

$$x - u = 0{,}666$$

$$R_c = \frac{1300}{20} \times \frac{0{,}234}{0{,}666} = 22^{kg},83$$

$$\varphi = \frac{20}{22{,}83} = 0{,}867, \quad \frac{\varphi^2}{6} = 0{,}125$$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{\overline{0{,}234}^2}{3} + \frac{0{,}20 \times 17{,}75}{3}\left[\frac{\overline{0{,}02}^2}{0{,}234} + 3(0{,}234 - 0{,}200)\right]$$

$$+ 0{,}628 \times \frac{\overline{0{,}666}^2}{0{,}234} + 0{,}867\left(\frac{\overline{0{,}766}^2}{2} - 0{,}125 \times \overline{0{,}234}^2\right)$$

ou

$$\frac{m}{R_c} = 0{,}0182 + 0{,}3232 + 1{,}1904 + 0{,}2483 = 1{,}7801$$

$$m = 1{,}7801 \times 22{,}83 = 40{,}64$$

$$\frac{m}{p} = \frac{40{,}64}{3{,}14} = 12{,}95$$

$$s = \frac{12\,679}{12{,}95 \times 40} = 24{,}47.$$

Le calcul rapide a donné $s = 23{,}92$, ce qui a conduit pratiquement à $s = 25{,}12$ au lieu de $s = 24{,}47$ (calcul exact).

Le calcul rapide était donc pratiquement exact.

CHAPITRE V

—

ÉLÉMENT DE PLANCHER NERVURÉ

$R_t = 0$

116. — Si l'on néglige la résistance à l'extension du béton, les équations générales à appliquer pour la solution des problèmes relatifs aux poutres à simple té, sont celles de la page 366, dans lesquelles on fait $\varphi = 0$, savoir :

$$x^2 - 2\left[1 + e\lambda + n(p + p')\right]x + 1 + e\lambda(2 - e) + 2n\left[p' + (p - p')u\right] = 0$$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{(1-x)^2}{3} \times \frac{e\lambda}{3}\left[\frac{e^2}{1-x} + 3(1 - x - e)\right] + np'\frac{(1-x-u)^2}{1-x} + np\frac{(x-u)^2}{1-x}$$

dans l'hypothèse que la valeur de u', relative à la position des barres comprimées par rapport à la face voisine est identique à la valeur de u concernant les barres tendues.

La solution de ce problème paraît assez complexe et cela d'autant plus qu'il est difficile de déterminer la valeur de λ, c'est-à-dire la fraction d'ailes de la poutre dont le concours est assuré pour la résistance de l'ensemble.

Pour simplifier la solution, on peut, comme dans le chapitre IV, faire varier l'un après l'autre les divers facteurs que le problème contient et examiner leur influence sur la résistance. On reconnaît alors qu'en faisant varier ces facteurs entre les limites pratiques les plus étendues, la résistance de la [illegible] ît pas ou ne

diminue pas de quantités considérables, si l'on se pose comme condition que le métal ne travaille pas au-dessus d'une limite que l'on se fixe d'avance. Ces variations de résistance sont d'autant moins sensibles que dans l'établissement d'un projet il n'est pas nécessaire d'atteindre du premier coup la solution mathématiquement exacte ; la précision n'est réellement indispensable que pour une justification (faite après coup) des dimensions adoptées, grâce à quelques tâtonnements. La méthode la plus pratique paraît être la suivante : Etablir une formule simple, suffisamment approchée répondant aux valeurs courantes des paramètres, permettant par suite de déterminer les dimensions principales les plus avantageuses, et rectifier ensuite ces résultats à l'aide des formules générales, quand les paramètres s'écartent trop des valeurs moyennes prises comme point de départ.

Les valeurs moyennes choisies pour les paramètres seront les suivantes : On continuera à donner à n la valeur de 20, admise jusqu'ici. On supposera que $e = 0,25$, c'est-à-dire que l'épaisseur du hourdis est le quart de la hauteur totale ; soit donc 8, 10, 12 et 15 centimètres pour des hauteurs totales de 32, 40, 48 et 60 centimètres. On admettra $u = u' = 0,090$, c'est-à-dire que pour les hauteurs totales sus-mentionnées de 32, 40, 48 et 60, les distances des axes des barres aux faces voisines seront 2,83, 3,60, 4,32 et 5,40 centimètres.

On supposera λ égal à 15, c'est-à-dire que pour une largeur moyenne de nervure de $a = 14$, la largeur de hourdis intéressée sera de $(15 + 1) \times 14 = 224$ centimètres. On ne fera d'ailleurs aucune hypothèse sur la valeur de a qui n'entrera pas dans la formule.

On supposera que la poutre n'est armée qu'à la tension, les armatures comprimées n'apportant pas dans ce cas un accroissement notable de résistance.

Quant au pourcentage p et à la hauteur h de la poutre, ces valeurs resteront indéterminées et l'ingénieur les fera varier à son gré, de manière à réaliser dans les meilleures conditions pratiques, le moment de résistance demandé. Provisoirement cependant on supposera $p = 0,03$.

Répétons encore une fois que l'on ne s'est arrêté à ces valeurs

moyennes des paramètres qu'après s'être assuré, comme on le verra par la suite, que les résultats obtenus ne varient pas beaucoup pour des valeurs peu différentes de celles indiquées ci-dessus.

Résistance d'un élément de plancher nervuré déterminé. — On se donne :

$$e = 0{,}25\,; \qquad p = 0{,}03\,; \qquad u = 0{,}090\,; \qquad \lambda = 15\,; \qquad n = 20\,;$$
$$R_t \text{ et } \varphi = 0 \qquad \text{et} \qquad \beta \text{ et } p' = 0.$$

On s'impose pour l'acier un taux de travail maximum de 13 kilogrammes par millimètre carré. Ce taux correspond à un coefficient de sécurité de 2 par rapport à la limite d'élasticité du métal et par suite de la poutre dans l'hypothèse que le coefficient de sécurité relatif au béton, sera plus grand encore.

Les équations générales sus-mentionnées deviennent :

$$x^2 - 2\,(1 + 0{,}25 \times 15 + 20 \times 0{,}03)\,x + 1 + 0{,}25 \times 15\,(2 - 0{,}25) + 2 \times 20 \times 0{,}03 \times 0{,}090$$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{(1-x)^2}{3} + \frac{0{,}25 \times 15}{3}\left[\frac{0{,}0625}{1-x} + 3\,(1 - x - 0{,}25)\right] + 20 \times 0{,}03\,\frac{(x - 0{,}090)^2}{1-x}$$

Ou :

$$x^2 - 2 \times 5{,}35\,x + 7{,}6705 = 0\,;$$
$$x = 0{,}773\,; \quad (1 - x) = 0{,}227\,; \quad x - u = 0{,}773 - 0{,}090 = 0{,}683\,;$$
$$\frac{m}{R_c} = \frac{\overline{0{,}227}^2}{3} + 1{,}25 \times \left[\frac{0{,}0625}{0{,}227} + 3\,(0{,}227 - 0{,}250)\right] + 0{,}60\,\frac{\overline{0{,}683}^2}{0{,}227}$$
$$\frac{m}{R_c} = 0{,}017 + 0{,}259 + 1{,}233 = 1{,}509.$$

Connaissant $x = 0{,}773$, on a :

$$R_c = \frac{R_F}{n}\,\frac{1-x}{x-u}$$

et comme on a admis $R_F = 1300$, $n = 20$, $u = 0{,}090$

$$R_c = \frac{1\,300}{20} \times \frac{0{,}227}{0{,}683} = 21^k{,}60.$$

La valeur de R_c laisse donc une sécurité beaucoup plus grande que celle exigée de $\frac{95^k}{21,60} = 4,40$ par rapport à la limite d'élasticité. On déduit de $\frac{m}{R_c} = 1,509$

$$m = 1,509\, R_c = 32,59.$$

Si l'on applique à la poutre choisie une charge répondant à un moment unitaire $m = 32,59$, quelle que soit sa hauteur, on est certain que le métal travaillera à 13 kilogrammes par millimètre, le béton au maximum à $21^k,60$, pourvu que l'écartement des nervures soit d'au moins $16\,a$.

Ceci posé, nous allons examiner de plus près les variations de m, quand les divers paramètres vont varier d'une part dans des limites moyennes, d'autre part jusqu'aux limites extrêmes.

Variations de u

On prendra comme limites extrêmes

$$u = 0,200 \qquad \text{et} \qquad u = 0,030$$

et comme limites moyennes

$$u = 0,125 \qquad \text{et} \qquad u = 0,050.$$

On se donne :

$$e = 0,25\,; \quad \lambda = 15\,; \quad p = 0,03\,; \quad n = 20\,; \quad R_t = 0\,;$$
$$p' \text{ et } \beta = 0 \quad \text{et} \quad R_F = 1300 \text{ kilogrammes.}$$

Les équations générales deviennent :

$$x^2 - 2\,(1 + 0,25 \times 15 + 20 \times 0,03)\,x + 1 + 0,25 \times 15\,(2 - 0,25) + 2 \times 20 \times 0,03\,u$$

ou

$$x^2 - 2 \times 5,35\,x + 7,5625 + 1,20\,u = 0$$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{(1-x)^2}{3} + 1,25\left[\frac{0,0625}{1-x} + 3\,(1 - x - 0,25)\right] + 0,6\,\frac{(x-u)^2}{1-x}$$

Faisant successivement $u = 0{,}03$, $0{,}05$, $0{,}090$, $0{,}125$, $0{,}200$, on obtient le tableau suivant :

	$u = 0{,}030$	$u = 0{,}050$	$u = 0{,}090$	$u = 0{,}125$	$u = 0{,}200$
$x =$	0,765	0,767	0,773	0,777	0,787
$1 - x =$	0,235	0,233	0,227	0,223	0,213
$x - u =$	0,735	0 717	0,683	0,652	0,587
$R_c =$	20,78	21,12	21,60	22,23	23,58
$\frac{m}{R_c} =$ hourdis . .	0,018	0,018	0.017	0,016	0,015
nervure . .	0,276	0,271	0,259	0,249	0,229
métal . . .	1,379	1,323	1,233	1,148	0,970
$\Sigma =$	1,673	1,612	1,509	1,413	1,214
$m =$	34,76	34,05	32,59	31,32	28,63

L'examen de ce tableau montre que u augmentant :

1° La fibre neutre s'élève ;

2° Le travail du béton augmente, mais le taux maximum est de $23^k{,}58$;

3° La résistance unitaire diminue assez rapidement ;

4° En adoptant la résistance moyenne de 32,57 correspondant à $u = 0{,}090$, on commet une erreur maxima par défaut de 4 %, et qui s'élèverait à près de 14 % pour $u = 0{,}200$ qui ne peut s'appliquer qu'à des hauteurs inférieures à 20 centimètres.

Variations de e

On prendra comme limites extrêmes :

$$e = 0{,}05 \qquad \text{et} \qquad e = 0{,}50$$

et comme limites moyennes :

$$e = 0{,}20 \qquad \text{et} \qquad e = 0{,}30.$$

On se donne :

$\lambda = 15$; $u = 0{,}090$; $p = 0{,}03$; $n = 20$; $R_t = 0$;
$\beta = 0$ et $R_F = 1\,300$ kilogrammes.

Les équations générales deviennent :

$$x^2 - 2\,(1 + 15\,e + 20 \times 0{,}03)\,x + 1 + 15\,e\,(2 - e) + 2 \times 20 \times 0{,}03 \times 0{,}09 = 0$$

ou

$$x^2 - 2\,(1{,}6 + 15\,e)\,x + 1{,}108 + 15\,e\,(2 - e) = 0$$

et

$$\frac{m}{R_c} = \frac{(1 - x)^2}{3} + 5e\left[\frac{e^2}{1 - x} + 3\,(1 - x - e)\right] + 0{,}6\,\frac{(x - 0{,}090)^2}{1 - x}$$

Faisant successivement $e = 0{,}05$, $0{,}20$, $0{,}25$, $0{,}30$, $0{,}50$, on obtient le tableau suivant :

	$e = 0{,}05$	$e = 0{,}20$	$e = 0{,}25$	$e = 0{,}30$	$e = 0{,}50$
$x =$	0,632	0,773	0,773	0,766	0,707
$1 - x =$	0,368	0,227	0,227	0,234	0,293
$x - u =$	0,542	0,683	0,676	0,676	0,617
$R_c =$	44,13	21,60	21,60	22,50	30,86
$\frac{m}{R_c} =$ hourdis . .	0,045	0,017	0,017	0 018	0,029
nervure . .	0,240	0,257	0,259	0,279	0,585
métal . . .	0,479	1,233	1,233	1,172	0,779
$\Sigma =$	0,764	1,507	1,509	1,469	1,393
$m =$	33,72	32,55	32,59	33,05	42,99

L'examen de ce tableau montre que e augmentant :

1° La fibre neutre tend à s'abaisser, mais elle se relève pour des épaisseurs très faibles de hourdis ;

2° Le travail du béton suit la même loi ; il est à peu près uniforme dans les variations moyennes, mais se relève pour des épaisseurs exagérément fortes ou faibles. Il ne dépasse pas 44k.13, qui répond à un coefficient d'élasticité de $\frac{95}{44{,}13} = 2{,}14$.

3° La résistance unitaire suit également la même loi ;

4° Omettant le cas extrême $e = 0{,}50$ qui ne peut se présenter que pour des poutres très basses, l'erreur maximum que l'on puisse commettre par défaut est de 1,4 %.

Variations de λ

On prendra comme valeurs extrêmes :

$$\lambda = 5 \qquad \text{et} \qquad \lambda = 25$$

et comme valeurs moyennes :

$$\lambda = 10 \qquad \text{et} \qquad \lambda = 20.$$

On se donne :

$$e = 0{,}25\,; \qquad u = 0{,}090\,; \qquad p = 0{,}03\,; \qquad n = 20\,; \qquad R_t = 0\,;$$
$$R_F = 1\,300 \text{ kilogrammes.}$$

Les équations générales deviennent :

$$x^2 - 2\left(1 + \frac{\lambda}{4} + 0{,}60\right)x + 1 + \frac{\lambda}{4} \times 1{,}75 + 2 \times 20 \times 0{,}03 \times 0{,}09 = 0$$

ou

$$x^2 - 2\left(1{,}60 + \frac{\lambda}{4}\right)x + 1{,}108 + \frac{\lambda}{4} \times 1{,}75 = 0$$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{(1-x)^2}{3} + \frac{\lambda}{12}\left[\frac{0{,}0625}{1-x} + 3\,(1 - x - 0{,}25)\right] + 0{,}6\,\frac{(x - 0{,}090)^2}{1-x}.$$

Appliquant à ces équations les valeurs de λ ci-dessus, on obtient le tableau

	$\lambda = 5$	$\lambda = 10$	$\lambda = 15$	$\lambda = 20$	$\lambda = 25$
$x =$	0,653	0,735	0,773	0,795	0,809
$1 - x =$	0,347	0,265	0,227	0,205	0,191
$x - u =$	0,563	0,645	0,676	0,705	0,719
$R_c =$	40,06	26,70	21,60	18,90	17,26
$\frac{m}{R_c} =$ bourdis . .	0,040	0,023	0,017	0.014	0,012
nervure . .	0,196	0,234	0,259	0.283	0,312
métal . . .	0,548	0,942	1,233	1.454	1.623
$\Sigma =$	0,784	1,199	1,509	1,751	1,947
$m =$	31,41	32,01	32,59	33,09	33,60

L'examen de ce tableau montre que λ augmentant :

1° La fibre neutre s'élève assez rapidement ;

2° Le taux de travail du béton va en diminuant ; il atteint d'ailleurs 40,06 au maximum, ce qui répond à un coefficient de sécurité de $\frac{95}{40,06} = 2,37$ environ,

3° Le moment unitaire va en augmentant ;

4° L'erreur maxima que l'on puisse commettre par défaut, répondant à $\lambda = 5$, soit pour un écartement de poutrelles de 84 centimètres pour $a = 14$, est de 3,8 %.

Variations de p

On prendra comme limites extrêmes :

$$p = 0,01 \qquad \text{et} \qquad p = 0,06$$

moyennes :

$$p = 0,02 \qquad \text{et} \qquad p = 0,04.$$

On se donne :

$$e = 0,25 ; \quad u = 0,090 ; \quad \lambda = 15 ; \quad n = 20 ; \quad R_t = 0 ;$$
$$R_F = 1\,300 \text{ kilogrammes.}$$

Les équations générales deviennent :

$$x^2 - 2(1 + 3,75 + 20p)\,u + 7,5625 + 3,6\,p = 0$$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{(1-x)^2}{3} + 1,25\left[\frac{0,0625}{1-x} + 3(1 - x - 0,25)\right] + 20\,p\,\frac{(x - 0,090)^2}{1-x}.$$

Appliquant à ces équations la valeur de p ci-dessus, on obtient le tableau suivant.

L'examen de ce tableau montre que si le pourcentage augmente :

1° La fibre neutre s'abaisse ;

2° Le taux de compression du béton augmente, mais ne dépasse pas 32,93 qui répond à un coefficient de sécurité de $\frac{95}{32,93} = 2,87$;

3° La résistance augmente à peu près proportionnellement avec le pourcentage ;

4° Si l'on admet comme résistance moyenne par unité de pourcentage 10,86, on commet une erreur par défaut maxima de 2,70 %, qui répond aux plus forts pourcentages 6 %.

	$p = 0{,}01$	$p = 0{,}02$	$p = 0{,}03$	$p = 0{,}04$	$p = 0{,}06$
$x =$	0,838	0,804	0,773	0,744	0,694
$1 - x =$	0,162	0,196	0,227	0,256	0,306
$x - u =$	0,748	0,714	0,676	0,654	0,604
$R_c =$	14,08	17,84	21,60	25,44	32,93
$\frac{m}{R_c} =$ hourdis . .	0,009	0,013	0,017	0,022	0,031
nervure . .	0,152	0,196	0,259	0,327	0,465
métal . . .	0,690	1,040	1,233	1,336	1,430
$\Sigma =$	0,851	1,249	1,509	1,685	1,926
$m =$	11,98	22,28	32,59	42,87	63,42
$\frac{m}{p} =$	11,98	11,14	10,86	10,72	10,57

Variations de β

On prendra comme valeurs $\beta = 0,\ 0{,}25,\ 0{,}50,\ 0{,}75,\ 1.$

On se donne :

$$e = 0{,}25; \quad \lambda = 15; \quad p = 0{,}03; \quad u = 0{,}090; \quad R_t = 0;$$
$$R_F = 1\,300$$

$$x^2 - 2\,(5{,}35 + 0{,}60\,\beta)\,x + 7{,}6705 + 1{,}092\,\beta = 0$$

et

$$\frac{m}{R_c} = \frac{(1-x)^2}{3} + 1{,}25\left[\frac{0.0625}{1-x} + 3\,(1 - x - 0{,}25)\right]$$
$$+ 0{,}60\,\beta\,\frac{(1 - x - 0.090)^2}{1-x} + 0{,}60\,\frac{(x - 0{,}09)^2}{1-x}$$

L'examen du tableau suivant montre que lorsque *le rapport* β, entre les barres comprimées et les barres tendues, *augmente* :

1° La fibre neutre s'élève ;

2° Le taux de travail du béton diminue, mais comme il est toujours faible, cet avantage n'est pas appréciable ;

3° Le taux de travail augmente de quantités très faibles, négligeables même, puisque de $\beta = 0$ à $\beta = 1$ l'augmentation n'est que de 0,70 °/₀.

4° Le taux de travail du métal comprimé est très faible puisqu'il dégage à peine $2^{kg},500$ par millimètre carré.

	$\beta = 0$	$\beta = 0,25$	$\beta = 0,50$	$\beta = 0,75$	$\beta = 1$
$x =$	0,773	0,777	0,782	0,785	0,788
$1 - x =$	0,227	0,223	0,218	0,215	0,212
$x - u =$	0,676	0,687	0,692	0,695	0,698
$R_c =$	21,60	21,10	20,48	20,11	19,74
$\frac{m}{R_c} =$ hourdis . . .	0,017	0,017	0,016	0,015	0,015
nervure . . .	0,259	0,249	0,239	0,231	0,226
métal tendu. .	1,233	1,270	1,318	1,348	1,380
métal comprimé	0,000	0,012	0,023	0,033	0,042
$\Sigma =$	1,509	1,548	1,596	1,627	1,663
$m =$	32,59	32,66	32,69	32,72	32,83
$R'_r =$	0^k	251^k	240^k	234^k	227^k

En résumé : le moment de résistance d'un élément de plancher nervuré, dont la résistance au béton tendu a été négligée, peut être pris égal à 10,86 p, p étant exprimé en unités de pourcentage, dans tous les cas avec une approximation suffisante, quand on consent à faire travailler le métal à 1 300 kilogrammes ; 2° la fatigue du béton à la compression reste toujours relativement moindre ; 3° si on n'admet qu'une fraction k de 1 300 kilogrammes comme fatigue du métal, la formule $R_c = \frac{RF}{n} \frac{1 - x}{x - u}$; montre que R_c décroîtra d'une façon à peu près proportionnelle et qu'il sera de même du moment unitaire, c'est-à-dire que pour jouir d'un coefficient de sécurité de 3, au lieu de 2, par exemple, on prendra $m = \frac{2}{3}\, 10,66\, p$.

Le graphique (fig. 177) résume d'ailleurs pour les yeux les influences de la variation des divers facteurs étudiés.

Portant en ordonnées les résistances relatives aux valeurs de λ prises comme abscisses, on obtient la ligne $\lambda\lambda$ qui est presque droite, mais légèrement inclinée sur la parallèle à la ligne des x.

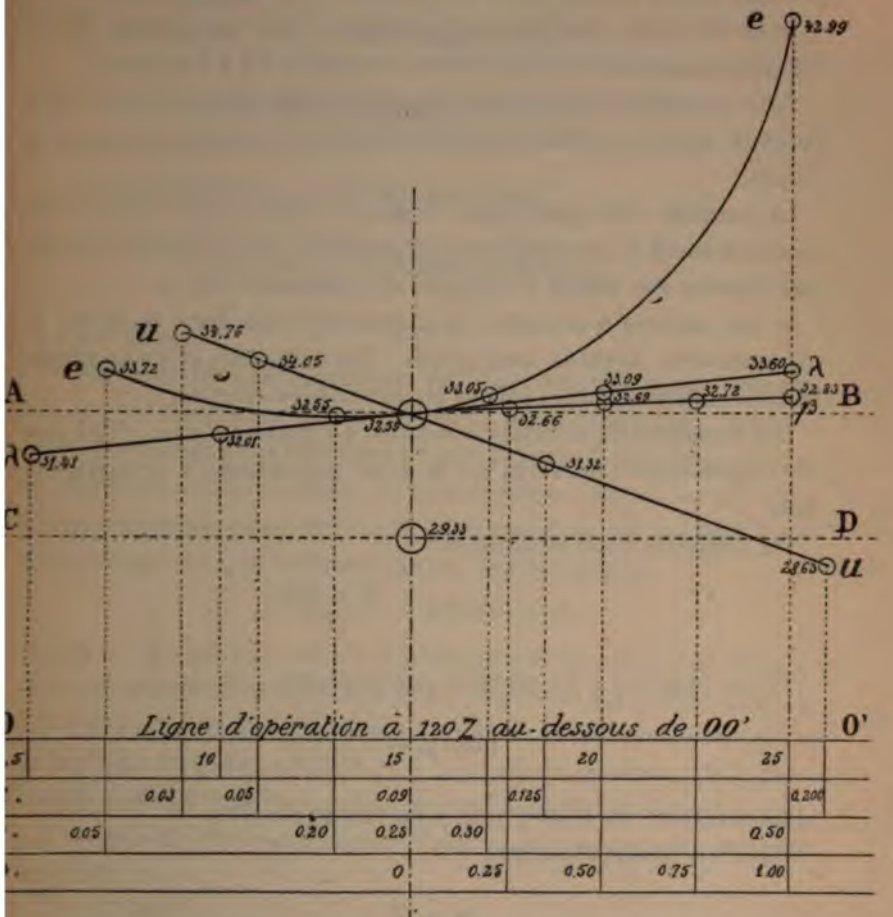


Fig. 177

Portant de même en ordonnées les résistances relatives aux valeurs de e, on obtient une ligne concave ee, qui est presque entièrement au-dessus de la parallèle AB qui passe par le point moyen dont l'ordonnée est en trait plus fort ; on commettra donc presque toujours une erreur par excès ; et les rares erreurs par défaut seront faibles.

Portant en ordonnées les résistances relatives aux valeurs de u,

en disposant toujours l'échelle des abscisses de manière que le point moyen soit commun à toutes les courbes, et les limites extrêmes dans les mêmes régions, on obtient la courbe $\mu\mu$, presque droite et fortement inclinée, mais en sens inverse de $\lambda\lambda$.

Enfin la courbe des moments relatifs à β est une droite inclinée émergeant de très peu sur une parallèle AB à l'axe des x.

Cette parallèle AB ne détachant qu'une faible région des diverses courbes montre qu'en général les erreurs commises le sont par défaut.

La parallèle CD ayant pour ordonnée 29,33, c'est-à-dire un moment de 10 % plus faible que le moment moyen 32,59, montre que l'erreur par défaut ne dépasse que rarement 10 %.

Si les erreurs à craindre de u, peuvent s'ajouter à celles de λ, elles peuvent aussi se neutraliser. Les exemples suivants montreront combien faibles seront en général les erreurs.

Les moments de résistance relatifs au pourcentage, n'ont pas été représentés ; on verra qu'ils sont sensiblement proportionnels.

On admettra donc la formule

$$m = 10{,}86\, p = \frac{M \times 100}{ah^2}$$

Si l'on exprime p en unité de pourcentage

$$1\,086\, p = \frac{100\, M}{ah^2}$$

si au contraire on admet pour p sa valeur absolue.

D'où, en se rappelant que

$$p = \frac{s}{ah}$$

s étant la section de l'armature tendue, exprimée en centimètres carrés,

$$\frac{s}{ah} \times ah^2 = \frac{100\, M}{1\,086}$$

ou

$$M = 10{,}86\, sh.$$

h, ne l'oublions pas, *étant la hauteur totale de la poutre,* y compris l'épaisseur du hourdis et la partie de béton qui recouvre extérieurement les armatures. Cette expression répond à $R_F =$ 1 300 kilogrammes.

On aurait pour $R_F = 1\,200$ kilogrammes

$$M = \frac{12}{13}\,10{,}86\,sh = 10\,sh.$$

On aurait pour $R_F = 1\,000$ kilogrammes

$$M = \frac{10}{13} \times 10{,}86\,sh = 8{,}35\,sh$$

et ainsi de suite.

Le taux de fatigue maximum du béton ne dépassera presque jamais 30 kilogrammes, et rarement 25 kilogrammes, pourvu que l'écartement des nervures ne soit pas très faible. Dans ce cas, on aura recours aux barres de compression ; on se servira des mêmes formules que pour $\beta = 0$, bien que l'on ait prévu β d'autant plus grand que le hourdis est moins développé.

117. — Application I. — *Un élément de plancher de* $3 \times 6^m,50$ *avec hourdis de* 0,11 *et nervure de* 0,16 *de largeur et* 0,40 *de hauteur, a été armé à la tension de* 2 *barres rondes de* 35 *millimètres de diamètre dont les axes se trouvent à* 5 *centimètres au-dessus de la face tendue extrême. On demande le travail du métal et du béton sous une charge de* 400 *mètres carrés et pour une portée de* $6^m,50$ (voir fig. 176).

Volume du hourdis $= 0{,}11 \times 3 = 0{,}330.$
» de la nervure $= 0{,}16 \times 0{,}40 = \underline{0.064}$
$0{,}394$

$$P = 0{,}394 \times 2\,500 = 985 \text{ kilogrammes}$$
$$P' = 3 \times 400 = \underline{1\,200} \quad »$$
$$P + P' = 2\,185 \quad »$$

$$M = \frac{2\,185 \times 6{,}50^2}{8} = 11\,540 \text{ kilogrammes.}$$

Comme $s = 2 \times 9{,}62 = 19{,}24$ et $h = 40 + 11 = 51$ le moment de résistance de ce plancher à 13 kilogrammes de travail pour le métal est de

$$M = 10{,}86 \times 19{,}24 \times 51 = 10\,656$$

Comme on demande $M = 11\,540$

$$R_F = 1\,300 \times \frac{11\,540}{10\,656} = 14^{kg},08.$$

Vérification :

$$p = \frac{19{,}24}{18 \times 51} = 0{,}0236$$

$$e = \frac{11}{51} = 0{,}216$$

$$u = \frac{5}{51} = 0{,}098$$

$$\lambda = \frac{300 - 16}{17} \; 16{,}75$$

$$x^2 - 2(1 + 0{,}216 \times 17{,}75 + 20 \times 0{,}0236)x + 1 + 0{,}216 \times 17{,}75(2 - 0{,}216$$
$$+ 2 \times 20 \times 0{,}00236 \times 0{,}098 = 0$$

$$x^2 - 2 \times 5{,}306\, x + 7{,}932368 = 0$$

$$x = 0{,}809$$
$$1 - x = 0{,}191$$
$$x - u = 0{,}711$$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{(0{,}191)^2}{3} + \frac{0{,}216 \times 17{,}75}{3}\left[\frac{0{,}216^2}{0{,}191} + 3\,(0{,}191 - 0{,}216)\right]$$
$$+ 20 \times 0{,}0236 \times \frac{(0{,}711)^2}{0{,}191}$$

$$\frac{m}{R_c} = 0{,}012 + 0{,}215 + 1{,}249 = 1{,}476$$

et comme

$$m = 27{,}73$$

$$R_c = \frac{27{,}73}{1{,}476} = 18^{kg},79$$

$$R_F = 20 \times 18{,}79 \times \frac{0{,}711}{0{,}191} = 13^{kg},99$$

Application II. — *Calculer un plancher capable d'une surcharge de 400 kilogrammes par mètre carré sur une portée de 7 mètres, avec nervures à l'écartement de 3 mètres. On demande un coefficient de sécurité de 2 par rapport à la limite d'élasticité.*

On a calculé le hourdis et on lui a donné 11 centimètres d'épaisseur.

Essayons d'abord $h = 30$; $a = 16$.

Volume du hourdis : $3 \times 0{,}11 = 0{,}330$

» de la nervure : $0{,}16 \times 0{,}19 = \underline{0{,}031}$

$0{,}361$

$$P = 0{,}361 \times 2500 = 903 \text{ kilogrammes}$$
$$P' = 400 \times 3 = \underline{1200} \quad »$$
$$P + P' = 2103 \quad »$$
$$M = \frac{2103 \times 7^2}{8} = 12881 \text{ kilogrammes.}$$

On a trouvé pour un coefficient de sécurité de 2

$$M = 10{,}86\, sh.$$

D'où

$$s = \frac{12881}{10{,}86 \times 30} = 39{,}5$$

Il faudra 2 barres rondes de 51, ou 3 de 41.

L'équarrissage choisi est trop faible.

On essaiera $h = 40$; $a = 17$.

Volume du hourdis $3 \times 0{,}11 = 0{,}330$

» de la nervure $0{,}17 \times 0{,}29 = \underline{0{,}049}$

$0{,}379$

$$R = 0{,}379 \times 2500 = 943 \text{ kilogrammes}$$
$$P' = 400 \times 3 = \underline{1200} \quad »$$
$$P + P' = 2143 \quad »$$
$$M = \frac{2143 \times 7^2}{8} = 13126 \text{ kilogrammes}$$
$$s = \frac{13126}{10{,}86 \times 40} = 30{,}21$$

ou 2 ronds de 44 millimètres = 30,41.

Vérification :

$$e = \frac{11}{40} = 0,275$$

$$\lambda = \frac{300}{17} - 1 = 16,65$$

$$u = \frac{5}{40} = 0,125$$

$$p = \frac{30,41}{17 \times 40} = 0,0447$$

$$x^2 - 2(1 + 0,275 \times 16,65 + 20 \times 0,0447)x + 1 + 0,275 \times 16,65(2 - 0,275)$$
$$+ 2 \times 20 \times 0.0447 \times 0,125$$

$$x^2 - 2 \times 6,473\, x + 9,122 = 0$$

$$x = 0,757$$
$$1 - x = 0,243$$
$$x - u = 0,632$$

$$\frac{m}{R_c} = \frac{0,243^2}{3} + \frac{0,275 \times 16,65}{3}\left[\frac{0,275^2}{0,243} + 3\,(0,243 - 0,275)\right]$$
$$+ 20 \times 0,0447 \times \frac{0,632^2}{0,243}$$

$$\frac{m}{R_c} = 0,020 + 0,329 + 1,470 = 1,819$$

$$m = \frac{13\,126 \times 100}{17 \times 40^2} = 48,25$$

$$R_c = \frac{48,25}{1,819} = 26^{kg}52$$

$$R_F = 20 \times 26,52 \times \frac{0,632}{0,243} = 13,80.$$

Le calcul exact donne ici un taux de travail du métal sensiblement plus fort, de 6,15 %, ce qui résulte sans doute de ce que la valeur de $u = 0,125$ est plus forte que la moyenne 0,090 dont on aurait pu se contenter, puisque $0,90 \times 40 = 3,60$, quantité suffisante pour recouvrir les fers). D'autre part le pourcentage 0,0447 est 50 % plus fort que la moyenne choisie 3 %.

CHAPITRE VI

—

CONCLUSIONS

118. — Les connaissances actuelles de la résistance des matériaux appliquées aux constructions en ciment armé permettent d'établir les équations générales dont la résolution donne les taux de travail des différents éléments, béton et métal des pièces considérées. Ces taux de travail, varient il est vrai, toutes autres choses égales, avec deux facteurs importants.

1° le rapport n du coefficient d'élasticité du métal à celui du béton à la compression.

2° le taux de travail que l'on admet pour le béton tendu.

Les valeurs pratiques moyennes de ces deux facteurs ne peuvent être déterminées que par des expériences nombreuses poursuivies avec les dosages usuels, sur des pièces construites dans des conditions comparables à celles de la pratique et par l'application aux résultats obtenus des équations sus-mentionnées.

Ces équations auxquelles M. Considère a donné la forme la plus générale ont été rendues plus maniables au chapitre IV, livre III, à l'aide de simples transformations algébriques; pour se rendre compte des simplifications obtenues, il suffit de suivre les applications numériques multiples qui en ont été faites.

Si l'ingénieur n'a pas une confiance absolue dans le taux de travail limite admis dans ces applications pour le béton tendu, $R_t = 20^k$, rien ne l'empêche de lui attribuer toute autre valeur, une valeur nulle même, et dans ce cas il pourra se servir des équations toutes préparées répondant à cette dernière hypothèse.

Mais ces équations rendues très maniables pour la vérification d'un projet, ne le sont plus assez pour établir *a priori* les dimensions les plus convenables du béton et de ses armatures, et ce, en raison du très grand nombre de paramètres dont les taux de travail de ces matières sont fonctions d'une façon très indirecte.

Il convenait donc de donner à ces facteurs variables les valeurs numériques, limites et moyennes, que l'expérience des constructions en ciment armé permet de leur attribuer et de rechercher les moments de résistance correspondants des solides considérés, avec des coefficients de sécurité donnés, ces coefficients de sécurité s'entendent par rapport à la limite d'élasticité du béton comprimé et du métal tendu. Il ressort en effet des études qui précèdent que les armatures disposées à la compression travaillent en général beaucoup moins que les armatures tendues ; quant au béton tendu, si l'on admet qu'il y a lieu de tenir compte de son influence, sa limite d'élasticité, d'après ce que nous a appris M. Considère ne peut être dépassée que simultanément avec celle du métal.

Seuls donc les défauts de résistance du béton comprimé et des armatures tendues sont de nature à compromettre la stabilité de l'ouvrage, et il n'y a même, pour déterminer le coefficient de sécurité, à considérer que l'un d'entre eux dans chaque cas particulier, celui qui s'accuse le premier ; on a moins eu en vue le coefficient de sécurité à la rupture, que celui répondant à la limite d'élasticité, cette dernière limite annonçant le commencement de la période critique, sur laquelle il règne encore une grande obscurité. Mais si l'on connait à peu près la limite d'élasticité du métal, on ne sait pas définir celle du béton comprimé ; on a admis par analogie avec ce qui se passe pour le métal, qu'elle est égale à la moitié de la charge unitaire qui produit la rupture.

Grâce à l'introduction exclusive de paramètres numériques, inspirés par l'expérience des travaux en ciment armé, et à l'application de taux de travail répondant à un coefficient de sécurité donné, la résolution des équations générales fournit des expressions très simples du moment de résistance.

Ces expressions sont de 3 formes :

1) $M = KSh$ relative aux dalles

2) $M = (KS + K's)h$ relative aux poutres rectangulaires

3) $M = K'sh$ relative aux éléments de planchers nervurés

dans lesquelles :

S, est la section totale du béton considéré, comprimé et tendu ;

s » » des armatures tendues ;

h, étant la hauteur totale de la pièce, dans tous les cas ;

K, étant un coefficient numérique, fonction de tous les paramètres variables, mais notamment du taux de travail admis pour le béton comprimé et K', notamment du taux de travail admis pour le métal tendu.

La détermination de ces facteurs numériques a exigé une quantité considérable de calculs entrepris dans deux hypothèses, celle où l'on a admis que la limite de la résistance du béton tendu était de 20 kilogrammes par centimètre carré, et celle où la résistance du béton tendu est considérée comme nulle ($R_t = 0$). Il a été donné quelques exemples ou indications de ces longs calculs, afin d'en permettre la vérification ; mais si les résultats donnés dans les divers tableaux récapitulatifs n'ont pas l'exactitude des chiffres d'une table de logarithmes, ils sont cependant suffisamment exacts, comme le prouvent leurs courbes représentatives, pour établir les formules qui condensent les résultats d'une même série.

Ces formules du type (1), (2) ou (3), permettent de déterminer très aisément les dimensions les plus convenables d'un projet, dans l'une ou l'autre hypothèse. Ces proportions trouvées, on vérifiera si l'on veut les taux de travail du béton et du métal à l'aide des formules générales, auxquelles on appliquera les valeurs de n et de R_t qui paraîtront les plus convenables, mais si l'on admet celles proposées dans cet ouvrage, les corrections à faire seront tellement faibles qu'il n'y aura aucun intérêt pratique à recourir à cette vérification, et d'autant moins que les différences auxquelles donnera lieu l'exécution industrielle du béton et du montage des armatures aux distances prévues au projet, seront d'un ordre bien supérieur. Il serait donc illogique de recourir à des instruments de précision, alors que l'on dispose de moyens rapides, quoique ne sortant pas du domaine scientifique.

Les belles études de M. Considère n'ont pas, et c'est fort regrettable, converti un grand nombre d'ingénieurs. Ces derniers sans mettre en doute cependant la vérité théorique des conclusions de ces études, n'étant pas certains que les ouvrages en ciment armé établis par les constructeurs, même les plus en renom, jouissent des mêmes propriétés que les échantillons établis avec soin dans les laboratoires, préfèrent renoncer au bénéfice du concours apporté à la résistance par le béton tendu, que de s'exposer à un grave mécompte. Tous sont unanimes cependant pour admettre qu'il y a lieu au contraire de tenir compte de la résistance considérable du béton à l'extension pour justifier les diagrammes de déformation des pièces fléchies en ciment armé, ou pour prévoir ces déformations ; et en effet ce serait fausser préalablement de parti pris les résultats du problème cherché.

On est donc en droit de se demander pourquoi on se refuserait à fausser les résultats d'un problème qui ne se pose jamais en pratique, celui de la déformation, alors que l'on accepterait, que l'on imposerait même cette erreur originelle dans les calculs de tous les jours.

Remarquons que l'erreur consentie est pour ainsi dire du second degré. Non seulement le fait de négliger la résistance du béton tendu conduit parfois à doubler la section du métal, afin de réaliser le pourcentage le plus économique, mais encore à l'augmenter aussi pour compenser la perte subie par l'omission voulue de la résistance du béton tendu. On a pu remarquer en effet que l'influence caractéristique du concours du béton tendu était de permettre d'atteindre avec de faibles pourcentages le maximum de résistance spécifique, ou rapport du moment de résistance au pourcentage de métal correspondant. Donc, d'une part, la négligence de la résistance du béton tendu, élève considérablement le pourcentage répondant au maximum de résistance spécifique, de l'autre, elle exige des hauteurs plus fortes, pour un moment de résistance déterminé et par suite à pourcentage égal une quantité de métal de beaucoup supérieure.

Nous sommes convaincus, principalement pour le calcul des dalles, que le concours du béton tendu ne cesse jamais d'être efficace, au moins pour la majorité des fibres, laquelle a échappé

en général à des malfaçons (défauts de pilonnage ou même de remplissage des coffres). Mais quoi qu'il en soit, si l'on éprouvait encore quelques craintes en dépit des preuves et des arguments accumulés à cet effet, il serait plus logique de chercher à corriger dans une large mesure un défaut de résistance, par la réduction des taux de travail des matières, que de recourir à des proportions ne convenant qu'à un cas qui ne se présente jamais dans les conditions normales d'exécution ; autrement dit, ne vaut-il pas mieux exiger un accroissement du coefficient de sécurité, et se servir des pourcentages qui répondent, à résistance égale, au maximum d'économie ? Nous pensons qu'il est préférable de recourir aux formules simplifiées, établies en tenant compte de la résistance à l'extension du béton, quand ces dernières conduisent à des proportions toutes différentes de celles résultant de l'hypothèse opposée, et de se garantir contre une éventualité de malfaçon par l'adoption d'un coefficient de sécurité largement supérieur.

Il y a lieu d'examiner de près le moyen le plus convenable à chaque cas, en récapitulant et comparant les expressions simples obtenues dans les chapitres précédents dans les deux hypothèses.

119. — A. Dalles minces.

R_t	Pourcentage	$R_c = 47^k,50$	$R_c = 38^k$	$R_c = 31^k,67$
20^k	1/2 %	$6,72\,h^2$	$5,76\,h^2$	$5,05\,h^2$
0	1/2 %	$4,13\,h^2$	$3,31\,h^2$	$2,75\,h^2$
Coefficient de sécurité.		2	2,50	3

Pour $R_t = 20$, le taux de travail maximum est de $4^{ks},74$ et pour $R_t = 0$, il atteint $13^{ks},67$.

C'est le cas, et qui de beaucoup, présente les différences les plus considérables. Admettre $R_t = 0$ au lieu de $R_t = 20$, revient à renoncer à une économie de 20 % au moins. Pour s'en rendre

compte, il suffit de développer parallèlement les deux calculs suivants :

$$\frac{R_t = 20}{h = \sqrt{\frac{M}{6,72}}} \qquad \frac{R_t = 0}{h = \sqrt{\frac{M}{4,13}}}$$

$$h = 0,386\sqrt{M} \qquad h = 0,492\sqrt{M}.$$

Supposons M = 400 kilogrammètres, d'où $M = \sqrt{400} = 20$

$$h = 7,72^{cm} \qquad h = 9,84^{cm}.$$

Comptons maintenant le béton à 80 francs le mètre cube et l'armature augmentée de 2 centimètres carrés par mètre carré pour les barres de répartition, à raison de 0fr,30 par centimètre carré et par mètre de longueur

béton	7,72 à 80 francs = 6,18	9,84 × 80 francs = 7,87
armature	$\frac{7,72}{2} + 2 = 5,86$ à 0,30 = 1,76	$\frac{9,84}{2} + 2 = 6,92$ à 0,30 = 2,08
	7,94	9,95

On renonce donc à une économie de $\frac{9,95 - 7,94}{9,95} = 20\ \%$ en laissant de côté le bénéfice pouvant résulter de l'allègement du poids mort.

Si par contre, on veut élever de 50 % le coefficient de sécurité, si on veut le porter à 3 au lieu de 2, en raison de ce que le concours du béton tendu, sur lequel on a compté, peut faire défaut, on aura

$$M = 5,05h^2$$

$$h = \sqrt{\frac{M}{5,05}} = 0,445\sqrt{M}$$

et pour

$$M = 400. \quad \sqrt{M} = 20$$

$$h = 20 \times 0,445 = 8,90.$$

D'où

béton	8,90 × 80 = 7fr,12
armatures	$\frac{8,90}{2} + 2 = 6,45$ à 0fr,30 = 1, 93
	9fr,05

On aura réduit la perte à $\frac{9,95 - 9,05}{9,95} = 9,5\ \%$.

Autrement dit, armant la dalle à raison de 1/2 %, on exigera un coefficient de sécurité de 3 au lieu de 2 pour le cas d'une surcharge qui n'atteint qu'accidentellement le maximum prévu au projet, et un calcul fait sur la base de $M = 5,05h^2$.

A ceci il faut ajouter qu'il y a lieu de tenir compte également de la valeur du moment des forces extérieures. Il a été prouvé que généralement ce moment peut être évalué à $M = \frac{pl^2}{10}$, et non à $M = \frac{pl^2}{8}$ qui répond à une dalle simplement posée sur ses appuis. Si donc l'on se sert de l'expression $M = \frac{pl^2}{8}$, on a tout droit d'élever le coefficient 5,05 en conséquence, c'est-à-dire à $5,05 \times \frac{10}{8} = 6,3125$, et faisant une nouvelle concession pour arrondir les chiffres, on posera la règle suivante, pour le calcul des dalles minces.

I
- Moment des forces extérieures $M = \frac{pl^2}{8}$
- Moment de résistance $M = 6h^2$
- Pourcentage 1/2 %.

Ce calcul conciliera tous les esprits ; seulement les uns penseront que le coefficient de sécurité dépasse à peine 2, les autres seront d'avis qu'il dépasse 3 de beaucoup, et tous seront d'accord pour dire qu'il sera compris entre 2 et 3.

Bien entendu pour les ouvrages exposés à des trépidations modérées ou à des surcharges atteignant généralement le chiffre maximum prévu au projet, pour lesquels on a cru prudent d'élever le coefficient de sécurité d'un 1/4, le coefficient 6 devra être réduit d'un 1/5 et deviendra $0,80 \times 6 = 4,80$

II
- Moment des forces extérieures $M = \frac{pl^2}{8}$
- Moment de résistance $M = 4,8h^2$
- Pourcentage 1/2 %.

Enfin pour les ouvrages exposés à de fortes trépidations pour

lesquels le coefficient de sécurité de 2 avait été élevé de 50 %, le coefficient 6 sera réduit d'un 1/3 et deviendra $2/3 \times 6 = 4$.

III
- Moment des forces extérieures $M = \frac{pl^2}{8}$
- Moment de résistance $M = 4h^2$
- Pourcentage 1/2 %.

120. — B. Dalles épaisses (de 0m,10 à 0m,20 d'épaisseur). — Dans l'hypothèse $R_t = 20$, $u = 0{,}200$, on a trouvé pour les divers coefficients de sécurité, 2, 2,5 et 3, représentés par les rubriques I, II, III,

Pourcentages	Moments de résistance			Taux de travail du métal		
	1/2 % $\beta = 0$	1 % $\beta = 0.60$	2 % $\beta = 0$	1/2 % $\beta = 0$	1 % $\beta = 0.60$	2 % $\beta = 1$
$R_t = 20$ I $m =$	7,22	9,17	13,54	6,23	6,33	6,70
I $\frac{m}{R_c} = \frac{m}{46,50} =$	0,152	0,193	0,285	0,131	0,133	0,141
II $m =$	6,08	7,65	11,13	4,51	4,66	5,07
II $\frac{m}{R_c} = \frac{m}{38} =$	0,160	0,202	0,293	0,119	0,123	0,133
III $m =$	5,30	6,59	9,50	3,50	3,68	4,05
III $\frac{m}{R_c} = \frac{m}{31,67} =$	0,167	0,208	0,300	0,110	0,116	0,128
	$\frac{m}{R_c}$			$\frac{R_F}{R_c}$		
Soit en moyenne pour I, II, III	0,160	0,202	0,293	0,135	0,123	0,116
Et dans les mêmes conditions pour $R_t = 0$.						
$R_t = 0$ $\frac{m}{R_c} =$	0,119	0,157	0,253	0,313	0,237	0,200

On peut remarquer que, lorsque β augmente :

le rapport $\frac{R_F}{R_c}$ diminue légèrement pour $R_t = 20$

» » » rapidement pour $R_t = 0$.

Les différences s'atténuent considérablement quand β augmente.

Pour fixer les idées en opérant, comme il a été fait ci-dessus et en supposant $R_c = 30$ kilogrammes, par exemple, on aurait :

	$\beta = 0$; $p = 1/2$ %		$\beta = 0,60$, $p = 1$ %		$\beta = 1$; $p = 2$ %	
	$R_t = 20$	$R_t = 0$	$R_t = 20$	$R_t = 0$	$R_t = 20$	$R_t = 0$
$R_F =$	4,05	9,39	3,69	8,11	3,48	6,00
$m =$	4,80	3,57	6,06	4,71	8,79	7,59
Pour $M = 1\,200$ kgm. $h =$	16,42	19,06	14,62	16,60	12,13	13,07
Sect. de l'armat. $s =$ (augmentée de 2 cmq.)	10,21	11,53	27,39	28,55	50,52	54,28
Prix du mètre carré.	16fr,20	18fr,70	19fr,92	21fr,85	24,86	26,74
Perte	13,35 %		8,85 %		7,05 %	

Comme les prix ci-dessus sont tous relatifs à 1 200 kilogrammètres de résistance, il y a avantage à s'arrêter à $\beta = 0,60$, dont le prix ressort à 21fr, 85, tandis que celui relatif à $\beta = 1$ est de 26fr,74, pour une perte de 7,05 % au lieu de 8,85.

Ici il n'y a donc pas grande perte à supposer $R_t = 0$, et l'on peut adopter au besoin, indifféremment dans les deux hypothèses, l'expression

$$M = 0,157\, R_c h^2$$

avec un pourcentage de 1 % à l'extension
» » 0,6 % à la compression,

au lieu de $M = 0,202\, R_c h^2$ que donnait le concours du béton tendu.

Par contre, si l'on se sert de l'expression $M = \frac{pl^2}{8}$ au lieu de $M = \frac{pl^2}{10}$, on aura :

$$M = \frac{10}{8} \times 0,157\, R_c h = 0,200\, R_c h.$$

Soit en définitive :

pour un pourcentage de 1 % des armatures tendues
» » 0,6 % des armatures comprimées.

On prendra pour :

I. Coefficient de sécurité minim. de 2 , $R_c = 47^k,50$ $M = 9,5\ h^2$
II. » » » 2,5, $R_c = 38$ $M = 7,6\ h^2$
III. » » » 3 , $R_c = 31^k,67$ $M = 6,33\ h^2$

Cependant, exceptionnellement, on peut recourir à une autre solution :

Pourcentage de 2 % des armatures tendues
» 2 % » comprimées.

I. Coefficient de sécurité minim. de 2 , $R_c = 47^k,50$ $M = 15\ h^2$
II. » » » 2,5, $R_c = 38^k$ $M = 12\ h^2$
III. » » » 3 , $R_c = 31^k,67$ $M = 10\ h^2$

Remarque. — Les expressions des moments de résistance relatives aux dalles, doivent s'entendre pour 1 mètre de largeur, le moment réel est donc en kilogrammes centimètres : $M = 100\ Kh^2$ ou $M = 100\ h \times Kh$ ou KSh, forme qui a été indiquée ci-dessus.

121. — C. **Poutres rectangulaires.** — On a trouvé pour le moment de résistance de poutres rectangulaires dans les deux hypothèses :

	$R_t = 20$	$R_t = 0$
$p = 0,02$; $p' = 0,012$; $\beta = 0,6$ . .	0,511 $SR_c h$	0,483 $SR_c h$
$p = 0,04$; $p' = 0,024$; $\beta = 0,6$ . .	0,343 $SR_c h$	0.313 $SR_c h$

Ici la différence est si peu importante, qu'il n'y a pas à hésiter à appliquer à la première hypothèse les expressions trouvées pour la seconde.

Dans l'hypothèse $R_t = 0$, il a été donné d'ailleurs des expressions assez pratiques de la forme

$$M = (cS + ds)\ h \times R_c$$

(voir p. 472).

Appliquant à ces expressions les diverses valeurs de R_c répondant aux coefficients de sécurité envisagés, et en tenant compte

de la majoration de 25 % à laquelle on a droit si l'on se sert de la formule $M = \frac{pl^2}{8}$ au lieu de $M = \frac{pl^2}{10}$, on trouve en divisant par 100, pour avoir le moment en kilogrammètres :

Valeurs de $\frac{M}{h}$

		I $R_c = 47^k,50$	II $R_c = 38^k$	III $R_c = 31^k,67$
$\beta = 0$	$u = 0,200.$	$0,082\,S + 0,594\,s$	$0,065\,S + 0,475\,s$	$0,054\,S + 0,396\,s$
	$u = 0,100.$	$0,100\,S + 0,772\,s$	$0,080\,S + 0,617\,s$	$0,067\,S + 0,515\,s$
	$u = 0,050.$	$0,110\,S + 0,856\,s$	$0,088\,S + 0,689\,s$	$0,073\,S + 0,574\,s$
$\beta = 0,60$	$u = 0,200.$	$0,069\,S + 2,97\,s$	$0,055\,S + 2,37\,s$	$0,046\,S + 1,98\,s$
	$u = 0,100.$	$0,085\,S + 5,05\,s$	$0,068\,S + 4,04\,s$	$0,057\,S + 3,36\,s$
	$u = 0,050.$	$0,095\,S + 6,89\,s$	$0,076\,S + 5,03\,s$	$0,063\,S + 4,20\,s$
$\beta = 1$	$u = 0,200.$	$0,060\,S + 4,50\,s$	$0,048\,S + 3,61\,s$	$0,040\,S + 3,01\,s$
	$u = 0,100.$	$0,075\,S + 7,90\,s$	$0,060\,S + 6,31\,s$	$0,050\,S + 5,27\,s$
	$u = 0,050.$	$0,085\,S + 11,10\,s$	$0,068\,S + 8,88\,s$	$0,057\,S + 7,40\,s$

122. — D. Éléments de planchers nervurés. — On a trouvé pour expression du moment de résistance d'un élément de plancher nervuré, pour un taux de travail du métal $R_t = 1300$ kilogrammes (1) et une valeur de $p = 0,03$ pour

$$R_t = 20 \qquad M = 13,25\,sh$$
$$R_t = 0 \qquad M = 10,86\,sh.$$

Ici la différence entre les deux expressions est assez sensible et elle s'accentuerait encore si l'on prévoit des pourcentages inférieurs à 3 %.

Comme d'autre part on n'a pas prévu d'armatures à la compression, il y a lieu de se méfier des moments négatifs résultant d'un encastrement partiel. Quand il n'y a pas d'encastrement certain, la formule $\frac{pl^2}{8}$ est admissible et on n'a pas le droit d'augmenter ces coefficients de 25 %.

On ne le fera que si le plancher est réellement encastré par un prolongement suffisant des murs. Dans ce cas, il sera prudent

de prévoir des barres comprimées et de calculer la nervure seule, en lui appliquant les formules données pour les poutres rectangulaires, relatives à $\beta = 1$, et en raison de l'équation

$$M = \frac{pl^2}{12}.$$

On se servira donc, soit de l'expression

$$M = 13{,}25\, sh,$$

dont le coefficient 13,25 sera réduit de manière à fournir un coefficient de sécurité plus grand, soit de

$$\boxed{M = 10{,}86\, sh}$$

dans les deux hypothèses, ce qui paraît être plus avantageux.

APPENDICE

CHAPITRE PREMIER

ÉLÉMENT DE PLANCHER NERVURÉ

R$t = 20$

123. Poutres à simple té. (*Autre méthode*).— On a vu page 366, que les équations qui donnent x et m, sont dans ce cas.

$$(1 + 2\varphi + \varphi^2)\, x^2 - 2\left[(1 + \varphi + \varphi^2 + e\lambda + np\,(1 + \beta)\right] x + 1 + \varphi^2 + 2e\lambda - e^2\lambda + 2np\beta + 2npu - 2np\beta u' = 0$$

et

$$R_c \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}(1 - x)^2 \\ + \frac{1}{3} e\lambda \left[\frac{e^2}{1 - x} + 3(1 - x - e) \right] \\ + n\beta p \frac{(1 - x - u')^2}{1 - x} \\ + np \frac{(x - u)^2}{1 - x} \\ + \varphi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{\varphi^2}{6}(1 - x)^2 \right] \end{array} \right.$$

On pourra supposer $u = u'$, si l'on place l'armature comprimée le plus haut possible, comme l'on place l'armature tendue le plus bas possible.

De la première équation, on tire

$$2np = \frac{(1 + 2\varphi + \varphi^2)x^2 - 2(1 + \varphi + \varphi^2)x + 1 + \varphi^2 + e\lambda(2 - e - ex)}{x - u - \beta(1 - x - u)}$$

Rappelons que p est le pourcentage de l'armature tendue par rapport à la section de la nervure.

On admettra $u = 0{,}125$, soit en grandeur absolue $0{,}125\ h$. Cette valeur est un peu faible quand on prévoit 2 armatures superposées. φ est donné, comme on l'a vu antérieurement, par la valeur de R_c qui répond à la nature des charges.

λ est un facteur qui dépend souvent, dans de certaines limites, de l'étude du plancher à couvrir ; λ exprime le rapport de la largeur de l'élément de plancher nervuré, diminuée de la largeur a de la nervure, à cette dernière largeur.

e l'épaisseur du hourdis devrait dépendre des charges et de la valeur choisie pour λ ; e n'est pas une valeur absolue, c'est le rapport de l'épaisseur du hourdis à la hauteur totale h de la poutre à té (fig. 174).

β rapport de la section totale des armatures comprimées à celle des armatures tendues, est à déterminer d'après des conditions économiques.

n rapport du coefficient d'élasticité du métal à celui du béton, sera supposé égal à 20.

x distance de la fibre neutre à la face extrême tendue ne peut varier dans une large mesure ; x n'est pas une valeur absolue ; c'est le rapport de la distance absolue de la fibre neutre à la hauteur h.

Le problème se présente donc d'une façon très complexe et ne peut donner une solution simple que par un examen approfondi de toutes les conditions théoriques et pratiques.

En premier lieu, on se proposera de faire travailler en même temps, les armatures et le béton comprimé à leurs taux de travail maximum, c'est-à-dire on prendra, par exemple, dans le cas I. $R_F = 1\,300$ kilogrammes pour une armature en acier, et $R_c = 47^{kg},50$ pour le béton.

Cette première condition appliquée à l'équation (3).

$$R_F = nR_c \frac{x - u}{1 - x} \quad (3)$$

D'où l'on tire

$$x = \frac{R_F + nuR_c}{R_F + nR_c}$$

donne, pour $R_F = 1300$; $n = 20$; $u = 0,125$; $R_c = 47,50$.

$$x = \frac{1300 + 20 \times 0,125 \times 47,50}{1300 + 20 \times 47,50} = 0,630$$

D'où immédiatement

$$1 - x = 1 - 0,630 = 0,370$$
$$x - u = 0,630 - 0,125 = 0,505$$
$$1 - x - u = 1 - 0,630 - 0,125 = 0,245$$

Portant ces valeurs dans l'expression de $2np$, et faisant

$$\varphi = \frac{Rt}{R_c} = \frac{20}{47,5} = 0,421,$$

on a

$$2np = \frac{2.019 \times 0.63^2 - 2 \times 0.63 \times 1.598 + 1.177 + e\lambda(2 - e \times 0.63)}{0,505 - \beta \times 0,245}$$

et successivement

$$2np = \frac{e\lambda(0.740 - e) - 0,035}{0,505 - 0,245\beta}$$

$$\lambda = \frac{2np(0,505 - 0,245\beta) + 0.035}{e(0,740 - e)}$$

Comme il n'est pas prudent d'admettre des valeurs trop grandes pour λ, dont le travail à la flexion n'aurait pas l'efficacité complète supposée pour le calcul du travail unitaire m qui va suivre, il y a lieu d'examiner les valeurs de cette expression de λ, pour diverses valeurs admissibles de e, 0,38 ; 0,25 ; 0,20, et pour $\beta = 0$, cas qui donne le maximum de λ.

Pour $n = 20$, $\beta = 0$, on a

Pour $e = 0,30$ $\quad \lambda = \frac{40\,p \times 0,505 + 0,035}{0,132}$

$e = 0,25$ $\quad \lambda = \frac{40\,p \times 0,505 + 0,035}{0,1225}$

$e = 0,20$ $\quad \lambda = \frac{40\,p \times 0,505 + 0,035}{0,11}$

Soit pour $p = 0{,}05$ et une largeur de nervure $a = 0{,}30$:

$e = 0{,}30$	$\lambda = 10{,}30$	d'où $l = (\lambda + 1)\, a = 3{,}18$
$e = 0{,}25$	$\lambda = 11{,}10$	$l = 3{,}42$
$e = 0{,}20$	$\lambda = 12{,}60$	$l = 3{,}87$

Et pour $p = 0{,}02$ ... et $a = 0{,}20$.

$e = 0{,}30$	$\lambda = 3{,}33$	d'où $l = 0{,}70$
$e = 0{,}25$	$\lambda = 3{,}57$	» $l = 0{,}75$
$e = 0.20$	$\lambda = 4{,}06$	» $l = 0{,}85$

Ces valeurs de l très faibles, puisqu'elles n'atteignent pas 4 mètres, avec des pourcentages difficiles à réaliser, seraient encore plus faibles pour des valeurs de β supérieures à 0. Il est certain qu'elles sont toujours inférieures à celles que l'on est conduit à adopter en pratique. On peut donc être rassuré sur l'efficacité complète de la fraction de l'étendue des ailes du té, qui entrera dans les calculs suivants. Il ne faut pas oublier en outre que la valeur fictive de λ qui va être employée, a été déterminée de façon à faire travailler le béton comprimé et l'armature tendue à leur maximum ; il n'y a donc aucune raison d'armer la partie comprimée.

Ceci posé le moment unitaire m a pour expression

$$m = R_c \Bigg[\overbrace{\frac{(1 - 0{,}630)^2}{3}}^{0{,}0456} + \frac{e\lambda}{3} \left(\frac{e^2}{1 - 0{,}630} + 3\,(1 - 0{,}630 - e) + 20\, p\beta\, \frac{(1 - 0{,}630 - 0{,}125)^2}{1 - 0{,}630} \right) + 20\, p\, \frac{0{,}630 - 0{,}125)^2}{1 - 0{,}630} \underbrace{+ 0{,}421 \left[\frac{0{,}630^2}{2} - \frac{0{,}0886\,(1 - 0{,}630)^2}{3} \right]}_{0{,}082} \Bigg]$$

ou

$$m = R_c \left[0{,}1275 + \frac{e\lambda}{3} (1{,}11 + 2{,}703\, e^2 - 3e) + 3{,}245\, \beta p + 13{,}785\, p \right]$$

et remplaçant λ par la valeur trouvée ci-dessus

$$m = R_c \left[0,1275 + \frac{e}{3}(1,11 + 2,703e^2 - 3e) \frac{2np(0,505 - 0,245\beta) + 0,035}{e(0,740 - e)} \right.$$

$$\left. + 3\,245\,\beta p + 13,785\,p \right] (^1).$$

pour $\beta = 0$, la valeur de m devient

$$m = 47,5 \left[0,1275 + \frac{20,20p + 0,035}{3(0,740 - e)}(1,11 + 2,703e^2 - 3e) + 13,785p \right]$$

D'où

pour $e = 0,30$	$m = 6,63 + 934\,p$
» $e = 0,25$	$m = 6,65 + 1\,000\,p$
» $e = 0,20$	$m = 6,69 + 1\,021\,p$

(1) De cette expression il résulte que la valeur de $\beta = 0$ est celle qui donne à m sa valeur maxima ; en effet la quantité comprise entre parenthèse est composée d'une partie indépendante de β, et d'une partie fonction de β qui a pour expression

$$3,245\beta\,p - \frac{2 \times 0,245}{3} n\beta p \frac{1,11 + 2,703e^2 - 3e}{0,740 - e}$$

or, la valeur de cette expression est négative pour toute valeur de β comme il est facile de s'en rendre compte en observant que la fraction

$$\frac{1,11 + 2,703\,e^2 - 3\,e}{0,740 - e}$$

a pour valeur

1,03	pour $e = 0,30$
1,08	» $e = 0,25$
1,14	» $e = 0,20$

c'est-à-dire qu'elle est très voisine de l'unité au minimum et par suite la quantité variable de la valeur de m est plus grande que

$$R_c p\beta \left(3,245 - \frac{2}{3} \times 0,245n\right)$$

ou plus grande que

$$- 0,021\,p\beta\,R_c$$

on n'a donc aucun intérêt à armer la partie comprimée et d'autant moins que l'armature tendue sera relativement plus forte.

La diminution de m, quand on prévoit une armature comprimée n'est d'ailleurs pas considérable, puisque pour $\beta = 1$ et $p = 0,02$, cette diminution est de $0,021 \times 0,02 \times 1 \times 47,50 = 0,020$ kilogrammètres environ.

On aurait de même dans le cas II, pour $R_c = 38$, $R_F = 1040$, $x = 0{,}630$ comme plus haut, puisque tous les termes de la fraction

$$\frac{R_F + mnR_c}{R_F + nR_c}$$

sont des multiples du nouveau coefficient de sécurité 2,5, comme ils l'étaient de l'ancien, 2.

$$2np = \frac{2{,}33 + 0{,}63^2 - 2 \times 1{,}803 \times 0{,}63 + 1{,}277 + e\lambda(2 - e - 2 \times 0{,}630)}{0{,}630 - 0{,}125}$$

D'où

$$\lambda = \frac{20{,}20\,p + 0{,}070}{e(0{,}740 - e)},$$

valeur légèrement plus forte que celle obtenue plus haut pour le cas I.

Ce qui donne pour $\beta = 0$.

$e = 0{,}30$	$\lambda = 153\,p + 0{,}531$	$m = 6{,}49 + 788\,p$
$e = 0{,}25$	$\lambda = 165\,p + 0{,}571$	$m = 6{,}53 + 800\,p$
$e = 0{,}20$	$\lambda = 187\,p + 0{,}648$	$m = 6{,}59 + 817\,p$

Enfin pour le cas III, $R_c = 31{,}67$, $Rf = 8{,}67$ on aura encore $x = 0{,}630$, et pour $\beta = 0$.

$$2np = \frac{2{,}66 \times 0{,}63^2 - 2 \times 2{,}03 \times 0{,}63 + 1{,}10 + e\lambda(2 - e - 2 \times 0{,}630)}{0{,}630 - 0{,}125}$$

$$\lambda = \frac{20{,}20\,p + 0{,}102}{e(0{,}740 - e)}$$

$e = 0{,}30$	$\lambda = 153\,p + 0{,}773$	$m = 6{,}34 + 656\,p$
$e = 0{,}25$	$\lambda = 165\,p + 0{,}832$	$m = 6{,}39 + 667\,p$
$e = 0{,}20$	$\lambda = 187\,p + 0{,}944$	$m = 6{,}46 + 681\,p$

Observant que la valeur de e n'influe que très peu sur celle de m, on appliquera la valeur moyenne $e = 0{,}25$ à toutes les autres, avec une erreur moindre que 2 % en plus ou en moins.

et l'on pourra écrire en attribuant à p sa valeur en centièmes, c'est-à-dire, en prenant $p = 2\ \%$ pour $p = 0{,}02$, par exemple :

I	coefficient de sécurité de		2	$m = 6{,}65 + 10\,p$
II	»	»	2,5	$m = 6\ 53 + 8\,p$
III	»	»	3	$m = 6{,}39 + 6\ 67\,p.$

On aura de même approximativement pour le moment de résistance à la limite d'élasticité de l'acier et du béton.

$$m_l = 7 + 20\,p.$$

En général la largeur l de la travée est déterminée par des considérations pratiques ; d'ailleurs on a vu que le mode de calcul proposé était indépendant de cette valeur dans de certaines limites ; l'épaisseur du hourdis résulte de la surcharge et de cette portée l et d'ailleurs on a démontré qu'elle n'avait qu'une influence négligeable sur la résistance de la poutre à simple té. On se donne ensuite la hauteur totale h, qui est la somme de la saillie de la nervure et de l'épaisseur du hourdis, on se donne aussi l'épaisseur a de la nervure.

On a donc

$$\mathrm{M} = mah^2$$

formule dans laquelle h et a sont exprimés en centimètres, et m et M en kilogrammes centimètres ; si l'on veut avoir m et M en kilogrammètres, il faut exprimer h en centimètres et a en mètres.

On a donc (I) :

$$m = 6{,}66 + 10p$$

$$p = \frac{s}{ah}$$

où s section des armatures est exprimé en centimètres carrés, et h en centimètres ; a a été pris ci-dessus en mètres ; l'homogénéité de la formule est rétablie par le fait qu'on a pris pour p une valeur 100 fois plus grande.

On a donc

$$m = 6{,}66 + \frac{10s}{ah}$$

et par suite

$$M = \left(6{,}66 + \frac{10s}{ah}\right) ah^2$$

ou

$$M = 6.66\,ah^2 + 10\,sh \qquad \text{(I)}$$

on aurait de même

$$M = 6{,}53\,ah^2 + 8\,sh \qquad \text{(II)}$$
$$M = 6{,}39\,ah^2 + 6{,}67\,sh \qquad \text{(III)}$$
$$M = 7\,ah^2 + 20\,sh \qquad (l)$$

ou inversement

$$\text{I.}\quad s = \frac{M - 6{,}66ah^2}{10h} \qquad \left\{\begin{array}{l} x = 0{,}630 \\ u = 0{,}125 \\ R_t = 20 \\ n = 20. \end{array}\right.$$
$$\text{II.}\quad s = \frac{M - 6{,}53ah^2}{8h}$$
$$\text{III.}\quad s = \frac{M - 6{,}39ah^2}{6{,}67h}$$

Ayant déterminé s par l'une de ces dernières formules, il y aura lieu de vérifier si la dimension donnée à la largeur a de la nervure est suffisante pour loger la section de métal trouvée; on modifiera a en conséquence le cas échéant; soit que l'on ait pris a trop petit ou trop grand, ce qui n'est évidemment pas économique.

Une autre précaution à prendre, principalement quand les nervures sont peu distantes, c'est de vérifier si la valeur fictive de λ qui a été prise dans les calculs n'est pas supérieure à celle à laquelle donne droit la largeur de la travée. Ces valeurs fictives sont résumées dans le tableau suivant, qui *ne sont applicables que si λ répond à une largeur de travée inférieure à celle du projet.*

	$e = 0{,}30$	$e = 0{,}25$	$e = 0{,}20$
I	$\lambda = 153p + 0{,}265$	$\lambda = 165p + 0{,}286$	$\lambda = 187p + 0{,}324$
II	$\lambda = 153p + 0{,}530$	$\lambda = 165p + 0{,}571$	$\lambda = 187p + 0{,}648$
III	$\lambda = 153p + 0{,}773$	$\lambda = 165p + 0{,}832$	$\lambda = 178p + 0{,}944$

Les équations sont basées sur une valeur de $u = 0{,}125$, elles deviennent pour $u = 0{,}090$ et $u = 0{,}050$.

	$R_i = 20$; $n = 20$	
	$u = 0{,}090$	$n = 0{,}050$
I	$m = 6{,}48 + 10{,}48\,p$	$m = 6{,}26 + 10{,}98\,p$
II	$m = 6{,}35 + 8{,}38\,p$ $x = 0{,}616$	$m = 6{,}13 + 8{,}78\,p$ $x = 0{,}599$
III	$m = 6{,}20 + 6{,}98\,p$	$m = 5{,}97 + 7{,}32\,p$

Portant ces valeurs en ordonnées, en prenant $u = 0{,}125$, $u = 0{,}090$ et $u = 0{,}050$ comme abscisses, on obtient un graphique fournissant le moment unitaire d'une poutre à simple té, dont l'armature tendue se trouve à une distance quelconque de la face tendue extrême.

Le moment unitaire est de la forme $m = \mu_1 + \mu_2 p$.

Le premier terme μ_1, varie peu ; il augmente quand la valeur de u s'accroît ; le second terme $\mu_2 p$ est directement proportionnel aux travaux admis pour le béton et le métal ; il augmente quand la valeur de u diminue. Il suffit d'ajouter ces deux valeurs relevées sur le graphique pour une valeur quelconque de u.

Remarque. — Les numérateurs des expressions de s varient peu, suivant le coefficient de C qui les concerne, on peut donc sans erreur sensible prendre le numérateur moyen $M = 6{,}53ah^2$.

Quant aux dénominateurs

$$\frac{1}{10h}, \quad \frac{1}{8h}, \quad \frac{1}{6{,}67h};$$

ils peuvent s'écrire

$$\frac{2}{20h}, \quad \frac{2{,}50}{20h}, \quad \frac{3}{20h},$$

ou tous les trois

$$\frac{C}{20h}.$$

La section de l'armature tendue en fonction du coefficient de sécurité est donc très approximativement.

$$s = (M - 6{,}53ah^2)\frac{C}{20h},$$

et inversement

$$C = \frac{20hs}{M - 6{,}53ah^2},$$

et par suite, d'après les conventions ci-dessus, les taux de travail du métal et du béton peuvent être déterminés également en quelques instants par les formules ci-après :

$$R_F = \frac{26}{C} = 1{,}3\,\frac{M - 6{,}53ah^2}{hs},$$

$$R_c = \frac{95}{C} = 4{,}75\,\frac{M - 6{,}53ah^2}{hs}.$$

Ces taux de travail répondent à $u = 0{,}125$.

Si la valeur de u différait sensiblement de 0,125, on aurait pour $u = 0{,}090$

$$R_F = 1{,}3\,\frac{M - 6{,}35ah^2}{hs} \times \frac{10}{10{,}48},$$

d'après les observations précédentes ou

$$R_F = 1{,}24\,\frac{M - 6{,}35ah^2}{hs}$$

et

$$R_c = 4{,}53\,\frac{M - 6{,}35ah^2}{hs}.$$

De même pour $u = 0{,}050$

$$R_F = 1{,}3\,\frac{M - 6{,}13ah^2}{hs} \times \frac{10}{10{,}98}$$

ou

$$R_F = 1{,}18\,\frac{M - 6{,}13ah^2}{hs},$$

$$R_c = 4{,}33\,\frac{M - 6{,}13ah^2}{hs}.$$

Et une interpolation donnerait les valeurs de R_F et de R_c pour une valeur quelconque de u.

124. — Application I. — *L'élément de plancher* (fig. 174) *de* $3^m \times 6^m,50$ *avec hourdis de* 0,11 *et nervure de* 16 *de largeur et de* 40 *de hauteur, a été armé à la tension de* 2 *ronds de* 35 *millimètres, on demande le travail du métal et du béton sous une surcharge de* 400 *kilogrammes.*

Le hourdis de $0^m,11$ mesure $0,11 \times 3 = 0^m,330$
La nervure de $0,16 \times 0,40 = 0^m,064$
$0^m,394$.

Le poids mort est $0,394 \times 2500 = 985$ kilogrammes par mètre
La surcharge donne $3 \times 400 = 1200$ » »
Charge totale $= 2185$ » »

Moment fléchissant maximum sur 2 appuis libres distants de $6^m,50$

$$M = 2185 \times \frac{\overline{6,50}^2}{8} = 11540 \text{ kilogrammètres.}$$

Les données du problème sont donc :

$$M = 11540 \text{ kilogrammètres}$$
$$a = 0,16$$
$$h = 40 + 11 = 51$$
$$s = 2 \text{ ronds de } 35 = 2 \times 9,62 = 19,24$$

et par suite

$$\frac{M - 6,53ah^2}{hs} = \frac{11540 - 6,53 \times 0,16 \times \overline{51}^2}{51 \times 19,24}$$

$$\frac{M - 6,53ah^2}{hs} = 8,99.$$

D'où

$$R_F = 1,3 \times 8,99 = 11^{kg},69$$
$$R_c = 4,75 \times 8,99 = 42^{kg},70.$$

L'équation ci-dessus s'applique à une distance relative $u = 0{,}125$ soit en valeur absolue $0{,}125 \times 51 = 6{,}37$, alors que le projet n'indique que 5. Les taux de travail sont donc un peu moins forts que les chiffres ci-dessus.

D'autre part, il y a lieu de vérifier si la valeur fictive de λ qui entre dans ces calculs n'est pas exagérée.

On a ici :

$$\lambda = \frac{300 - 16}{16} = \frac{284}{16} = 17{,}75.$$

Le taux de travail du métal trouvé, de $11^{kg}{,}69$ est compris entre 13 kilogrammes (I) et 10,4 (II) ; il en est très approximativement la moyenne ; c'est-à-dire que si le métal prévu est de l'acier, le coefficient de sécurité est de $\frac{2 + 2{,}50}{2} = 2{,}25$.

En outre $e = \frac{11}{51} = 0{,}215$.

Si l'on se reporte aux valeurs fictives de λ de la p. 533, on trouve pour $e = 0{,}20$ qui se rapproche le plus de 0,215

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & \lambda = 187p + 0{,}324 \\ \text{II} & \lambda = 187p + 0{,}648 \end{array}\right\} \text{moyenne : } 187p + 0{,}486.$$

(1) La valeur réelle de u est $\frac{5}{51} = 0{,}098$. Si l'on voulait donc obtenir plus exactement les taux de travail du béton et du métal, il faudrait opérer comme suit :

0,098 étant compris entre 0,125 et 0,090 et les travaux étant exprimés pour $u = 0{,}090$ en fonction de

$$\frac{M - 6{,}35ah^2}{hs} = \frac{11\,540 - 6{,}35 \times 0{,}16 \times \overline{51}^2}{51 \times 19{,}24} = 9{,}06.$$

On aurait pour $u = 0{,}090$

$$R_F = 1{,}24 \times 9{,}06 = 11^{kg}{,}23$$
$$R_c = 4{,}53 \times 9{,}06 = 41^{kg}{,}04.$$

Alors que pour $u = 0{,}125$ on a trouvé

$$R_F = 11^{kg}{,}69$$
$$R_c = 42^{kg}{,}70.$$

Interpolant, on a pour $u = 0{,}098$.

$$R_F = 11{,}23 + (11{,}69 - 11{,}23)\frac{0{,}098 - 0{,}090}{0{,}125 - 0{,}090} = 11^{kg}{,}33$$
$$R_c = 41{,}04 + (42{,}70 - 41{,}04)\frac{0{,}098 - 0{,}090}{0{,}125 - 0{,}090} = 41^{kg}{,}42.$$

Or

$$p = \frac{s}{ah} = \frac{19,24}{16 \times 51} = 0,0236,$$

et par suite

$$\lambda = 0,0236 \times 187 + 0,486$$
$$\lambda = 4,90.$$

C'est-à-dire que la partie de hourdis supposée intéressée est de $4,9 \times 1,6 + 16 = 94^{cm},4$ au lieu de 3 mètres.

Application II. — *Calculer un plancher de* 400 *kilogrammes de surcharge, avec poutres de* 7 *mètres de portée, écartées de* 3 *mètres d'axe en axe. On demande un coefficient de sécurité de* 2.

Calcul du hourdis. — On a déterminé son épaisseur de 10 par un tâtonnement préalable ; le poids mort est donc :

	$0,10 \times 2500 =$	250 kilogrammes
Surcharge	$=$	400 »
Charge totale	$=$	650 »

$$M = 650 \times \frac{3^2}{8} = 703 \text{ kilogrammètres}$$

(Si l'on déduit de la portée, l'épaisseur de la poutre, pour avoir la portée nette qui serait ici de $3 - 0,16 = 2,84$).

Appliquant la formule des dalles minces :

$$e = \sqrt{\frac{703}{6,72}} = 10,2.$$

On prendra 10 centimètres, en raison de l'observation précédente relative à la réduction de la portée produite par l'épaisseur de la poutre.

Le pourcentage de 1/2 % donne 500 millimètres carrés pour $e = 10$, ou 10 barres de 8 millimètres par mètre (section 50 millimètres carrés).

Calcul de la poutre. — On se donnera *a priori* l'équarrissage qui résulte de conditions pratiques, 16×30 par exemple (fig. 178).

Poids mort de la poutre $16 \times 30 \times 0,25 =$ 120 kilogrammes
Charge transmise par le hourdis $3 \times 650 =$ 1 950 »
Charge totale par mètre courant = 2070 »

$$M = \frac{2070 \times 7^2}{8} = 12\,679 \text{ kilogrammètres}$$

$$s = \frac{12\,679 - 6,66 \times 0.16 \times 1\,600}{10 \times 40} = 27,43$$

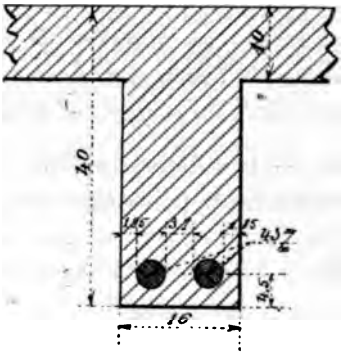


Fig. 178

si l'on prévoit 2 barres, chacune aura 13,715 de section, on prendra des ronds de 42 millimètres ayant 13,85 de section.

Dessinant la section de la poutre, on s'aperçoit que l'épaisseur de 16 est un peu juste ; elle ne laisse en effet que 4 de béton entre les barres et 1,80 en dehors.

Si l'on prend 17 au lieu de 16, le poids mort de la nervure devient 128 kilogrammes, le poids mort total 2078 dont le moment est 12 727 kilogrammètres, on a donc :

$$s = \frac{12\,727 - 6,66 \times 0,17 \times 1\,600}{10 \times 40} = 27,29$$

ou 13,645 pour chaque rond, les ronds de 42 sont donc un peu plus forts. En outre ces formules supposent $u = 0,125$ et l'on a $\frac{4,5}{40} = 0,11125$ on dispose donc encore d'un nouvel excédent de sécurité.

Application III. — *Déterminer une poutre capable d'une résistance de* 70 000 *kilogrammètres avec un coefficient de sécurité de* 3.

On prévoiera *a priori* un équarrissage de 50 × 60.

$$a = 0{,}50. \qquad h = 70.$$

Les barres seront certainement de gros diamètres, 50 millimètres environ, on aura donc 5 environ comme distance de l'axe des armatures à la face tendue, ou $u = \frac{5}{60} = 0{,}0835$. Comme on recherche une sécurité exceptionnelle, on appliquera la formule

$$s = \frac{M - 6{,}20ah^2}{6{,}98h},$$

répondant à $u = 0{,}090$.

On aura donc

$$s = \frac{70\,000 - 6.20 \times 0.50 \times 70^2}{6{,}98 \times 70}.$$

D'où $$s = 112{,}20.$$

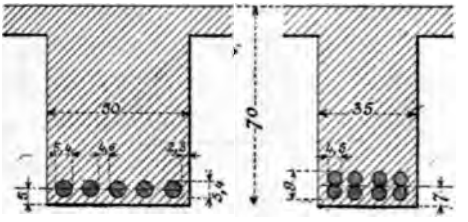


Fig. 179

Il ne faudra pas moins de 5 barres de 54 millimètres, donnant une section de 114,50 (fig. 179).

Ces barres laisseront entre elles un intervalle de 4,6 et aux extrémités un recouvrement de 2,3 ; la largeur de 50 prévue est donc amplement suffisante.

Si l'on ne dispose pas d'une largeur de 50, et si l'on veut employer des barres de diamètres plus courants, on disposera les barres comme sur la figure de droite.

La distance de l'axe des fers sera au moins 7, et par suite $u = \frac{7}{70} = 0{,}100$. Pour avoir un excès de sécurité, on appliquera donc la formule :

$$s = \frac{M - 6{,}39ah}{6{,}67h}$$

relative à $u = 0{,}125$, et dans laquelle on fera $h = 70$ et $a = 0{,}36$, par exemple

$$s = \frac{70\,000 - 6{,}39 \times 0{,}36 \times \overline{70}^2}{6{,}67 \times 70} = 125{,}80$$

soit pour 8 barres

$$\frac{125{,}80}{8} = 15{,}73 \text{ par barre}$$

ou 8 barres de 45 millimètres section (15,90), il y aura 4,25 de béton au minimum entre les barres, et 2,10 aux extrémités ; la largeur prévue de 35 est donc suffisante.

CHAPITRE II

—

DISCUSSION DES ÉQUATIONS SIMPLIFIÉES

On recherchera ici les modifications à apporter le cas échéant aux conclusions des chapitres précédents, dans le cas notamment où les valeurs de R_c, R_F, de R_t, de u et de n ne seraient pas celles qui ont été prévues.

125. Dalles d'épaisseur inférieure à 0,10. Variations dues à R_c. — Il a été trouvé pour un pourcentage de 1/2 %, $R_t = 20$ kilogrammes, $u = 0,300$ et les diverses valeurs considérées de R_c.

R_c par cmq.	x	m	R_F par mmq.	c
—	—	—	—	—
47k,50	0,533	6,72	4,74	2,5
38	0,511	5,76	3,28	2,5
31,67	0,497	5,05	2,48	3,0
on ajoutera encore				
20	0,482	3,34	1,41	4,5

Examinant ce tableau, on remarque :

Que la fibre neutre s'abaisse quand le travail du béton diminue.

Le moment de résistance augmente à peu près proportionnellement avec le taux de travail du béton, mais sensiblement moins vite :

Le taux de travail du fer augmente beaucoup plus rapidement que celui du béton quand le moment des forces extérieures s'accroît. Ainsi dans le cas précité, le moment étant à peu près

doublé, le taux de travail du béton est à multiplier par 2,375 et celui du fer par 3,34.

Variations de n. — On a supposé $n = 20$ [1]. Quelques auteurs attribuent à n des valeurs notablement moindres, de 10 par exemple, prises par rapport au coefficient d'élasticité du fer.

Tout d'abord, si l'on emploie de préférence l'acier doux, le rapport $n = \frac{E_F}{E_c}$ étant pris égal à 10 par rapport au fer, devient $10 \times \frac{22}{20} = 11$ par rapport à l'acier.

Ensuite la valeur 10 est généralement basée sur des expériences faites sur des éprouvettes de mortier exécutées avec un soin tout particulier et pour les premières charges initiales. Pratiquement, on sait qu'il est difficile, sinon absolument impossible de réaliser sur un chantier la perfection d'une éprouvette fabriquée dans un laboratoire. D'ailleurs, sur le chantier, le béton est obtenu avec plus d'eau, il est donc plus poreux, moins compact, et son coefficient d'élasticité est beaucoup moins élevé. On sait également d'autre part que le coefficient d'élasticité diminue quand l'effort augmente. Il a donc paru convenable d'adopter une valeur de n plus élevée et de s'en tenir aux déterminations expérimentales de M. Ed. Coignet, au résultat desquelles on tend à se rallier pour les bétons usités dans la construction des ouvrages courants en ciment armé.

Hâtons-nous d'ajouter d'ailleurs que le choix de la valeur de n n'a pas une importance considérable dans les calculs ci-dessus.

Si l'on considère par exemple le cas I (sécurité de 2), on trouve pour :

$$u = 0{,}300 \qquad p = 0{,}005 \qquad R_c = 47{,}50 \qquad R_t = 20$$

$$2{,}019\, x^2 - 2\,(1{,}598 + 0{,}005\, n)\, x + 1{,}177 + 2 \times 0{,}3 \times 0{,}005\, n = 0$$

et

$$m = 47{,}50 \left[\frac{(1 - x^2)}{3} + 0{,}005\, n \frac{(x - 0{,}300)^2}{1 - x} + 0{,}421 \left(\frac{x^2}{x} - 0{,}0886 \frac{(1 - x)^2}{3} \right) \right].$$

[1] Cette valeur est indiquée dans la brochure précitée de MM. Ed. Coignet et M. de Tédesco.

D'où l'on tire pour :

	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$
	—	—	—
$x =$	0,554	0,533	0,516
$m =$	6,45	6,72	6,92

Variations de u. — Il n'est pas possible d'assigner une valeur fixe à u ; celle qui a été prévue pour le calcul des dalles minces, ne doit être considérée que comme une moyenne.

Il convient à chaque application de placer les armatures le plus près possible de la face extrême voisine, en les recouvrant d'une épaisseur de béton au moins égale à 1,5 cm. Si la valeur de u qui résulte de cette condition est plus faible que 0,300, admise comme base des calculs précédents, on disposera d'un supplément de marge de sécurité en appliquant les formules simplifiées ci-dessus. Dans le cas contraire, il y aura lieu de diminuer la valeur de m indiquée.

On peut se rendre compte de l'influence considérable de u par l'examen des chapitres précédents ; on se bornera à rappeler ici les résultats de calculs trouvés pour les dalles de faible épaisseur et celles de forte épaisseur, dans les mêmes conditions :

$$M_c = 47,50 \qquad p = 0,005 \qquad p' = 0,$$

mais pour lesquelles on s'est basé respectivement sur $u = 0,300$ et $u = 0,200$; soit :

$u = 0,300$	$1 - u = 0,700$	$x = 0,533$	$m = 6,72$
$u = 0,200$	$1 - u = 0,800$	$x = 0,517$	$m = 7,22$

Dans ce cas particulier, la distance $1 - u$ augmentant de 14 % environ, la résistance de la dalle augmente de 7,5 % environ.

Variations de R_t. — Appliquant l'équation générale du cas I, pour :

$$R_c = 47,50$$
$$p = 0,005$$
$$n = 20$$
$$u = 0,300$$

et diverses valeurs de R_t comprises entre zéro et 40 kilogrammes, on trouve pour :

	$R_t = 40^k$	$R_t = 30^k$	$R_t = 20^k$	$R_t = 10^k$	$R_t = 0$
	—	—	—	—	—
$x =$	0,483	0,496	0,533	0,607	0,713
$m =$	7,942	7,568	6,72	5,42	4,13
$R_F =$	3,36	3,70	4,74	7,42	13,67

Ce tableau montre l'influence considérable de la résistance du béton à la traction dans les dalles.

Elle est capable d'abaisser la fibre neutre de 32 °/₀ d'abaisser le taux de travail du métal de 45, 65, 72 et même 75 °/₀ pour les diverses valeurs de R_t ci-dessus.

Quant à la résistance de la dalle, elle est presque doublée à égalité de coefficient d'élasticité quand R_t varie de 0 à 40 kilogrammes.

Inversement, si l'on a calculé la dalle sur la base de $m = 6,72$ par exemple, en comptant sur une valeur de $R_t = 20$ kilogrammes, et qu'à la suite d'une circonstance quelconque, cette valeur est réduite considérablement, il est certain que le coefficient de sécurité que l'on avait en vue (par rapport au métal), diminuera notablement.

Que devient le coefficient de sécurité ? — On ne saurait répondre à cette question qu'en déterminant expérimentalement la valeur de R_t ou en se la donnant arbitrairement pour s'en servir dans l'application des formules générales ci-dessus.

Appliquant les formules générales au cas de $u = 0,300$, $n = 20$, $R_t = 15$ kilogrammes, 10 kilogrammes, 5 kilogrammes et 0 ; et à diverses valeurs croissantes de R_c, on obtient autant de valeurs de x et de m. Portant les valeurs de m en abscisses, et les valeurs de R_c correspondantes en ordonnées, il suffit de mener l'ordonnée correspondant à $m = 6,72$ pour trouver R_c.

Dans le cas le plus défavorable, $R_t = 0$ et $n = 10$, on a pour $p = 0,005$ et $u = 0,300$:

$$x^2 - 2\,(1 + 10 \times 0,005)\,x + 1 + 10 \times 0,005 \times 0,300 \times 2 = 0.$$

D'où :

$$x = 0,781.$$

et :

$$m = R_c \left[\frac{(1 - 0,781)^2}{3} + 10 \times 0,005 \frac{(0,781 - 0,300)}{1 - 0,781}\right] = 0,0688\ R_c.$$

D'où :

$$R_c = \frac{6,72}{0,0688} = 97^k,7,$$

et par suite :

$$R_F = \frac{0,781 - 0,300}{1 - 0,781} \times 10 \times 97,7 = 21^k,45.$$

Les coefficients de sécurité pris par rapport à la limite d'élasticité seraient par suite réduits à :

pour le béton à $\frac{95}{97,7} = 0,975$;

pour l'acier à $\frac{26}{21,45} = 1,21$,

au lieu de 2, chiffre prévu.

Ce serait là une circonstance très grave, bien que ne conduisant pas à la rupture, car le coefficient de sécurité absolue c'est-à-dire par rapport à la rupture, est double pour le béton, matière qui présente le plus de danger. Mais il ne faut pas oublier :

1° Que la valeur de $n = 10$ serait complètement inadmissible dans ce cas limite, il serait plus logique de la supposer égale au contraire à 40. De sorte que si l'on reprend l'équation ci-dessus dans cette dernière hypothèse, la valeur de x s'abaisse à 0,635 et m devient $0,1059 R_c$.

D'où

$$R_c = \frac{6,72}{0,1059} = 63^{kg},50$$

$$R_F = 23^{kg},31$$

et les coefficients de sécurité ci-dessus s'éléveraient encore à

$$\frac{95}{63,50} = 1,50 \text{ pour le béton}$$

$$\frac{26}{23,31} = 1,12 \text{ pour l'acier ;}$$

2° La valeur de $R_t = 0$ est inadmissible dans toute l'étendue de la dalle. Si l'on peut admettre que quelques fibres se brisent, les barres de répartition que l'on a soin de prévoir et dont on comprend ici toute l'utilité, auront pour effet de répartir uniformément les efforts sur les fibres restées intactes. Les fatigues réelles ne seront donc qu'une fraction de celles qui ont été calculées ci-dessus ;

3° Enfin à côté des assurances résultant des discussions théoriques, il y a lieu de joindre celles données par les nombreuses expériences faites sur les dalles ; or ces expériences accusent des coefficients de sécurité beaucoup plus grands que ceux qui résultent des théories précédentes.

126. Dalles de forte épaisseur. — Les dalles épaisses ne diffèrent au point de vue du calcul des dalles minces que par la valeur plus faible de u et la convenance éventuelle de les armer également à la compression.

L'examen de la variation de u a été fait amplement ; il est en outre superflu de revenir sur l'examen des variations des facteurs R_c, R_t et n dans l'hypothèse de $p' = 0$, objet des pages précédentes, lequel a montré que les conditions les plus défavorables que l'on puisse prévoir répondent aux valeurs simultanées $R_t = 0$ et $n = 10$. On se bornera donc à rechercher les conséquences d'une telle hypothèse pour les valeurs de β supérieures à zéro.

β	p	p'	x	m'	m	R'_c	R'_F
0,3	0,005	0,0015	0,765	$0,086 \times 47^k,50 = 4,10$	7,50	$87^k,20$	20,97
0,6	0,010	0,006	0,702	$0,116 \times 47,50 = 5,51$	9,17	79,00	13,30
1,0	0,020	0,020	0,652	$0,170 \times 47,50 = 8,09$	13,54	79,7	10,30
2,0	0,040	0,080	0,651	$0,325 \times 47,50 = 15,42$	28,72	88,50	11,44

Appliquant les équations générales relatives au cas I, pour

$$R_c = 47^{kg}.50, \quad u = 0,200, \quad R_t = 0 \quad \text{et} \quad n = 10$$

on trouve des valeurs m' fort différentes de celles, m, qui ont été trouvées dans les mêmes conditions pour $R_t = 20$, $n = 20$ et $u = 0,200$; si donc, on a adopté les valeurs de m pour la déter-

mination des dimensions de la dalle, au lieu des valeurs de $R_e = 47^{kg},50$ et de R_F qui en résultent, on atteint des valeurs R'_e et R'_f beaucoup plus grandes dont quelques-unes sont indiquées dans le tableau précédent.

Les coefficients de sécurité C par rapport à la limite d'élasticité qui résultent de $R_t = 0$ et $n = 10$, sont réduits comme suit :

β	p	p'	C_B par rapport au béton	C_F par rapport au métal
0,3	0,005	0,0015	$\frac{95}{87,20} = 1,09$	$\frac{26}{20,47} = 1,24$
0,6	0,010	0,0060	$\frac{95}{79} = 1,20$	$\frac{26}{13,3} = 1,25$
1,0	0,020	0,0200	$\frac{95}{79,7} = 1,19$	$\frac{26}{10,36} = 2,51$
2,0	0,040	0,080	$\frac{95}{88,5} = 1,07$	$\frac{26}{11,44} = 2,27$

Ce tableau montre que l'armature à la compression des dalles apporte une sécurité de plus, les coefficients de sécurité étant supérieurs à ceux trouvés dans les mêmes conditions pour les dalles armées seulement à la tension. On a trouvé en effet plus haut pour

$$\beta = 0, \quad p = 0,005, \quad C_B = 0,97, \quad C_F = 1,20$$

et pour

$$\beta = 0,3, \quad p = 0,005, \quad C_B = 1,09, \quad C_F = 1,24.$$

Ce tableau montre également que l'armature à la compression répondant à β voisin de l'unité est la plus favorable, par rapport au béton, le coefficient de sécurité C_B n'étant réduit qu'à 1,20.

Bien entendu que tous les arguments développés plus haut, démontrant l'illégitimité de l'hypothèse $n = 10$ et $R_t = 0$, sont applicables ici au même titre.

127. Poutres à simple té. — On a trouvé au chapitre précédent que l'on pouvait admettre avec une approximation suffisante pour la pratique

$$m = 6,66 + 10p.$$

Par une interpolation ou un graphique construit d'après les valeurs de x, m et R_v relatives à $R_c = 47,50 - 31,67$ et 20 kilogrammes, on trouve que pour $m = 26,65$

$$x = 0,716$$
$$R_c = 29,31$$
$$R_v = \frac{0,716 - 0,125}{1 - 0,716} \times 20 \times 29,31 = 12^k,22 \text{ par millim. carré.}$$

Il est certain que l'ingénieur ne peut dicter des lois à la matière ; celle-ci s'arrange de manière à résister aux charges avec le minimum de fatigue ; elle prendra donc dans toute l'étendue des hourdis formant les ailes de la poutre à té la fraction *disponible* qui lui convient. Il est plutôt du rôle de l'ingénieur de prévoir le maximum de fatigue capable d'échoir à la matière. C'est ce qui a été fait en déterminant la valeur de λ nécessaire et suffisante pour ne pas dépasser les coefficients de travail admis. Dès lors, la matière s'allongera pour s'éloigner le plus possible de cette limite, et il y a là une nouvelle marge de sécurité qui n'est nullement négligeable. La matière ne reste jamais inerte ; elle est sans cesse en mouvement pour faire face aux variations continuelles de charge, de température et d'humidité.

Il en sera à plus juste raison de même, si un des éléments de résistance, la résistance du béton à la traction vient à faire défaut dans certaines parties. Si l'on admet la possibilité de $n = 10$ et $R_t = 0$, au moins pour un certain nombre de fibres, la poutre à té à laquelle on applique une charge correspondant à $m = 26,65$ dans l'hypothèse de $n = 20$ et $R_t = 20$, va faire un plus large emprunt à la résistance du hourdis. Il suffit donc de rechercher si le hourdis sera généralement assez étendu pour fournir cet appoint nécessaire.

Dans l'hypothèse de $p = 0,02$; $e = 0,25$; $u = 0,125$; $n = 10$; $R_t = 0$, les équations générales deviennent :

$$x^2 - 2\,(1 + \lambda \times 0.25 + 10 \times 0,02)\,x + 1 + 2 \times 10 \times 0,02 \times 0,125 + 2 \times 0,25\,\lambda - \overline{0,25}^2\,\lambda = 0$$

ou :

$$x^2 - 2\,(1,20 + 0,25\,\lambda)\,x + 1,05 + 0,4375\,\lambda = 0$$

et

$$m = R_c \left[\frac{(1-x)^2}{3} + \frac{0{,}25\,\lambda}{3} \left(\frac{\overline{0{,}25}^2}{1-x} + 3\,(1 - x - 0{,}25) \right) \right.$$
$$\left. + 10 \times 0{,}02\,\frac{(x - 0{,}125)^2}{1-x} \right].$$

On remarquera que le facteur $3\,(1 - x - 0{,}25)$ peut devenir négatif. C'est là une perte sèche puisque toute l'épaisseur du hourdis n'est plus utilisée pour la résistance à la compression. De là une première conclusion, c'est que les constructeurs qui prévoient toujours des barres de compression quelque faibles qu'elles soient, sont très bien inspirés.

Si l'on donne successivement à λ diverses valeurs, les équations précédentes fournissent les valeurs correspondantes de x, $\frac{m}{R_c}$, R_c et R_F, indiquées au tableau suivant.

	$\lambda = 0$	$\lambda = 4$	$\lambda = 8$	$\lambda = 12$	$\lambda = 16$	$\lambda = 20$
$x =$	0,576	0,772	0,815	0,833	0,842	0,848
$\frac{m}{R_c} =$	0,156	0,454	0,621	0,735	0,818	0,891
$R_c =$	170,5	58,6	42,8	36,2	32,5	29,9
$R_F =$	18,14	16,63	15,16	15,34	14,75	14,22

Un diagramme ou une interpolation permettront de déterminer que R_c atteint la limite admise de 47,50 pour $\lambda = 6{,}50$. A ce moment $R_F = 16{,}30$.

L'emploi exclusif de l'acier doux fait par certains constructeurs est donc absolument justifié. Mais il n'en est pas moins vrai que le coefficient de sécurité par rapport à la limite d'élasticité de l'acier, qui devient ici $\frac{36}{16{,}30} = 1{,}60$, pour $\lambda = 6{,}5$, n'est atteint que dans l'hypothèse limite sus-mentionnée $R_t = 0$ et $n = 10$.

CHAPITRE III

—

RÉSULTATS D'ESSAIS DE RUPTURES

128. Expériences faites au laboratoire des Ponts et Chaussées, par M. Debray, sur des plaques Cottancin (avril et mai 1890). — Le tableau suivant comprend 12 plaques de 1,10 de longueur et de largeurs variant de 0,40 à 0,45, armées d'après le système Cottancin par un tissu à grand nombre de brins dans les deux sens, de $4^{mm},4$ de diamètre. Les plaques ont été posées sur deux appuis distants de 1 mètre.

Nous avons calculé les chiffres inscrits aux colonnes 11 et 12. La colonne 11 donne le rapport du moment $\frac{Pl}{8}$ ou $\frac{pl^2}{8}$ (puisque la dalle a 1 mètre de portée), par le produit du carré de l'épaisseur et de la largeur de la dalle. Ce rapport étant supposé de 6 pour les charges normales, et un pourcentage de 1/2 °/₀ ou $0^k,39$ par centimètre d'épaisseur, on peut en déduire le coefficient de sécurité absolue, en divisant par 6 les chiffres inscrits dans la colonne II. Les chiffres de la colonne 12 complètent cette comparaison par l'appréciation du poids d'armature employé relativement à l'épaisseur de la dalle. On remarquera cependant que l'on ne fait entrer généralement en ligne de compte que les armatures longitudinales et que le poids d'armature considéré ici comprend également celui des armatures transversales.

On observera combien sont variables les résultats obtenus, puisque le coefficient de sécurité varie de 1,5 à 6 environ; les plus mauvais sont donnés par les dalles 5, 7 et 11 (le n° 1 ayant été mal disposé), qui contiennent très peu de fer.

N°	Largeur l	Epaisseur e	Nombre de liens		Poids de fer ϖ	Age	Limite d'élasticité		Charge de rupture P	Rapport $\frac{P \times l^2}{8 e^2 l}$	Rapport $\frac{\varpi}{e}$	Observations
			Grand côté	Petit côté			Charge	Flèche				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	mètres	centimètres			kilog.	jours	kilog.	mm.	kilog.		kilog.	
1	0,42	4,0	10	86	9,35	30	220	0,7	540	10,05	2,34	Plaque essayée sens dessus dessous.
2	0,40	3,8	10	86	9,35	30	1 300	9,8	1 780	33,6	2,46	
3	0,40	4,3	10	26	3,50	30	1 220	7,1	1 620	27,4	0,815	
4	0,40	4,0	10	26	3,50	45	820	5,2	1 420	27,6	0,875	Plaque soumise 6 fois à des températures de 90 à 130°, puis refroidie brusquement dans l'eau, sans fissure.
5	0,40	4,0	10	10	2,00	30	220	1,3	450	9,35	0,500	
6	0,40	4,0	10	10	2,00	45	180	0,6	580	11,30	0,500	
7	0,445	4,0	13	11	2,25	30	180	1,9	520	9,15	0,56	
8	0,445	4,0	13	11	2,25	30	180	3,3	580	10,20	0,56	
9	0,445	2,4	12	28	4,15	30	300	19,0	560	27,30	1,73	
10	0,410	2,2	12	28	4,15	30	210	17,0	380	22,40	1,89	Plaque traitée comme le n° 4.
11	0,420	2,3	13	8	1,75	20	120	10,9	170	9,55	0,76	
12	0,440	2,4	13	8	1,75	30	120	14,3	220	10,85	0,73	

Épaisseur	Armatures			Poids propre	Charge agissant au milieu P produisant la première fissure	M Moment $\frac{P\times1,50}{4}+\frac{p\times1,50^2}{8}\times0,6$	$m=\frac{0,60e^2}{M}$	Résistance à la flexion $6m$	Résistance directe à la traction			Résistance directe à la compression			Résistance à la flexion du béton sans armature
	Nombre des barres	Diamètre	Pourcentage	p					Maximum	Moyenne	Minimum	Maximum	Moyenne	Minimum	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
cm.				kilog.	kilog.	kgm.		kg.							
7,5	9	10	0,935 %	165	2 900	1 115	33,03	198,6	33	27	16	376	218	297	
7,8	10	7	0,493 »	170	2 000	774	21,31	128,5	»	»	»	»	»	»	546
7,8	10	7	0,493 »	170	2 000	774	21,31	128,5	»	»	»	»	»	»	
7,5	9	10	0,935 »	165	2 900	1 115	33,03	198,6	»	»	»	»	»	»	

129. Essais Spitzer et Hanisch. — Essais de MM. Spitzer, ingénieur de Wayss et Cie et Hanisch, professeur, sur des dalles de 1m,50 de portée et de 0m,60 de largeur. Ces dalles ont été constituées avec le mélange suivant : 1 partie de ciment Portland, 3 et demie de gravier du Danube passé au crible de 35 millimètres de mailles. Les résultats sont consignés page 560.

Nous avons calculé les colonnes 4, 7 et 8. Dans la colonne (4) se trouvent les pourcentages, au rapport de la section d'armature à la section béton, la colonne 7 donne la somme des moments de la surcharge et du poids mort, la colonne 8 le quotient m de ces moments par le produit e^2 et de la largeur. La colonne 9 donnée par l'auteur du tableau, est le produit 6 m, à quelques décimales près. Le coefficient de sécurité défini plus haut, varie donc ici entre 3,5 pour une armature à 1/2 °/₀ et 5,5 pour une armature à 1 °/₀ environ.

(1) et (2). *Epaisseur* 7cm,5, *armées de* 9 *barres rondes de* 10 *millimètres.* $p = 0,94$. *Ces dalles ont été chargées en leur milieu : leur poids mort était de* 165 *kilogrammes. La charge qui a produit la première fissure a été de* 2900 *kilogrammes.*

Les auteurs donnent comme résistance à la flexion de ces 2 *dalles qui se sont comportées d'une façon identique :* 198kg,6.

De $M = \frac{e^2 l}{6} R_F$ on tire $R_F = \frac{6M}{le^2}$;

R_F, résistance du solide considéré comme homogène ;

M, est le moment des forces extérieures ;

l, la largeur de la dalle, ici : 0m,60 ;

e, l'épaisseur de la dalle en centimètres ; ici : 7,5.

Or comme on a convenu d'appeler m le moment unitaire $\frac{M}{le^2}$ on a : $R_F = 6m$ d'où $m = \frac{R_F}{6}$.

Ici donc : $m = \frac{198,6}{6} = 33,1$, soit avec les coefficients de sécurité choisis de 4, 5 et 6, m est égal respectivement à 8,3 ; 6,6 ; 5,5.

Si l'on se reporte au graphique (fig. 165), on relève pour $p = 0,94$; $m = 705 - 5,95 - 5,15$, suivant que la valeur de R_c a atteint 47,50 — 38 kilogrammes ou 31,67.

Les valeurs proposées pour m sont donc inférieures à celles qui résultent de l'expérience directe.

(3) et (4). — *Epaisseur* $7^{cm},8$, *armées de* 10 *barres de* 7, $p = 0,400$. *Ces dalles ont été chargées en leur milieu ; leur poids mort était de* 170 *kilogrammes. La charge qui a produit la première fissure a été de* 2000 *kilogrammes. Les auteurs donnent comme résistance à la flexion de ces deux dalles qui se sont comportées d'une façon identique :* $128^{kg},5$.

D'après l'observation ci-dessus :

$$m = \frac{128,50}{6} = 21,42$$

Le graphique sus-mentionné donne pour $p = 0,50$. $m = 5,65$; 5,41 ; 6,72 suivant que $R_e = 31,67$; 38 ou $47^{kg},50$. tandis que l'expérience a donné pour les coefficients de sécurité correspondants 6, 5 et 4, $m = 3,6$: 4,3 et 5,3 notablement inférieurs à ceux proposés. Mais si l'on admet que la première fissure correspond à la limite d'élasticité, il reste encore toute la marge entre cette limite et la rupture.

Les mêmes auteurs ont dressé le tableau suivant dans le but de faire ressortir les variations de moment de flexion suivant le dosage.

Moments de flexion par cmq.	Dosages 1 : 4			Dosages 1 : 5 2/3			Dosages 1 : 7		
	2 ciment, 3 sable, 5 ballast granit.	2 ciment, 3 sable, 5 ballast mâchefer.	2 ciment, 3 sable, 5 gravillon siliceux.	3 ciment, 7 sable, 10 ballast granit.	3 ciment, 7 sable, 10 ballast mâchefer.	3 ciment, 7 sable, 10 gravillon siliceux.	1 1/2 ciment, 3 3/4 sable, 5 ballast granit.	1 1/2 ciment, 3 3/4 sable, 5 ballast mâchefer.	1 1/2 ciment, 3 3/4 sable, 5 ballast siliceux.
Minimum.	26,80	23,8	23,3	10,7	19,4	17,4	16,9	17,0	14,8
Moyen. .	32,55	28,9	25,41	21,1	23,2	22,4	18,9	20,6	19,2
Maximum.	36,90	33,6	30,00	27,6	28,8	33,2	23,0	35,2	26,5

130. Essais Bauschinger. — M. le professeur Bauschinger a publié les essais suivants sur des dalles de 1 mètre de largeur auxquelles il a donné des portées différentes. Il a relevé les surcharges totales ayant produit la première fissure, et celles ayant produit la rupture. Le dosage de ces dalles était 1 de ciment pour 3 de sable passé au crible de 25 millimètres. Age : 93 jours.

Nous avons calculé les chiffres inscrits dans les colonnes 4, 7 et 9.

Colonne 4, marquée pourcentage en faisant le rapport de la section d'armature à la section du béton.

Colonnes 7 et 9, en divisant les moments correspondants $\frac{Pl}{8}$ ou $\frac{P'l}{8}$ par e^2.

Épaisseur e	Armatures			Poids propre	Surcharge totale ayant produit la première fissure P	$\frac{M}{e^2}$ ou m	Surcharge totale de rupture P'	$\frac{M'}{e^2}$ ou m	Portée l
	Nombre de barres	Diamètre	Pourcentage						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
cm.				kilog.	kilog.		kilog.		mètres
3,8	17	5,5	1,06 %	96	2 630	23,5	3 124	29,7	1,00
5,4	13	7,0	1,925 »	194	3 450	23,4	7 053	45,40	1,50
6,3	17	7,0	1,04 »	300	4 057	27,4	5 207	33,20	2,00
8,5	20	8,0	1,18 »	510	6 986	32,4	8 428	36,20	2,50
10,3	19	10,0	1,45 »	724	11 229	41,20	12 808	44,20	2,92

On voit que ce rapport varie entre 30 et 45, de sorte que si l'on considère le rapport 6 comme le rapport normal (pour le pourcentage normal 1/2 %), le coefficient de sécurité est compris entre 5 et 7,5. Il est vrai que le pourcentage est double de celui qu'on est convenu d'employer de nos jours ; mais, d'autre part, la résistance n'est pas proportionnelle à la section de l'armature ; elle augmente moins rapidement.

Le graphique (fig. 163) ne donne pas de différences bien sensibles pour les pourcentages compris entre 0,925 et 1 450. On se servira donc de la courbe I, mais il est inutile de surcharger la figure pour se rendre compte que les coefficients de sécurité à la limite d'élasticité sont considérablement plus forts que ceux qui sont annoncés pour l'emploi des formules proposées, puisque considérablement supérieurs à ceux de l'essai précédent.

A remarquer surtout la marge considérable qui reste encore entre la charge de rupture et celle qui a produit la première fissure (limite d'élasticité).

131. Dalles danoises. — Nous extrayons les résultats suivants du journal *Le Ciment* (janvier 1902).

Il s'agit des dalles danoises de 1m,90 de portée, 0,40 de largeur et 5 centimètres d'épaisseur. Le pourcentage de ces dalles

atteignait uniformément 1,35. Le sable avait été passé par mailles de 2,5 millimètres.

Dosage	Age en jours	Armature		Résistance à la flexion	m correspondant	Observations
		Nombre	Diamètre			
1 : 3	33	7	7	104,3	17,4	
1 : 3	364	7	7	177,6	29,6	
1 : 3	33	7	7	164,3	27,4	
1 : 3	34	7	7	180,2	30,0	
1 : 3	34	7	7	171,0	28,5	
1 : 2	38	7	7	203,0	33,8	
1 : 2	36	7	7	198,2	33,0	
1 : 1	36	7	7	188,3	31,4	
1 : 1	37	7	7	208,3	34,7	Seulement dans la part
1 : 1	37	7	7	188,0	31,4	moyenne; autrement 1 :

132. Dalles armées de métal déployé. — Extrait d'un rapp en date du 29 avril 1896 de MM. Fowler et Baker, ingénie chargés d'essais sur des dalles en béton armées de métal déplo par M. H. B. Tarry, directeur général de la Compagnie angla « The Expanded Metal Company ».

Les matériaux employés à la confection de ces dalles ont été suivants :

Ciment Portland. — Poids spécifique 85 lbs le pied cube (1 360 kilogramm-s. Résidu sur le tamis de 2 500 mailles (1,75 %.) Résistance à l'extension du ciment pur, 560 lbs par pc carré au bout de 7 jours (38kg,80). Résistance à l'extension du mortier 1 : 3, 278 lbs par pc carré au bout de 28 jours (19kg,20).

Sable . . . . . — Sable lavé de Leighton Buzzard. Poids spécifique 96,5 lb pied cube (1 540 kilogrammes). Grosseur minima 2m ne passant pas par le crible à 10 mailles par pouce.

Gravier . . . . — Gravier de la Tamise, poids spécifique 95 lbs par cube (1 510 kilogrammes).

Métal déployé . . — Acier très doux; résistance 22 tonnes par pouce ca 34kg,20 par millimètre carré. Allongement d'une ép vette de 8 pouces (0m,200) 21 %.

Type (1). $3'' \times \frac{3''}{12} \times \frac{7''}{12}$ répondant en France à $75 \times 3 \times 6$, pesant 3kg,55 par mètre carré (n° 8).

Type (2). $3'' \times \frac{5''}{32} \times \frac{7}{32''}$ répondant à $75 \times 4,5 \times 6$, pesant 5kg,25 par mètre carré (n° 10).

Dosage en volume. 1 : 1 : 2 et $\frac{1}{2}$ d'eau.

Epaisseur des dalles. 3" = 76mm,2.

	carré	p. m.q.	kgm.	h^2		1re charge	2e charge	3e charge	flèche	
(1) et (2) Dalles non armées. .	2,57	1405	200	3,44	63	sans flèche sensible				1) brisé immédiatement au centre. 2) a porté le 3e rail.
(3) Dalles armées de n° 8 (pourcentage 0,60 %). .	12	6550	950	16,40	63	1"/16 1,6	11"/64 4,3	1"/4 6,35	9"/32 7,15	brisé sur un appui.
(4)	19,73	10750	1530	26,40	77	3"/32 2,1	7"/32 5,6	3"/8 9,5	17"/32 13,5	a porté le 23e rail une demie-minute.
(5) Dalles armées de n° 10 (pourcentage 0,88 %) . .	17,14	9375	1340	28,00	63	0 »	3"/32 2,4	3"/16 4,8	9"/32 7,0	brisé sur les appuis.
(6)	21,43	11700	1670	28,80	77	1"/16 1,59	5"/32 4,0	1"/4 6,35	13"/32 10,3	a porté le 25e rail une demie-minute.
Portée libre 6'6" = 1,982										
(7) et (8) Dalles non armées . .	0,46	252	124	2,10	63	sans flèche sensible				(7) brisé immédiatement. — (8) a porté la charge une 1/2 minute.
(9) Dalles armées de métal déployé n° 8 (pourcentage 0,60 %)	4,61	2520	1240	21,00	63	0 »	7"/16 11,10	13"/16 20,6	1 1/8 28,6	brisé au milieu.
(10)	4,61	2520	1240	21,00	77	1"/16 1,6	7"/16 11,1	13"/16 20,6	13"/16 30,2	a porté une seconde le 30e rail.
(11) Dalles armées de métal déployé n° 10 (pourcentage 0,88 %)	5,08	2790	1375	23,7	63	1"/16 1,59	7"/16 11,1	11"/16 17,5	1 1/8 28,6	brisé sur un appui.
(12)	5,07	2780	1370	23,6	77	1"/4 6,35	9"/16 14,4	1" 25,4	1 3/16 30,2	a porté le 11e rail une minute.

Nota. — Les dalles (5) et (11) sont celles pour lesquelles il est formellement désigné que le métal déployé n'a pas été rompu.

Portée libre	Largeur de la voûte	Montée de la voûte	Dosage : Ciment Portland Sable tout venant Gravier de la Tamise	Age en jours	Charges uniformément réparties		Flèches au centre				Observations
					totales	par unité de surface	1/4 de charge	1/2 de charge	3/4 de charge	dernière flèche	
6'6" 1,982	3' 0,915	5" 0,127	1 : 1 : 2 ; eau $\frac{1}{2}$	62	84 cwt 4 280kg	4,31 cwt 2 340kg	» »	$\frac{3}{4}$ 19	$1\frac{1}{4}$ 31,7	$2\frac{3}{8}$ 60,3	Fissure à mi-charge qui s'accrut en dessous jusqu'à 8 millimètres au moment de la rupture.
6'6" 1,982	3' 0,915	5" 0,127	3 : 1 ; eau $1\frac{1}{6}$	63	60 cwt 3 040kg	3,13 cwt 1 680kg	$\frac{3}{4}$ 19	$1\frac{1}{8}$ 28,6	$1\frac{15}{16}$ 49,2	$2\frac{1}{4}$ 57,1	Fissure au 1/4 de charge.
3'6" 1,0675	2' 0,610	3" 0,076	1 : 1 : 2 ; eau $\frac{1}{2}$	63	144 cwt 7 300kg	20,57 cwt 11 200kg	$\frac{1}{16}$ 1,6	$\frac{1}{8}$ 3,2	$\frac{1}{4}$ 6,35	$\frac{7}{8}$ 22,2	La charge atteignit 6084 kilogrammes, a été enlevée, remise et maintenue jusqu'au lendemain.
3'6" 1,0675	2' 0,610	3" 0,076	1 : 1 : 2 ; eau $\frac{1}{2}$	64	168 cwt 8 530kg	24 cwt 13 100kg	$\frac{1}{16}$ 1,6	$\frac{5}{16}$ 8	$\frac{9}{16}$ 14,3	$\frac{13}{16}$ 30,2	Rupture graduelle.
3'6" 1,0675	2' 0,610	3" 0,076	3 : 1 ; eau $1\frac{1}{6}$	64	144 cwt 7 300kg	20,57 cwt 11 200kg	$\frac{3}{32}$ 2,4	$\frac{1}{4}$ 6,35	$\frac{1}{2}$ 12,7	$1\frac{5}{8}$ 41,3	

NOTA — Bien que les dalles plates contiennent 33 % moins de béton que les voûtes de même épaisseur, à la clef, on remarquera que si l'on prend comme terme de comparaison d'une part les charges de rupture par unité de surface et de l'autre le poids du volume de béton correspondant des dalles voûtées de 0,076 d'épaisseur, on obtient le tableau suivant.

Les dalles ont été conservées à l'abri de la gelée et autres influences atmosphériques jusqu'au jour de l'essai et rompues à l'aide de charges progressives de rails pesant le cwt (304k,8) (voir tableau p. 565).

MM. Fowler et Baker ont également fait des essais sur des voûtes de 3" d'épaisseur à la clef (76,2 millimètres) dans le but de comparer leur résistance à celle des dalles plates armées (voir tableau p. 566).

	Spécification	Portée de 3'6" = 1,0675		Portée de 6'6" = 1 982		Poids du béton
		kg.		kg.		
(1)	Dalles voûtées de 3" à la clef sans métal. Dosage 1 : 3	11 833 par mq.	1	2 010 par mq.	1	1
(2)	Dalles plates de 3" avec métal n° 8. Dosage 1 : 3	8 850 par mq.	0,73	2 520 par mq.	1,24	0,66
(3)	Dalles plates de 3" avec métal n° 10. Dosage 1 : 3	10 537 par mq.	0,88	2 780 par mq.	1,37	0,66
(4)	Dalles plates non armées de 3" Dosage 3 : 1	2 570 par mq.	0,21	760 par mq.	0,38	0,66

133. Rapport du *Building Trades Exchange* et de la *Northern Architectural Association* (15 novembre 1899).

Une commission instituée par le comité de l'Association des Architectes et celui du Building Trades Exchange de Newcastle upon Tyne a fait exécuter les essais comparatifs suivants entre des dalles armées de métal déployé et des dalles non armées, augmentées d'une épaisseur de béton équivalente en prix à celui du métal déployé, enrobé dans les premières. Les dosages du béton étaient de 1 : 5 et 1 : 3. Le ciment répondait comme finesse au tamis de 2500 mailles par pouce carré.

Les dalles reposaient sur leurs petits côtés de 6" (0m,152), c' est donc 2 × 6" ou 0,305 qu'il y a lieu de retrancher de la longueur, pour avoir la portée libre.

I

1. *Dalle de béton non armé.* — 8′ × 4′ — net 7′ × 4′. Epaisseur 8″ = 0^{m},203.

Charge uniformément répartie ayant produit la rupture 9 cwts = 457^{k},8, soit $\frac{457,8}{2,135 \times 1,219}$ = 176 kilogrammes par mètre carré.

Cette dalle s'est rompue avant le commencement de l'essai sous le poids de 6 gueuses de fonte et de 2 hommes.

$$m = \frac{M}{e^2} = \frac{457^{k},8 \times 2,135}{8 \times 1,219} : 20,3^2 = 0,237 \text{ (Dosage 1 : 5).}$$

2. *Dalle armée de métal déployé n° 10.* — 8′ × 4′ — net 7′ × 4′. Epaisseur 5″ = 0,127.

Charge uniformément répartie ayant produit la rupture 237/3/14/ = 12 004 kilogrammes, soit 4 600 kilogrammes par mètre carré.

Les flèches observées ont été les suivantes :

A 75 cwts	=	3 810 kg.	ou	1 460 kg.	par mq.	$\frac{1''}{8}$ = 3,2 mm.
175 »	=	8 890	»	3 420	»	$\frac{1''}{2}$ = 12,7 mm.
220 »	=	11 176	»	4 300	»	première fissure.

$$m = \frac{12\,004 \times 2,135}{8 \times 1,219} : 12,7^2 = 16,20 \begin{cases} \text{dosage } 1 : 5 \\ \text{pourcentage } 0,52\ \% \end{cases}$$

II

3. *Dalle non armée.* — 6′6″ × 4′. Epaisseur 8″ = 0^{m},203.

Charge uniformément répartie de rupture. 22 cwts/2/18 = 1151 k. soit 565 kilogrammes par mètre carré.

$$m = \frac{1\,151 \times 1.676}{8 \times 1,219} : \overline{20,3}^2 = 0,48, \text{ dosage } 1 : 5.$$

4. *Dalle armée de métal déployé n° 10.* — Epaisseur 5″ = 0,127 8′6″ × 4′ — net 5′6″ × 4′. Cette dalle n'a pu être rompue, la charge formant une pile menaçante. Flèches :

A 340 cwts/1/21 = 17 274 kilogrammes ou 8500 kilogrammes par mètre carré. $\frac{5'}{16} = 7,9$.

La charge enlevée, la flèche a disparu.

$$m = \frac{17\,274 \times 1,676}{8 \times 1,219} : \overline{12,7}^2 = 18,40 \begin{cases} \text{dosage } 1 : 5 \\ \text{pourcentage } 0,52\ \%. \end{cases}$$

III

5. *Dalle de béton non armé* de $8'' = 0^m,203$ — $5' \times 4'$ — net $4' \times 4'$.

Charge uniformément répartie ayant produit la rupture 124/2/20 = 6 334 kilogrammes, soit 4 250 kilogrammes par mètre carré.

$$m = \frac{6\,334 \times 1,219}{8 \times 1,219} : \overline{20,3}^2 = 1,92. \text{ Dosage } 1 : 5.$$

Ce béton a été mieux protégé que les autres, lors de son durcissement.

6. *Dalle de béton armée de métal déployé n° 8.* — Epaisseur $5'' = 0^m,207$ — $5' \times 4'$ — net $4' \times 4'$.

Une charge uniformément répartie de 270/2/2 n'a pu produire la rupture. Comme plus haut, on n'a pas osé élever la pile davantage ; sa hauteur atteignait déjà $3^m,35$. Ce poids correspond à 13 742 kilogrammes, soit à 9 250 kilogrammes par mètre carré. La flèche n'a commencé à devenir sensible que pour la charge de 261 cwts/2/12 = 13 289 kilogrammes ou 8 950 kilogrammes par mètre carré.

Le plus fort moment obtenu sans aucun dommage.

$$m = \frac{13\,742 \times 1,219}{8 \times 1,219} : \overline{12,7}^2 = 10,70 \begin{cases} \text{dosage } 1 : 5 \\ \text{pourcentage } 0,32\ \%. \end{cases}$$

IV

7. *Dalle en béton non armé.* — $8' \times 4'$ — net $7' \times 4'$ — Epaisseur $4''$ 1/12 — $0^m,114$. S'est rompue sous le poids des hommes montés dessus pour la charger (dosage 1 : 3).

8. *Dalle en béton armé de métal déployé n° 8.* Epaisseur $3'' = 0^m,076$ — $8' \times 4'$ — net $7' \times 4'$.

Charge uniformément répartie ayant produit la rupture : 96/1/17 = 4 897 kilogrammes, soit 1 880 kilogrammes par m.c.

$$m = \frac{4\,897 \times 2{,}134}{8 \times 1{,}219} : \overline{7{,}62}^2 = 16{,}85 \begin{cases} \text{dosage } 1 : 3 \\ \text{pourcentage } 0{,}60\ \%. \end{cases}$$

V

9. *Dalle en béton non armé.* Epaisseur 4" 1/2 = 0m,114 — 6'6" × 4' — net 5'6" × 4'.

Cette dalle s'est rompue sous une charge uniformément répartie de 17/0/25 = 875 kilogrammes, soit 428 kilogrammes par m.c.

$$m = \frac{875 \times 1.676}{8 \times 1{,}129} : \overline{11{,}4}^2 = 1{,}16 \quad \text{Dosage } 1 : 3.$$

10, *Dalle en béton armé de métal déployé n° 10.* Epaisseur 3" = 0m076 6'6" × 4' — net 5'6" × 4'.

Cette dalle s'est rompue sous une charge uniformément répartie de 113/0/22 = 5 750 kilogrammes, soit 2 820 kilogrammes par mètre carré.

$$m = \frac{5\,750 \times 1{,}676}{8 \times 1{,}219} : \overline{7.62}^2 = 17{,}10 \begin{cases} \text{dosage } 1 : 3 \\ \text{pourcentage } 0{,}87\ \%. \end{cases}$$

VI

11. *Dalle en béton non armé.* Epaisseur 4" 1/2 = 0,114 — 5' × 4' — net 4' × 4'.

Charge uniformément répartie ayant produit la rupture 10/3/10 = 551 kilogrammes, soit 370 kilogrammes par mètre carré.

$$m = \frac{551 \times 1{,}219}{8 \times 1{,}219} : \overline{11{,}4}^2 = 0{,}53 \text{ dosage } 1 : 3.$$

12. *Dalle en béton armé de métal déployé n° 8.* Epaisseur 3" = 0m,076. 5' × 4' — net 4' × 4'.

Charge uniformément répartie ayant produit la rupture : 213/3/8 = 10 862 kilogrammes, soit 7 275 kilogrammes par m.c.

$$m = \frac{10\,862 \times 1{,}219}{8 \times 1{,}219} : \overline{7{,}62}^2 = 23{,}50 \begin{cases} \text{dosage } 1 : 3 \\ \text{pourcentage } 0{,}60\ \%. \end{cases}$$

La figure 180 représente le mode dont s'est fissuré cette dalle. Les flèches ont été généralement faibles avant la rupture. La rupture du métal déployé était nette et dépourvue de toute apparence cristalline, les losanges s'étaient considérablement allongés dans le sens de la longue diagonale.

Fig. 180

Les résultats de ces expériences sont résumées dans le tableau suivant :

Numéros d'ordre	Nature des dalles	Portées	Surfaces	Epaisseur	Dosage	Pourcentage	$\frac{m}{e^2}$ à la rupture
		mètres	mq.	cm.			
1	Béton non armé	2,438	2,601	20,3	1 : 5	0	0,237
3	»	1,981	2,044	20,3	1 : 5	0	0,480
5	»	2,438	2,601	11,4	1 : 3	0	1,920
7	»	1,524	1,486	20,3	1 : 5	0	—
9	»	1,524	1,486	11,4	1 : 3	0	1,160
11	»	1,981	2,044	11,4	1 : 3	0	0,530
	Béton armé						
2	de m. d. n° 10	2,438	2,601	12,7	1 : 5	0,52 %	16,20
4	»	1,981	2,044	12,7	1 : 5	0,52 »	> 18,40
10	»	1,524	1,486	12,7	1 : 5	0,87 »	> 17,10
	Béton armé						
6	de m. d. n° 8	2,430	2,601	7,6	1 : 3	0,32 %	10,70
8	»	1,524	1,486	7,6	1 : 3	0,60 »	16,85
12	»	1,981	2,044	7,6	1 : 3	0,60 »	23,50

On remarquera que les dalles en béton, si l'on excepte les n°s 1 et 7 qui se sont rompues accidentellement, ont donné de 0,48 à 1,92 e^2, ce qui répond à une résistance à la flexion de 3^k,88 à 11^k,52 — et que les dalles armées en moyenne à raison d'un demi pour cent ont atteint 141 kilogrammes. — Ces chiffres résultent de la multiplication par 6 du coefficient m.

Dosage			Jours d'âge	Pourcentage de l'armature	Armatures		Largeur en centimètres	Poids mort	Flèches pour des charges de					
Ciment	Sable	Gravier			Diamètre	Nombre			100	200	300	400	500	600
1	2	—	28	1/80	9	3	15,2	71,0	0,8	1,6	3,0	4,3	5,8	7,5
			28	1/70	10	3	16,45	81,0	0,7	1,1	2,0	2,9	3,9	5,1
			28	1/60	11	3	17,1	83,5	0,6	1,3	2,0	2,7	3,8	4,9
			28	1/50	11	4	19,0	95,5	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
			28	1/40	9	6	15,2	75,0	0,3	0,9	1,5	2,4	3,2	4,1
1	2	—	89	1/80	9	3	15,2	72,0	0,6	1,4	2,6	3,9	5,2	6,5
			89	1/70	10	3	16,45	81,0	0,6	1,8	3,0	4,0	4,9	5,9
			89	1/60	11	3	17,1	83,5	0,5	1,2	2,0	3,0	3,9	4,9
			89	1/50	11	4	19,0	93,5	0,6	1,0	1,3	2,0	2,9	3,5
			89	1/40	9	6	15,2	73,5	0,6	1,0	1,9	2,9	3,5	4,2
1	2	2	31	1/80	9	3	15,2	77,5	0,6	1,0	2,0	3,0	4,0	5,2
			31	1/70	10	3	16,45	87,0	0,8	1,8	2,5	3,5	4,5	5,6
			31	1/60	11	3	17,1	95,0	0,5	1,0	1,8	2,2	3,0	3,8
			32	1/50	11	4	19,0	102,0	0,6	1,2	1,8	2,4	3,0	3,7
			32	1/40	9	6	15,2	81,0	0,5	1,1	1,6	2,2	3,1	4,0
1	2	2	92	1/80	9	3	15,2	80,5	0,7	1,2	1,9	2,7	3,8	4,9
			92	1/70	10	3	16,45	85,0	0,5	1,1	1,8	2,7	3,5	4,2
			92	1/60	11	3	17,1	90,0	0,5	1,1	1,7	2,6	3,9	4,4
			105	1/50	11	4	19,0	98,0	0,3	1,1	1,8	2,5	3,2	4,0
			105	1/40	9	6	15,2	80,0	0,2	0,9	1,4	2,2	2,8	3,3
1	3	—	31	1/80	9	3	15,2	71,0	0,6	1,5	3,0	4,5	6,0	8,[illegible]
			31	1/70	10	3	16,45	77,0	0,5	1,2	2,3	3,7	5,0	6,[illegible]
			31	1/60	11	3	17,1	79,0	0,6	1,8	2,8	4,0	5,5	7,[illegible]
			31	1/50	11	4	19,0	88,0	0,6	1,4	2,2	3,2	4,4	5,[illegible]
			31	1/40	9	6	15,2	71,0	0,6	1,5	2,3	3,5	4,8	6,[illegible]
1	3	—	93	1/80	9	3	15,2	69,0	0,8	1,8	3,1	4,2	5,8	[illegible]
			93	1/70	10	3	16,45	74,0	1,0	2,5	3,7	5,0	6,1	[illegible]
			93	1/60	11	3	17,1	76,5	1,0	2,0	3,2	4,4	5,7	[illegible]
			93	1/50	11	4	19,0	87,5	1,0	2,0	3,0	3,9	4,9	6,[illegible]
			93	1/40	9	6	15,2	69,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,1	6,[illegible]
1	3	3	33	1/80	9	3	15,2	76,5	1,5	3,0	5,0	7,0	8,6	10,[illegible]
			33	1/70	10	3	16,45	83,0	0,8	2,2	3,9	5,2	7,0	8,[illegible]
			34	1/60	11	3	17,1	86,0	1,1	2,1	3,0	4,0	5,3	6,[illegible]
			34	1/50	11	4	19,0	96,5	0,8	1,5	2,2	3,0	3,9	5,[illegible]
			34	1/40	9	6	15,2	77,0	0,9	1,9	3,1	4,0	5,0	[illegible]
1	3	3	92	1/80	9	3	15,2	76,0	0,7	1,5	2,3	3,9	5,0	6,[illegible]
			92	1/70	10	3	16,45	83,5	0,6	1,6	2,7	4,0	6,0	7,[illegible]
			92	1/60	11	3	17,1	87,0	0,6	1,3	2,0	3,0	4,0	5,[illegible]
			92	1/50	11	4	19,0	95,0	0,5	0,9	1,3	2,0	2,8	3,[illegible]
			92	1/40	9	6	15,2	78,5	1,0	1,7	2,3	3,0	4,0	4,[illegible]

Flèches pour des charges de										$m = \frac{M}{e^2}$ à la rupture	(1) Taux de travail	
900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800		Fer kg par mmq.	Béton kg par cmq.
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	30,38	32,45	178
8,8	10,0	—	—	—	—	—	—	—	—	33,02	30,74	184
8,8	10,0	12,0	—	—	—	—	—	—	—	34,73	27,90	186
6,0	7,0	8,0	9,2	10,4	12,0	13,2	—	—	—	41,90	28,50	214
7,8	8,9	10,3	13,0	16,0	—	—	—	—	—	45,51	25,63	293
11,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	34,00	36,32	200
9,0	10,2	11,4	20,0	—	—	—	—	—	—	38,42	35,84	215
7,9	8,9	10,0	11,0	13,0	—	—	—	—	—	42,09	33,85	225
5,9	7,0	8,0	8,5	9,1	10,0	11,0	12,0	15,0	18,5	49,77	33,87	254
7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,5	14,0	15,5	—	—	57,02	32,12	280
9,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	32,45	34,67	190
10,0	11,0	—	—	—	—	—	—	—	—	34,63	32,24	196
6,5	7,5	8,5	9,9	—	—	—	—	—	—	39,21	31,57	210
6,0	6,8	7,6	8,5	9,4	10,4	11,6	12,8	—	—	44,62	30,07	226
6,2	7,0	8,0	9,5	10,3	11,3	13,0	14,3	—	—	55,48	31,25	276
8,0	9,1	—	—	—	—	—	—	—	—	35,73	38,17	209
7,1	8,5	9,5	—	—	—	—	—	—	—	37,66	35,06	211
6,4	7,3	8,2	9,1	10,2	15,0	—	—	—	—	43,65	35,14	234
6,0	6,7	7,3	7,9	8,5	9,2	10,0	11,0	12,0	—	48,03	32,67	245
5,0	5,7	6,5	7,2	8,0	8,9	9,9	11,0	12,0	13,0	62,70	35,62	310
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	25,73	27,49	150
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	25,98	24,19	145
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	24,45	19,68	131
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	28,42	15,93	120
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	26,38	14,86	130
12,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	33,92	36,24	198
12,0	13,5	15,2	—	—	—	—	—	—	—	35,98	33,50	202
11,0	12,5	15,0	16,5	—	—	—	—	—	—	37,58	30,25	202
9,0	10,1	11,3	13,0	—	—	—	—	—	—	35,24	23,97	180
9,2	11,0	—	—	—	—	—	—	—	—	35,24	19,85	170
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	29,11	31,06	165
—	—	—	—		—	—	—	—	—	28,20	26,26	160
11,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	30,39	24,47	163
8,0	9,0	10,1	12,5	—	—	—	—	—	—	35,10	23,87	175
9,5	11,5	—	—	—	—	—	—	—	—	37,53	21,03	185
11,2	13,0	—	—	—	—	—	—	—	—	36,83	39,35	215
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	28,62	37,17	209
8,1	9,5	11,0	—	—	—	—	—	—	—	36,23	29,17	200
6,2	7,0	8,0	9,3	10,8	—	—	—	—	—	37,99	25,84	200
7,2	8,1	9,3	—	—	—	—	—	—	—	38,32	21,59	190

(1) Les taux de travail ont été calculés par M. Fritz von Emperger.

134. Dalles Sanders. — Dalles essayées par M. *L.-A. Sanders*, ingénieur de *l'Amsterdamsche fabrick van Cement Ijzerwerken*.

Fig. 181

Ces dalles ont été posées librement sur deux appuis de niveau et chargées en leur milieu comme l'indique la figure 181. La partie libre était réduite exactement à 2 mètres. Voir le tableau pages 572 et 573.

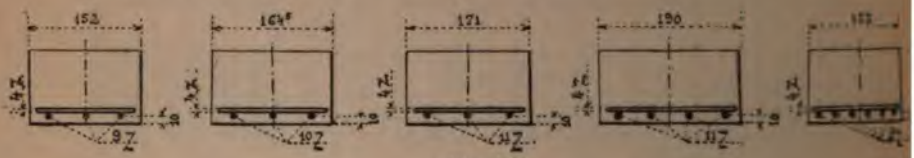


Fig. 182

La figure 182 indique l'équarrissage et le mode d'armature.

M. Fritz von Emperger (1) dans l'ouvrage duquel nous avons complété ce tableau donne 36 à 40 kilogrammes comme résistance au fer des armatures et comme résistances moyennes des bétons employés les chiffres suivants :

	1 : 2		1 : 2 : 7		1 : 3		1 : 3 : 3	
Après 1 mois. .	36,9	200	27,7	190	15,6	75,3	7,4	70
Après 3 mois. .	40,6	247	32,2	257,7	18,8	78,5	15,3	120,5

Tous les échantillons ont été établis dans les mêmes conditions; faits à la main et durcis à l'air.

135. Expériences de Genève (24-25 et 26 Juillet 1894). — Ces expériences ont été faites sur deux poutres de même section

(1) Neuere Bauweisen und Bauwerke aus Beton und Eisen, IVe partie, par Fritz von Emperger. — Editeurs Lehmann et Wentzel à Vienne (Autriche).

36 × 12 et de même longueur 3,03, armées toutes les deux de 2 barres rondes de 20 millimètres ; les étriers de 36 × 25 étaient distants de 30.

Expériences sur la poutre n° 1

Charge uniformément répartie	Flèche maxima	Flèche après le déchargement	Charge uniformément répartie	Flèche maxima	Flèche après le déchargement
1er Cas de chargement			*2e Cas de chargement*		
kg	mm.	mm.	kg.	mm.	mm.
900	0,10	—	1 800	1,00	0,50
1 800	0,25	—	3 600	1,75	0,55
2 700	0,35	+ 0,05	5 400	2,60	0,50
3 600	0,60	+ 0,05	7 200	3,60	0,40
4 500	0,95	+ 0,05	9 000	4,50	0,40
3 400	1,45	+ 0,10	10 800	5,50	0,45
6 300	2,25	+ 0,10	12 600	6,50	0,50
7 200	2,35	0,05 puis — 0,10	Pas trace de fissure à 13 500 une fissure se produit au bas, au quart de la longueur, puis bientôt d'autres au milieu, au bas également (v. fig. 183).		
8 100	2,70	— 0,10			
9 000	3,35	— 0,10			
9 900	3,75	— 0,10			
10 800	4,35	— 0,10			
11 700	5,00	+ 0,10			
12 600	5,75	+ 0,25			
13 500	6,25	+ 0,85			
14 400	7,25	+ 0,60			
Pas trace de fissures					

La pression a été opérée à l'aide de vérins hydrauliques. Les résultats de la poutre n° 1 sont consignés dans le tableau I.

La dernière pression a été maintenue ; la première fissure s'est produite entre 11h,37 et 11h,40 ; on remarqua des symptômes d'écrasement sur les fibres supérieures. Les variations de charge produites par les pertes d'eau des vérins amènent un mouvement d'oscillation autour du point où s'est produite la fissure médiane.

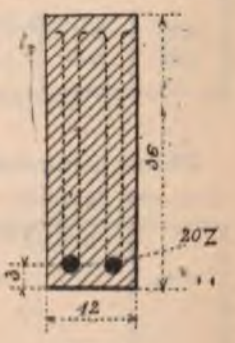


Fig. 183

La variation de flèche est de 1 millimètre à chaque coup de piston ; à 11h,50 la désagrégation s'accuse et à 12h,03 la rupture définitive se produit. Les fers ne sont pas

rompus, mais simplement courbés ; on n'a pu constater en brisant l'échantillon de décollement du fer.

Les expériences sur la deuxième poutre mettent en relief l'influence de la durée de la surcharge et l'influence des répétitions.

Expériences du 24 juillet (commencées à 3 heures)

Charge uniformément répartie kg.	Flèche mm.	Flèches après le déchargement mm.
900	0,05	»
1800	0,20	»
2700	0,40	»
3600	0,75	»
4500	1,1	0,05
6000	1,07	0,10

On obtient cette pression à 3h12′ ; en la maintenant on observe les flèches suivantes :

Heure	Flèches mm.	Heure	Flèches mm.	Flèches permanentes mm.	Heure	Flèches mm.	Flèches permanentes mm.
3,17	1,75	3.27	1,8	»	3.37	1,82	0,3
3,22	1,75	3,22	1,8	»	3,42	»	0,15
On remet en charge avec une pression de 12 000 kilogrammes.							
3.45	5,45	3,55	6,00	»	4,05	»	0,775
3,50	5,83	4,00	6,10	0,85	Pas de fissures		
On remet en charge avec la même pression.							
4,22	6.1	6.00	Arrêts de charge			»	»
5,22	6,45	6,50	»	1.05	»	»	»

Expériences du 25 juillet

Flèche permanente à 8h5′ : 1 millimètre. On remet en charge avec une pression de 12 kilogrammes.

Heure	Flèches mm.	Heure	Flèches mm.	Flèches permanentes mm.	Heure	Flèches mm.	Flèches permanentes mm.
9,05	6,60	9,25	7,0	»	2,45	7,45	»
9,10	6,55	12,00	7,4	»	5,30	7,45	»
On achève la pression à					5,35	»	1,775
					5,40	»	1,725

Expériences du 26 juillet

Flèche permanente à $8^h,30 = 1,55$ millimètre.

Mise sous pression de $8^h,35$ à $8^h,42$.

Pressions kg. .	1 800	3 600	4 500	9 000	12 250
Flèches mm. .	1,575	2,00	2,45	5,60	7,00

La charge a été maintenue de 8^h48 à 3^h10. Les flèches observées en des temps différents sont indiquées ci-dessous.

Heures	8,45	9,05	10,35	2,30	3,10
Charges kg. . . .	12 330	12 330	11 700	11 430	11 700
Flèches mm. . . .	7,2	7,825	7,05	7,4	7,2

La charge a été enlevée : Flèche permanente $1^{mm},8$, on a ensuite remis la poutre sous pression en portant la charge à 14.400 kilogrammes. La flèche a été de $10^{mm},5$. La rupture s'est produite au milieu de la poutre à 3^h35. Les premières fissures ont été observées à 9^h05 ; une fente observée au milieu de la poutre, s'est étendue jusqu'au tiers supérieur de la hauteur. Le béton s'est alors désagrégé dans la partie supérieure, au droit de la fente, mais il a gardé sa dureté dans la partie inférieure.

Les efforts supportés par le béton et par le fer au moment de la rupture peuvent être déterminés comme suit :

Poids par mètre courant : 90 kilogrammes.

Surcharge sur $1^m,60$. $P = 14400$ »

Portée de la poutre, $2^m,80$.

Moment maximum produit par la charge permanente

$$\frac{0,90 \times \overline{280}^2}{8} = 8820 \text{ kg/cm.}$$

Moment maximum produit par la surcharge

$$\frac{P}{4}\left(280 - \frac{\overline{160}^2}{160 \times 2}\right) = 720\,000 \text{ kg/cm.}$$

Total

$$728\,820 \text{ kg/cm.}$$

La rupture s'étant étendue jusqu'à $0^m,10$ de l'arête supérieure (v. fig. 184), on a approximativement :

Tension du fer ou compression du béton

$$\frac{728\,820}{29,7} = 24\,539 \text{ kilogrammes.}$$

L'effort de compression maximum du béton est donc

$$R = \frac{2 \times 24\,539}{10 \times 12} = 409 \text{ kilogrammes.}$$

L'effort de tension moyen des armatures, section $2 \times 314 =$ 628 millimètres.

$$R = \frac{24\,539}{628} = 39^{kg},06.$$

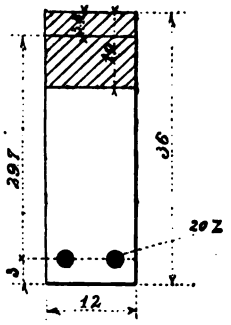


Fig. 184

Remarque. — La charge qui répond à la limite d'élasticité ne ressort pas nettement de ces expériences. Celle qui a produit la rupture a été de 14 400 kilogrammes dont le moment est

$$\frac{14\,400}{4} \cdot \left(\frac{2^m,80 - \overline{1,6}^2}{2 \times 1,6}\right) + \frac{90 \times \overline{2,80}^2}{8} = 7\,283 \text{ kilogrammes.}$$

La valeur de u est de

$$\frac{3}{36} = 0,083$$

le pourcentage est de

$$\frac{2 \times 3,14}{12 \times 36} = 1,45.$$

Les valeurs de m calculées pour les dalles minces, armées uniquement à la tension, répondant à $u = 0,300$ ne s'appliquent pas à ce cas.

Les valeurs de m calculées pour les dalles épaisses, armées à la fois à la tension et à la compression, ne peuvent être utilisées qu'en y faisant $p' = 0$, ce qui donne

$$\text{pour } u = 0{,}100 \qquad m = (0{,}175 + 0{,}024p)\,R_c$$
$$u = 0{,}050 \qquad m = (0{,}185 + 0{,}032p)\,R_c$$

et pour $p = 1{,}45$.

$$u = 0{,}100 \qquad m = 0{,}210\,R_c$$
$$u = 0{,}050 \qquad m = 0{,}231\,R_c$$

soit par interpolation

$$u = 0{,}083 \qquad m = 0{,}224\,R_c.$$

D'autre part l'expérience a donné à la rupture

$$m = \frac{0{,}12 \times 36}{7\,288} = 46{,}80.$$

La valeur de R_c à la rupture qui reporterait cette expérience d'après les théories exposées ci-dessous serait

$$R_c = \frac{46{,}80}{0{,}224} = 207 \text{ kilogrammes,}$$

chiffre qui répond très approximativement au chiffre de 180 kilogrammes annoncé, et qui confirme par suite le bien fondé de la théorie et des paramètres choisis.

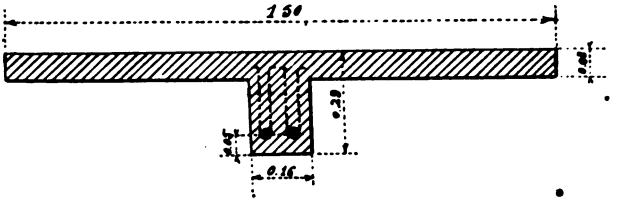


Fig. 185

136. Expériences de Lausanne. — Les expériences de Lausanne ont été faites sur une poutre de 5m,26 de portée libre, dont la section est représentée fig. 185. Cette poutre a été construite en juillet 1893 ; elle a été soumise à des époques très différentes à l'action d'une série de surcharges suffisamment élevées pour produire tout d'abord des fissures, puis la rupture totale.

Expériences du 9 décembre 1893

Les efforts dans les armatures ont été mesurés à l'aide d'un appareil Frankel dont les griffes étaient fixées directement sur les barres métalliques, mises partiellement à nu. L'axe de cet appareil était à 0m,75 du milieu de la poutre. Les flèches étaient mesurées au milieu de la portée.

La surcharge était produite par une série de sacs de sable.

Charge uniformément répartie	Flèche	Allongement mesuré sur l'appareil		Accroissement du travail	Travail total
		immédiatement après la charge	dix minutes après la charge		
1° sur toute la travée.					
kg.	mm.	mm.	mm.	kg.	kg.
0	0	0	0	0	0
1 000	0,5	0,5	0	0,08	0,08
2 000	1,0	0,5	3,5	0,58	0,66
3 000	2,0	6,5	9,5	1,57	2,23
4 000	3,0	5,5	7,5	1,24	3,47
5 000	4,0	7,0	9,0	1,49	4,96
2° sur la demi-travée seulement.					
2 500	2,5	—3,5	»	4,4	»
0	0	—5,0	6,25	3,3	»

Expériences du 5 février 1894. — Premiers essais.

Charge uniformément répartie	Flèche	Allongement mesuré sur l'appareil		Accroissement du travail		Travail total	
		côté amont	côté aval	côté amont	côté aval	côté amont	côté aval
kg.	mm.	mm.	mm.	kg.	kg.	kg.	kg.
0	0	0	0	0	0	0	0
1 000	0,4	5	8	0,81	1,58	0,81	1,58
2 000	1,0	6	9	0,97	1,78	1,78	3,36
3 000	1,7	7	4	1,14	0,79	2,92	4,15
4 000	2,5	8	7	1,29	1,38	4,21	5,53
5 000	3,5	8	8	1,30	1,58	5,51	7,11
0	0,1	»	»	»	»	»	»

La même poutre a été soumise le 10 août et le 30 août 1894 à l'action d'une série de nouvelles charges, les dernières allant jusqu'à la rupture. Les allongements de l'armature étaient mesurés avec des appareils Manet. La charge était produite à l'aide de sacs de sable de 50 kilogrammes uniformément répartis sur la poutre. Voici les résultats de ces expériences.

Poids uniformément réparti	Flèche au milieu	Tension des armatures	Observations
kg.	mm.	kg. par mm²	
2 200	1,53	2,0	
4 500	3,61	7,3	
5 000	4,45	8,6	
6 000	5,53	10,3	
7 000	6,30	12,4	
6 000	6,38	11,3	
5 000	5,59	9,9	
4 500	5,02	8,8	
4 000	4,66	8,5	
2 000	3,45	5,4	
0	1,39	1,6	Interruption de 3 heures dans les expériences.
0	0,6	1,6	
5 000	5,14	9,5	
7 000	6,81	12,4	
8 000	7,86	14,5	Production d'une fissure à la partie inférieure de la nervure au droit des entailles faites pour loger les appareils indicateurs.
9 000	9,22	16,0	2 fissures à côté des appareils indicateurs et 2 de l'autre côté de l'axe.
10 000	10,60	17,5	
11 000	12,40	21,3	Ces valeurs supposent le coefficient d'élasticité du fer constant ; comme ce n'est plus le cas pour ces efforts, ils ne sont donnés qu'à titre d'approximation.
12 000	14,23	23,8	
13 000	16,32	27,3	
14 000	18.51	31,0	
15 000	24,50	»	
16 000	»	»	Fentes sur les culées qui doivent être étayées.
18 100	»	»	Les fentes ont 1 millimètre d'ouverture ; la poutre jugée rompue vient reposer sur un chevalet.

Le hourdis s'est gauchi de 6 centimètres mais il n'a pas présenté trace d'écrasement. Le lendemain la poutre déchargée jusqu'à concurrence de 5 tonnes, s'est relevée de 10 millimètres; déchargée complètement elle s'est relevée de 18 millimètres.

Les tirants d'armature en fers ronds ont présenté une diminution de diamètre de 13/100 ; cette diminution a été constatée dans les entailles faites pour loger les appareils indicateurs.

Surcharge uniformément répartie	Flèches		Observations
	Côté gauche	Côté droit	
kg.	mm.	mm.	
4.600	3,3	6,7	
7.000	6,1	11,2	
9 000	8,1	14,1	
11 000	11,1	18,6	
13 000	13,1	22,1	
15 000	15,2	26,0	Production de fentes dans le hourdis, continuant celles de l'âme. L'une située au milieu de la portée s'étend jusqu'au 2/3 de l'épaisseur du hourdis.
17 000	17,4	29,7	
19 000	23,7	34,2	
21 000	35,1	75,5 — 93	
23 000	79,0	15,7	Le béton commence à s'écraser au milieu; l'épaisseur de la partie écrasée n'est que de 23 millimètres.
25 000	—	—	Affaissement brusque et complet de la poutre

Le scellement du fer aux extrémités n'a pas bougé. Les tirants se sont séparés du béton d'environ 1 centimètre vers le milieu; il y a dû avoir une rupture ou un allongement équivalent à l'intérieur du béton. Les fers dégarnis et nettoyés ne présentaient aucune cassure, sauf dans la partie médiane où l'on a observé une striction de section très prononcée sur une longueur de 5 cm.

Il serait facile avec les données ci-dessus de déterminer les taux de travail du béton et du fer sous la charge de 23 000 kilogrammes, si l'on pouvait admettre que la charge a bien agi uniformément, hypothèse incertaine. Le poids mort étant de 1 863 kilogrammes et la portée de la poutre de $5^m,25$.

$$M = \frac{23\,000 + 1\,863}{8} \times 5,25 = 16\,320.$$

La distance entre les points d'application des résultantes de compression et de tension étant supposée de $0^m,23$ (distance du milieu des membrures) l'effort de compression ou de tension est de

$$\frac{16\,320}{0,23} = 71\,000 \text{ kilogrammes.}$$

La section active du béton étant réduite à $2,5 \times 150 = 375$ centimètres carrés on a pour le béton

$$R = \frac{71\,000}{375} = 198^{kg} \text{ par cmq.}$$

pour le fer, 2 barres de 30, section 1 414 m/mq.

$$R = \frac{71\,000}{1\,414} = 50^{kg} \text{ par mmq.}$$

Cette poutre ayant été calculée pour une charge de 3 000 kilogrammes par mètre courant, son coefficient de sécurité a atteint 8.

Analysons à l'aide de nos procédés cette poutre à simple té de $(150 \times 8) + (16 \times 21)$ hauteur $= 29$, armée à la tension de 2 ronds de 30 millimètres, portée 5,26. Distance des axes des armatures à la face tendue 5 centimètres. Surcharges uniformément réparties. Normale 3 000 kilogrammes, première fissure 8 000 kilogrammes, rupture 23 000 kilogrammes.

$$u = \frac{5}{29} = 0,172$$

$$s = 2 \text{ ronds de } 30 = 14,14$$

$$\text{Poids mort} = \left[(150 \times 8) + (16 \times 21)\right] \times 29 \times 0^{kg},25 \times 5,26 = 1\,220^{kg}.$$

$$\text{Moment normal} = (3\,000 + 1\,220) \times \frac{5,26}{8} = 3\,301^{kg} \text{ (1)}$$

$$\text{Moment limite d'élasticité} = (8\,000 + 1\,220) \times \frac{5,26}{8} = 6\,588^{\text{»}} \text{ (2)}$$

$$\text{Moment rupture} = (23\,000 + 1\,220) \times \frac{5,26}{8} = 16\,451^{\text{»}} \text{ (3)}$$

On a retrouvé pour $u = 0,125$ $R_c = 4,75 \dfrac{M - 6,53\,ah^2}{hs}$

$$R_F = 1,3 \frac{M - 6,53\,ah^2}{hs}$$

Deuxième poutre (voir fig. 189)

Pression en atmosphères	Flèches observées	Observations
	millimètres	
5	C° 2 1/2	
0	1/4	
10	6 1/2	
14	rupture C° 100	

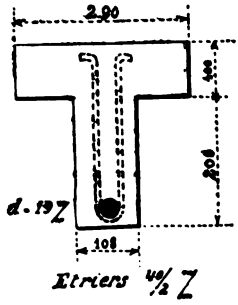


Fig. 189

Rupture subite au milieu et chute sur les cales.

Le fer n'est pas cassé, il est allongé au milieu.

Largeur des fentes : f_1 environ 5 mm.
f_2 » 10 mm.
après rupture complète 2 cm.

(voir fig. 190).

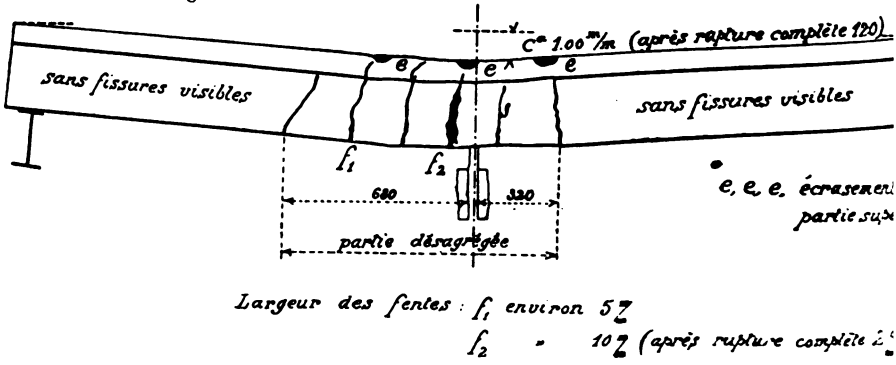


Fig. 190

Troisième poutre

La poutre est placée sens dessus-dessous.

Profil comme ci-dessus.

L'ouvrier ayant pompé trop vite, la pression s'est élevée presque tout d'un coup et la rupture a eu lieu immédiatement (le manomètre a indiqué jusqu'à 13 atmosphères) et on n'a pu mesurer aucune flèche.

On décide d'essayer la même poutre reposée à l'endroit.

Troisième poutre [illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]
	millimètres	
3	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	

Cette poutre est la même qu'à l'essai III ; elle avait donc déjà été cassée en sens inverse. Le fer n'est qu'allongé au milieu.

Fig. [illegible]

Quatrième poutre

La poutre est placée sens dessus-dessous.

Profil comme à la poutre I. Diamètre de l'armature [illegible] mm.

[illegible]	[illegible]	[illegible]
	millimètres	
3	0,25	
4	0,25	
5	0,25	
7	0,25	
9	0,00	
10	0,75	
11 (rupture)	7,40	
9	6,15	
3		
		rupture complète et chute sur les calages (voir figure [illegible]).

Signé : W. [illegible]

137. Expérience de Gorinchem. *Expérience de la Société de construction en ciment armé d'Amsterdam sur une poutre en* T. — La poutre avait la forme représentée figure 192 sa portée était de 7 mètres et elle devait supporter une charge de 700 kilogrammes par mètre carré.

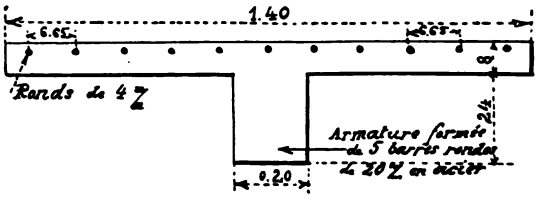


Fig. 192

Le béton était composé d'une partie de ciment, deux de sable et deux de gravier dont les grains mesuraient de 5 à 25 millimètres de diamètre.

Les résultats observés sont consignés dans le tableau suivant. La surcharge était produite à l'aide de sacs de sable.

Charges uniformément réparties		Flexion	Observations
totales	par mètre carré		
2 300	235	1,5	
4 600	470	4,5	
0	0	1,0	Déformation permanente.
6 900	705	6,5	
9 200	939	9,5	
11 500	1 173	13,0	
13 800	1 408	15,5	
16 100	1 643	18,5	
17 950	1 832	21,0	
18 400	1 878	»	Petites fissures dans la nervure.
19 900	2 031	21,0	La flexion croît peu à peu ; elle est de 26,5 millimètres au bout d'une heure.
21 150	2 158	29,0	
22 400	2 286	36,0	Les fissures s'agrandissent. En reportant les sacs des extrémités au milieu, la rupture s'est produite dans cette partie.

138. Expériences de l'Association des Ingénieurs et Architectes Autrichiens. (Zeitschrift des œsterreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines).

Diagramme des déformations d'une voûte en ciment armé. — L'Association des Ingénieurs et Architectes autrichiens a entrepris une série d'essais comparatifs de voûtes en matériaux divers (brique, moellons, béton, ciment armé et acier), le rapport sur ces essais a été traduit par MM. de Tédesco, Zschokke et Candlot, et publié *in-extenso* par la *Revue technique* ; nous croyons devoir en donner les extraits suivants qui concernent les voûtes de 23 mètres de portée en béton et en ciment armé.

Voûte en béton. — La voûte en béton avait les dimensions suivantes :

Ouverture 23 mètres, flèche $4^m,60$, largeur 2 mètres, épaisseur uniforme $0^m,70$.

Elle fut construite par l'entreprise de travaux en béton *Pittel* et *Brausewetter*, qui adopta trois dosages, 1 : 2 — 1 : 5 — 1 : 8 ; les 2 premiers dosages furent appliqués au point de l'intrados et de l'extrados où l'on pouvait prévoir des efforts de tension ; le noyau proprement dit fut exécuté en béton au dosage de 1 : 8.

Ces dosages étaient constitués comme suit :

Dosage 1 : 2 (1 ciment Portland ; 1/2 gravier ; 1/2 pierre cassée ; 1 sable ; en volumes versés librement).

Dosage : 1 : 5 (1. P ; 1. 1/2 g ; 1. 1/2 pc ; 2s) en volume comme plus haut.

1 : 8 (1, 1/2 P ; 3g ; 2 p. c ; 3s) en volume comme plus haut.

La voûte fut chargée 3 mois après la construction ; elle se rompit sous une charge d'un seul côté de 3 620 kilogrammes par mètre carré. L'emploi de divers dosages n'a pas donné de bons résultats ; il y a eu décollement entre les couches de composition différente. Il est à remarquer que certaines parties, trop abritées, n'avaient pas eu le temps d'atteindre le durcissement nécessaire.

Voûte en ciment armé. — La voûte en ciment armé avait les dimensions suivantes :

Portée 28 mètres, flèche $4^m,6$, largeur 2 mètres. L'épaisseur était de $0^m,60$ aux naissances et de $0^m,35$ à la clef.

L'armature Monier était composée de 2 treillis métalliques à

Tableau I. —

Numéros d'ordre	Date	Durée de l'observation	Température Réaumur 0	Charges par mètre courant	Charges totales	Déformations moyennes en centimètres des points correspondants W_1 à W_{10} v	W_1 à W_{10} h	1 à 10 v	1 à 10 h	2 à 9 v	2 à 9 h	3 à 8 v	3 à 8 h
		h		tonnes									
1	2/6	8 9 30	17,5	avant le décintrement		0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00
2	24/6	9 9 50	14,5	après le décintrement		—0,015	0,000	—0,015	—0,025	+0,010	+0,020	+0,060	+0,07
3	9/7	8 35 9 45	17,5	après montage de l'échafaudage métallique		—0,065	+0,030	—0,070	—0,045	—0,250	+0,160	+0,075	+0,19
4	18/7	10 20	14,8	1,778	20,447	—0,030	+0,070	—0,075	—0,010	—0,160	+0,210	+0,190	+0,18
5	18/7	11 25	14,4	3,050	35,075	—0,060	+0,065	—0,080	—0,015	—0,215	+0,200	+0,210	+0,14
6	18/7	3	12,5	4,008	46,098	—0,055	+0,050	—0,090	—0,005	—0,265	+0,210	+0,245	+0,23
7	19/7	9 15	13	4,008	46,098	—0,055	+0,050	—0,075	+0,050	—0,275	+0,200	+0,315	+0,27
8	19/7	10 15	13	4,948	56,907	—0,045	+0,040	—0,085	+0,055	—0,370	+0,205	+0,335	+0,30
9	19/7	11	12,5	5,907	67,930	—0,045	+0,035	—0,100	+0,065	—0,650	+0,300	+0,250	—0,10
				déchargé									
10	19/7	2 15	14,5	1,778	20,447	—0,050	+0,035	—0,070	+0,055	—0,340	+0,205	+0,205	+0,28
11	19/7	3	15	3,050	35,075	—0,050	+0,040	—0,080	+0,055	—0,430	+0,205	+0,210	+0,33
12	19/7	3 45	15	4,948	56,907	—0,040	+0,040	—0,095	+0,060	—0,625	+0,205	+0,205	+0,45
13	19/7	5	15	6,847	78,735	—0,045	+0,035	—0,130	+0,065	—0,885	+0,205	+0,180	+0,62
14	19/7	5 40	14	7,239	83,275	—0,040	+0,035	—1,285	+0,315	affaissement approximatif 18 cm.	—9,850	+0,800	+6,50
15	20/7	10	14	7,239	83,275	—0,050	+0,025	+1,265	+0,310	?	—10,850	+0,860	+6,58

Les déformations verticales sont + vers le bas et — vers le haut.

Les déformations horizontales sont + dans la direction du point 5 vers le point 1, 6 vers 10.

Pour les torsions on a $\underset{+}{\curvearrowright}$ $\underset{-}{\curvearrowleft}$.

'oûte en béton

Déformations moyennes en centimètres des points correspondants						Torsions mesurées au niveau d'eau aux points					Observations
4 à 7		5 à 6		W_5 à W_6							
v	*h*	*v*	*h*	*v*	*h*	1	2	3	4	5	
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000						
0,025	+0,025	—0,005	—0,005	+0,005	+0,005						
0,215	+0,205	—0,060	—0,020	—0,020	0,000						
0,305	+0,265	—0,035	—0,025	—0,015	+0,005	0'0"	0'0"	0'0"	0'0"	0'0"	*) L'équerre W_{10} a dû être déplacée.
0,370	+0,300	—0,035	—0,025	—0,015	0,000	+0'31"	—0'10"	—0'35"	+0'20"	+0'20"	
0,460	+0,345	—0,040	—0,025	—0,010	—0,015	+1'10"	+0'35"	—1'40"	+0'30"	+0'42"	
0,555	+0,300	—0,035	—0,040	—0,020	—0,020	+1'10"	+0'35"	—1'40"	+0'30"	+0'42"	
0,645	+0,440	—0,025	—0,040	—0,020	—0,025	+2'50"	+0'20"	—2'10"	+1'0"	+0'52"	
0,955	+0,630	—0,040	—0,040	—0,025	—0,020	+6'50"	+0'28"	—4'50"	+3'5"	+2'7"	Première fissure à 5,5 kg. par m. courant environ.
0,585	+0,415	—0,025	—0,030	—0,020	—0,025	+4'50"	+0'45"	—0'10"	+1'5"	+0'57"	
0,690	+0,470	—0,025	—0,030	—0,025	—0,020	+5'5"	+0'35"	—0'55"	+1'50"	+1'7"	
0,900	+0,605	—0,025	—0,035	—0,015	—0,020	+6'0"	+0'38"	—2'45"	+3'10"	+1'47"	
1,215	+0,780	—0,020	—0,035	—0,010	—0,025	—6'5"	+0'35"	+5'30"	+3'40"	+3'17"	
7,995	+5,240	+0,060	+0,020	—0,015	—0,015						Rupture brusque.
8,125	+5,225	+0,100	+0,025	—0,025	—0,020						

TABLEAU II. — *Voûte en ciment*

Numéros d'ordre	Dates	Heure de l'observation	Température Re	Charges par mètre courant	Charges totales	Déformations moyennes en centimètres des points correspondants W_1 et W_{10} v	W_1 et W_{10} h	1 et 10 v	1 et 10 h	2 et 9 v	2 et 9 h	3 et 8 v	3 et 8 h
		h		tonnes									
1	25/7	9 35 / 10 30	17,8	Avant décintrement		0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	8/8	3 20 / 10 25	18,8	Après décintrement		0,000	000,0	—0,050	—0,065	—0,130	+0,090	+0,125	+0,040
3	13/8	4 55 / 5 10	19,2	Après montage de l'échafaudage métallique		—0,020	—0,040	—0,080	—0,070	—0,290	+0,100	+0,035	+0,100
4	25/8	8 50	21,6	1,778	20,447	—0,065	—0,045	—0,095	—0,125	—0,380	+0,200	—0,115	+0,335
5	25/8	10 30	24	3,050	35,075	—0,075	—0,065	—0,010	—0,120	—0,540	+0,255	—0,080	+0,385
6	25/8	11 30	24,5	3,990	45,884	—0,075	—0,060	—0,110	—0,135	—0,735	+0,355	—0,040	+0,460
7	25/8	12 30	25	4,929	56,693	—0,075	—0,065	—0,115	—0,125	—0,940	+0,460	—0,015	+0,555
8	25/8	2 30	25	4,929	56,693	—0,075	—0,065	—0,125	—0,130	—0,985	+0,485	—0,055	+0,565
9	25/8	3 15	25	5.879	67,609	—0,075	—0,055	—0,135	—0,125	—1,225	+0,635	—0,055	+0,700
10	25/8	4 30	24	6,828	78,825	—0,075	—0,060	—0,140	—0,120	—1,620	+0,875	—0,025	+0,895
11	25/8	5 45	22,5	7,779	89,460	—0,070	—0,050	—0,160	—0,110	—2,080	+1,140	+0,010	+1,145
12	25/8	6 45	22	8,675	99,561	—0,075	—0,050	—0,195	—0,100	—2,615	+1,460	+0,050	+1,395
				Après déchargement									
13	26/8	8 30	13	1,778	20,447	—0,085	—0,040	—0,150	—0,065	—1,120	+0,565	—0,030	+0,735
14	26/8	10 20	15	5,879	67,609	—0,085	—0,045	—0,185	—0,110	—1,960	+1,105	+0,150	+1,710
15	26/8	12 15	18	8,675	99,561	—0,085	—0,050	—0,245	—0,100	—2,785	+1,610	+0,285	+1,575
16	26/8	2 45	18,5	10,284	118,272	—0,085	—0,055	—0,325	—0,110	—3,985	+2,345	+0,385	+2,130
17	26/8	3 45	18,5	11,095	127,591	—0,080	—0,055	—0,385	—0,110	—4,855	+2,840	+0,550	+2,505
18	26/8	4 15	18	11,900	136,855	—0,080	—0,055	—0,480	—0,125	—6,290	+3,710	+0,715	+3,290
19	26/8	5	18	12,706	146,119	—0,080	?	—1,085	—0,235	?	+10,730	?	+8,880
20	31/8	7 30	14,5	Après déchargement complet		—0,080	—0,035	—0,921	—0,190	—14,055	+7,515	+1,870	+7,055

Les déformations verticales sont + vers en bas et — vers en haut.

» horizontales sont + dans la direction du point 5 vers le point 1 et 6 vers 10.

Torsions : ↺ + ↻ —

ossature métallique

Déformations moyennes en centimètres des points correspondants					Torsions mesurées au niveau d'eau aux points					Observations
et 7	5 et 6		W_3 et W_6		1	2	3	4	5	
h	*v*	*h*	*v*	*h*						
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000						
+0,100	−0,060	+0,045	−0,020	0,000						
+0,165	−0,060	+0,035	−0,015	+0,005						
+0,325	−0,070	+0,020	−0,005	−0,025	0'0"	0'0"	0'0"	0'0"	0'00"	
+0,375	−0,065	+0,020	−0,005	−0,030	+ 0'39"	+ 0'13"	− 1'58"	+ 0'26"	0'00"	
+0,455	−0,060	+0,020	−0,010	−0,020	+ 2'0"	+ 0'20"	− 4'22"	+ 1'8"	0'00"	
+0,545	−0,065	+0,015	−0,005	−0,025	+ 3'39"	+ 0'40"	− 4'15"	+ 2'0"	0'00"	
+0,545	−0,060	+0,015	−0,005	−0,025	+ 3'42"	+ 0'54"	− 4'17"	+ 2'1"	0'00"	
+0,660	−0,065	+0,015	−0,020	−0,025	+ 4'28"	+ 1'45"	− 5'50"	+ 3'20"	+ 0'50"	
+0,845	−0,050	+0,025	−0,010	−0,030	+ 5'51"	+ 4'10"	− 9'16"	+ 5'10"	+ 0'50"	Fissures.
+1,055	−0,050	+0,020	−0,005	−0,035	+ 6'57"	+ 6'34"	−17'3"	+ 7'52"	+ 1'10"	
+1,295	−0,045	+0,020	−0,015	−0,040	+10'50"	+ 8'40"	−30'30"	+ 9'40"	+ 1'10"	*Niveau d'eau déplacé.
+0,830	−0,080	+0,025	−0,015	−0,025	+ 3'35"	+ 3'30"	−10'0"	+ 3'42"	0'00"	
+1,110	−0,065	+0,025	−0,010	−0,030	+ 8'26"	+ 6'17"	−20'34"	+ 8'18"	+ 1'40"	
+1,495	−0,065	+0,025	−0,010	−0,025	+13'42"	+ 8'20"	−30'25"	+12'24"	+ 1'40"	
+2,030	−0,050	+0,030	−0,010	−0,025	+22'22"	+ 11'0"	−44'40"	+16'57"	+ 6'20"	
+2,360	−0,040	+0,005	−0,010	−0,030	+28'30"	+11'50"	−53'30"	+20'0"	+ 8'30"	
+3,020	−0,030	+0,065	−0,010	−0,030	+ 38'0"	+15'50"	−55'30"	+25'40"	+13'32"	
+8,075	−0,085	+0,365	—	—						Rupture.
+6,195	−0,065	+0,290	−0,020	−0,045						

mailles de 65 millimètres, en ronds de 14 millimètres pour les directrices (arcs longitudinaux) et de 7 millimètres pour les barres de répartition (Droites transversales). La liaison des barres se fit à double fil. Le treillis d'intrados fut posé directement sur le cintre.

Les travaux furent exécutés par la maison Wayss et Cie qui employa un seul dosage de 1 volume de ciment Portland et 3 volumes de sable, mesurés sous tassement. Les essais eurent lieu également 3 mois après la construction, dont 2 mois sur cintre.

La rupture eut lieu sous une charge d'un seul côté de 6 350 kilogrammes par mètre carré. Après déchargement la voûte se souleva de 55 millimètres environ. Quand on démolit le béton, on

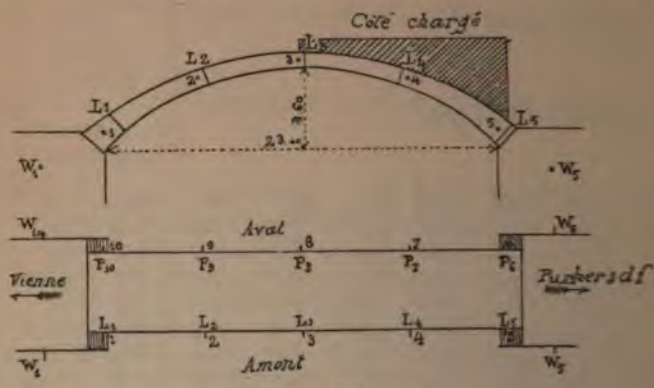


Fig. 193

remarqua que ce dernier était d'une dureté extraordinaire entre les deux treillis métalliques. Le treillis supérieur était fortement tordu à l'endroit de la rupture, mais intact. Le béton adhérait fortement aux barres, et nulle part on ne put découvrir de trace de rouille. Après avoir dégagé le hourdis supérieur, on détacha les fers des naissances et on isola les éléments longitudinaux et transversaux du treillis. La démolition se fit avec la plus grande difficulté à cause de la grande adhérence du béton avec le treillis inférieur. On dépouilla cependant cette ossature entièrement comme la première. Les barres étaient fortement courbées, mais indemnes malgré les déformations importantes subies lors de la rupture.

Le diagramme (fig. 193) indique la position des points princi-

aux où les observations de déformation ont été faites ; elle permet de comprendre les résultats consignés dans les tableaux précédents.

Les diagrammes (fig. 194 pour le béton et fig. 195 pour le ciment armé) donnent les déformations subies par les deux voûtes, aux points 4/7 et 2/9, côté aval et amont. Dans ces diagrammes les ordonnées représentent les charges totales pour une demi-voûte, les abscisses, les abaissements.

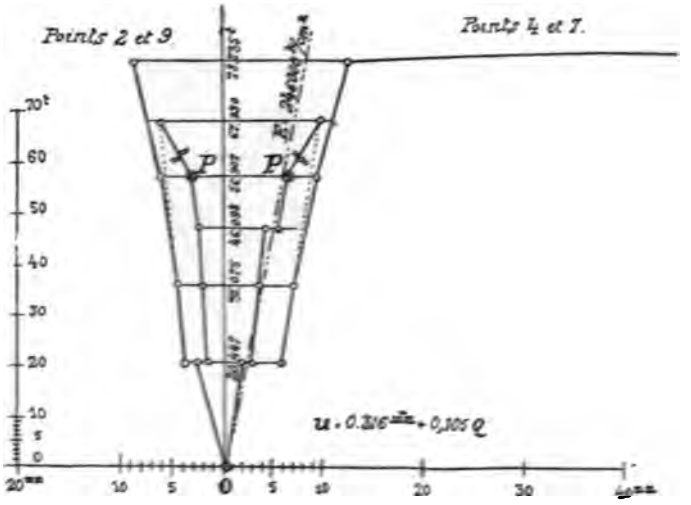


Fig. 194

Les diagrammes des déplacements des points observés pour les premières charges croissantes s'écartent peu de la ligne droite.

Mais ici intervient un nouveau facteur, la durée des charges, de sorte que la continuité du diagramme est interrompue aux points correspondant aux charges prolongées. Les diagrammes permettent de reconnaître assez facilement la limite à laquelle l'allure de la courbe se modifie, et fait, digne de remarque, ces limites se sont manifestées aux mêmes endroits pour une même voûte pour les abaissements, les déplacements horizontaux et angulaires, sous la même charge.

Les diagrammes commencent par l'allongement relatif au poids propre (après enlèvement du cintre) ou surcharge nulle, et on a

pris comme limite de la proportionnalité le point P qui frap l'œil par la modification de la direction de la courbe à cet endro

On a supposé que dans l'intervalle des charges comprises ent zéro et le point P, le diagramme est une ligne droite ; on a dét miné l'équation par la méthode du moindre carré et obtenu u expression vraisemblable entre les limites de la loi des déform tions.

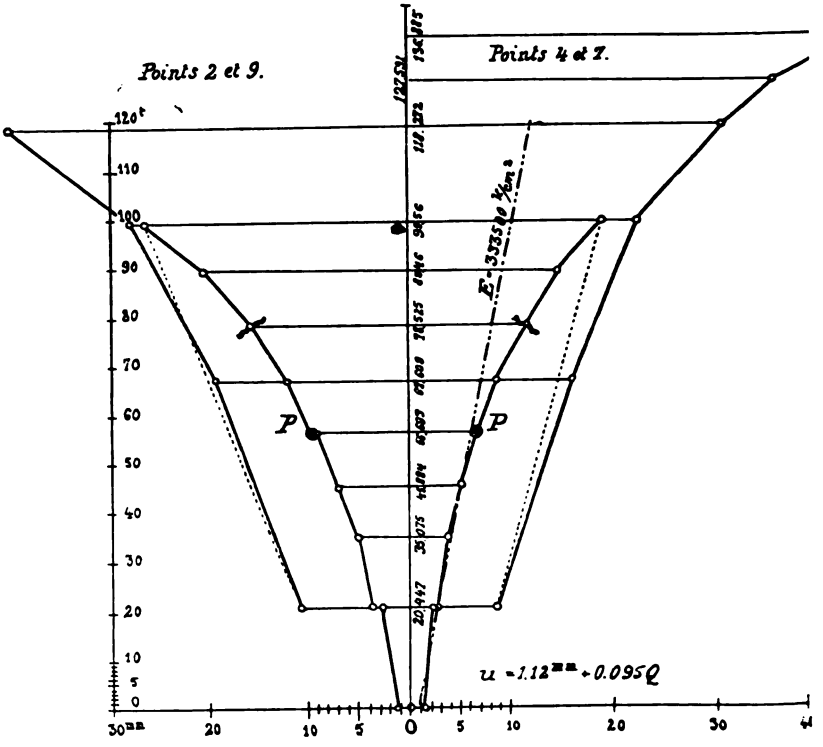


Fig. 195

L'équation de cette droite moyenne est $u = a + KQ$, où a et sont les constantes à déterminer, et Q la charge relative à moitié de la voûte.

Pour déterminer a et K, on se sert des équations connues :

$$a = \frac{\Sigma (Q)^2 \times \Sigma (\delta) - \Sigma Q \times \Sigma (Q\delta)}{n\Sigma (Q^2) - \left[\Sigma (Q)\right]^2}$$

$$K = \frac{n\Sigma(Q\delta) - \Sigma(Q) \times \Sigma(\delta)}{n\Sigma (Q)^2 - \left[\Sigma (Q)\right]^2}$$

dans lesquelles δ désigne l'abaissement vertical du point (4-7) sous la charge Q et n le nombre des observations.

On a trouvé ainsi pour la voûte en béton :

Voûte en béton

Q tonnes	δ mm.	$Q\delta$	Q^2	u mm.	$(u-\delta)$ mm.
0	0,25	0	0	0,32	+0,07
20,447	2,78	56,84	418,080	2,46	−0,32
35,075	3,70	129,78	1230,256	4,00	−0,30
46,098	5,08	234,18	2125,026	5,16	+0,08
56,907	6,45	367,05	3238,407	6,29	−0,16
$\Sigma(Q) = 158,527$	$\Sigma(\delta) = 18,26$	$\Sigma(Q\delta) = 787,85$	$\Sigma(Q)^2 = 7011,769$	»	»

$$u = 0^{mm},316 + 0,105\ Q.$$

Voûte en ciment armé

Q tonnes	δ mm.	$Q\delta$	Q^2	u mm.	$(u-\delta)$ mm.
0	1,40	0	0	1,12	−0,28
20,447	2,95	60,407	419,308	3,06	+0,11
35,075	4,00	140,300	1230,256	4,45	+0,45
45,884	5,35	245,479	2105,341	5,48	+0,13
56,693	6,95	394,016	3214,096	6,51	−0,44
$\Sigma(Q) = 158,129$	$\Sigma(\delta) = 20,65$	$\Sigma(Q\delta) = 840,202$	$\Sigma(Q)^2 = 6969,001$	»	»

$$u = 1^{mm},12 + 0,095\ Q.$$

139. Expériences de M. de Joly, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées (*Annales des Ponts et Chaussées*). — M. de Joly a fait une série d'expériences pour déterminer la *Résistance et l'élasticité du ciment et du béton à la traction* et les modifications qu'apportent à ces facteurs l'addition d'armatures métalliques. Nous citerons dans ce qui suit le résumé des expériences effectuées sur le béton armé.

Les éprouvettes avaient une section de 200 millimètres carrés ; elles étaient armées de fers ronds diversement disposés. Leurs courbes de déformation présentent la même allure que celles des éprouvettes non armées. Elles n'ont pas de point singulier et

la limite d'élasticité qui n'a pu en aucun cas être déterminée d'une façon précise, semble toujours voisine de la rupture. La valeur du coefficient d'élasticité reste sensiblement constante sous toutes les charges.

Il a été trouvé les coefficients d'élasticité suivants :

	Ciment	Mortier	Béton
	kg.	kg.	kg.
Eprouvettes non armées	180 000	210 900	213 100
» armées	263 100	278 700	309 200

Les coefficients de résistance correspondants avaient été trouvés de

Briquettes en 8 de 5 cmq. de section conservées sous l'eau	Mortier { 600 kg. de ciment 1 mc. de sable	Béton { 500 kg. de ciment 1/2 mc. de sable 1/2 mc. de gravier
Eprouvettes non armées	9kg,90	9kg,50
» armées	15kg,92	15kg,39

Le tableau suivant permet de se rendre compte de l'effet de l'armature.

Désignation des éprouvettes $\Omega = 0^{mq},0200$	Charges appliquées en kilog. P	Coefficients d'élasticité du fer E_F	Coefficients d'élasticité du ciment E_c	Allongements millimètres Calculés (1)	Allongements millimètres mesurés
	kg.	kg.	kg.	mm.	mm.
Eprouvettes armées d'une barre placée au centre de la section dans toute la longueur $\sigma = 0^{mq},000314$	2 800	2 000 000	180 000	0,0671	0,074 0,072
Eprouvettes armées de deux barres symétriques plus ou moins écartées dans toute la longueur $\sigma = 0^{mq},000628$	2 800	2 000 000	180 000	0,0590	0,0562 0,0512 0,0520 0,0510

(1) Les allongements ont été calculés comme suit :

La charge de traction appliquée à une éprouvette de ciment armé tend à se répartir également entre les diverses fibres moléculaires et à leur communiquer

140. Expériences de la Société pour les Constructions en ciment armé. — La Société pour les Constructions en ciment armé a fait construire à l'usine de MM. Edmond Coignet et Cie, à Asnières, quelques poutres en ciment armé dont les essais dirigés et communiqués par M. N. de Tédesco, alors ingénieur de la dite Société, dans *Le Ciment*, le 25 octobre 1897, ont été le point de départ des études de Stellet et Faure, Ingénieurs en Chef des Ponts et Chaussées.

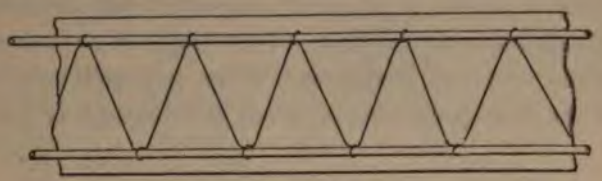


Fig. 196

Ces poutres étaient à armatures symétriques, composées de 4 barres rondes reliées entre elles dans deux plans horizontaux et deux plans verticaux par de petits fers simplement ligaturés comme le représente la figure 196. Les essais ont été faits sur 4 poutres différentes (fig. 197).

des allongements inversement proportionnels à leurs coefficients d'élasticité respectifs. Au cours de ces allongements il se produit des frottements dus à l'adhérence réciproque des fibres d'élasticité différente et à la contraction transversale qui est inséparable de tout effort de traction. Quelles que soient les réactions qui en résultent, elles peuvent être mises sous la forme $\pm fT$, T étant la résultante des réactions transversales sur une fibre de section égale à l'unité, et f un coefficient de frottement. On peut donc écrire pour chaque fibre, R étant la tension par unité de surface.

$$\frac{P}{\omega} \pm fT = R.$$

Quand l'équilibre est établi, les diverses tensions R produisent toutes un même allongement λ, tel que l'on ait :

$$\frac{P}{\Omega} = nE_v\,\lambda,$$

n étant un coefficient plus grand que l'unité ; le coefficient d'élasticité apparent de l'éprouvette est nE_v.

On peut exprimer en fonction de λ la tension R de chaque fibre.

Dans le cas d'une fibre métallique, on a :

$$R_F = nE_v\,\lambda + fT = E_f\lambda.$$

Ces poutres ont été placées librement sur deux appuis de niveau distants de 6m,50 de nu à nu des murs et chargées d'un poids isolé croissant, agissant en leur milieu par l'intermédiaire du couteau d'un appareil de fortune que M. *Leconte*, le directeur de l'usine avait construit en quelques jours dans le but de produire des efforts considérables sans aucune manutention de poids et d'indiquer automatiquement les flèches. Cet appareil fort ingénieusement établi, se composait essentiellement d'un levier de fer agissant sur le milieu de la poutre à essayer par l'intermédiaire d'un étrier de longueur variable. A l'extrémité de ce levier agissait un récipient que l'on remplissait d'eau graduellement et sans secousse. Le poids propre du récipient et celui du levier lui-même

Dans le cas d'une fibre de la gaine de ciment on a :

$$R_c = nE_c\,\lambda - fT = E_c\lambda.$$

Si l'éprouvette n'était pas armée, le ciment supporterait une tension $R'_c = nE_c\,\lambda$; le bénéfice de l'armature est mesuré par le rapport :

$$\frac{R'_c - R_c}{R_c} = n - 1.$$

La somme des tensions supportées respectivement par le fer et le ciment est égale à la charge appliquée à l'éprouvette. Si la section totale des barres composant l'armature est égale à σ, on a :

$$P = Ef\lambda\sigma + E_c\lambda\,(\Omega - \sigma) = nE_c\,\lambda\Omega$$

d'où l'on tire :

$$n - 1 = \frac{\sigma}{\Omega}\,\frac{Ef - E_c}{E_c}.$$

Le bénéfice de l'armature est donc d'autant plus considérable que la section du fer est elle-même plus considérable par rapport à la section totale de l'éprouvette. Ce bénéfice augmente également avec le rapport des coefficients d'élasticité du métal et du ciment employés; le coefficient d'élasticité du ciment croissant avec le temps, alors que celui du fer reste constant, le bénéfice de l'armature diminue quand l'âge du ciment armé augmente.

La formule qui précède permet de calculer pour une éprouvette armée connue le coefficient n d'où se déduisent l'allongement λ et les tensions R_f et R_c que produira l'application d'une charge P à l'éprouvette.

$$\lambda = \frac{P}{\Omega E_c + \sigma\,(Ef - E_c)}$$

$$R_f = \frac{E_f P}{\Omega E_c + \sigma\,(Ef - E_c)}$$

$$R_c = \frac{E_c P}{\Omega E_c + \sigma\,(Ef - E_c)}$$

étaient compensés par un contrepoids. Le rapport des bras de levier étant de $\frac{1}{20}$, 1 litre d'eau exerçait au milieu de la poutre un effort de 20 kilogrammes. Les flèches étaient indiquées au dixième de millimètre par un index relié à l'axe de rotation du levier et se déplaçant le long d'une échelle graduée. Lorsque cet index arrivait à fin de course, on pouvait le ramener au zéro à l'aide d'un vérin qui relevait l'étrier. Un double décimètre installé en vernier permettait d'ailleurs de contrôler ces indications.

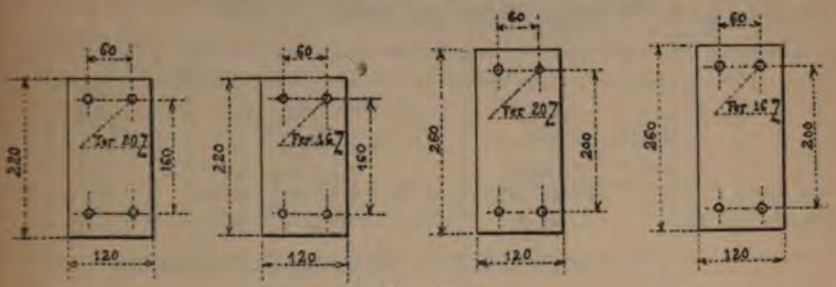


Fig. 197

Un observateur lisait les charges décelées par un niveau d'eau en communication avec le récipient, un autre les flèches indiquées au même moment par l'index. Enfin un dessinateur traçait sur un diagramme à grande échelle préparé à l'avance, la courbe des déformations au fur et à mesure des deux lectures simultanées ci-dessus. La figure 198 représente un des diagrammes ainsi tracés.

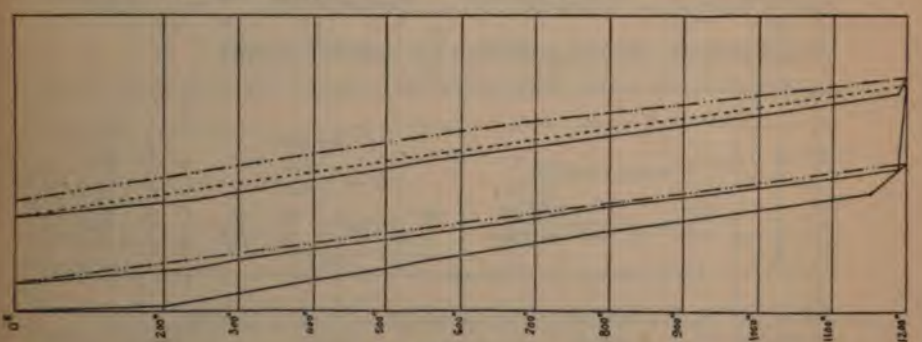


Fig. 198

Grâce à ces dispositions, il était facile de diminuer graduellement les charges jusqu'à zéro à tout moment (en ouvrant le robinet de vidange du récipient et de tracer ainsi une série de courbes des dé-

formations tant à la charge qu'au déchargement. Le diagramme 195 relatif à la poutre n° 2 donne une idée de ces courbes élastiques; les traits pleins représentent les périodes d'accroissement et les traits interrompus celles de décroissance des charges.

Voici les résultats obtenus pour ces 4 poutres :

Poutre n° 1. — Mortier de 500 kilogrammes de ciment Portland par mètre cube de sable, âgé de 1 mois, section 220 × 120, armée de 4 barres de 20 millim. — $I = 0{,}0000071768$ — $\frac{I}{v} = 0{,}00008981$. Poids propre : 60 kilogrammes par mètre courant.

Charges au milieu	Flèches calculées $f = \frac{Pl^3}{EI} = \frac{P \times \overline{6{,}50}^3}{48 \times 20 \times 7177}$	Travail fictif $R = \frac{M}{I : v} = \frac{\frac{1}{8} \times 70^k \times \overline{6{,}50}^2 + \frac{P}{4} \times 6{,}51}{87{,}71}$	Flèche observée	Travail réel calculé d'après la flèche observée en rapport avec la flèche calculée.
100k	3mm,98	5k,93	1mm,30	1k,93
300	11 ,94	9 ,56	7 ,00	5 ,60
350	13 ,93	10 ,46	8 ,30	6 ,21
1300	51 ,74	27 ,66	32 ,40	17 ,30
1800	71 ,64	36 ,71	62 ,10	31 ,80

Poutre n° 2. — Mortier de 500 kilogrammes de ciment Portland par mètre cube de sable, âgé de 1 mois, section 220 × 120, armée de 4 barres de 16 millim. ; $I = 0{,}00000469368$; $\frac{I}{v} = 0{,}000058671$. Poids propre : 66 kilogrammes par mètre courant.

Charges au milieu	Flèches calculées $\frac{Pl^3}{EI} = \frac{P \times \overline{6{,}50}^3}{48 \times 20 \times 4694}$	Travail fictif $R = \frac{M}{I : v} = \frac{\frac{66}{8} \times \overline{6{,}50}^2 + \frac{P}{4} \times 6{,}50}{58{,}7}$	Flèche observée	Travail réel calculé d'après la flèche observée en rapport avec la flèche calculée.
140k	8mm,5	9k,80	0mm,35	0k,46
500	30 ,4	19 ,70	11 ,00	7 ,42
600	36 ,6	22 ,50	14 ,80	9 ,10
890	54 ,25	30 ,50	26 ,00	14 ,60
1150	70 ,00	37 ,70	32 ,40	17 ,40

Poutre n° 3. — Mortier de 500 kilogrammes de ciment Portland par mètre cube de sable, agé de 5 mois ; section 260 × 120, armée de 4 barres de 20 millimètres ; $I = 0{,}000011452$; $\frac{I}{v} = 0{,}00011452$. Poids propre : 80 kilogrammes par mètre courant.

Charges au milieu	Flèches calculées $\frac{Pl^3}{EI} = \frac{P \times \overline{6{,}50}^3}{48 \times 20 \times 11452}$	Travail fictif $R = \frac{M}{I : v} = \frac{\frac{80}{8} \times \overline{6{,}50}^2 + \frac{P}{4} \times 6{,}50}{114{,}5}$	Flèche observée	Travail réel calculé d'après la flèche observée en rapport avec la flèche calculée.
220k	5mm,50	6k,80	3mm,0	3k,70
420	10 ,50	9 ,66	5 ,8	5 ,33
500	12 ,50	10 ,79	6 ,9	5 ,95
1709	42 ,725	27 ,96	30 ,0	19 ,60
1856	46 ,400	30 ,05	35 ,0	22 ,65

Poutre n° 4. — Mortier de 500 kilogrammes de ciment Portland par mètre cube de sable, âgé de 1 mois, section 260 × 120, armée de 4 barres de 16 millimètres ; $I = 0{,}0000074587$; $\frac{I}{v} = 0{,}000074587$.

Poids propre : 75 kilogrammes par mètre courant.

Charges au milieu	Flèche calculée $\frac{Pl^3}{EI} = \frac{P \times \overline{6{,}50}^3}{48 \times 20 \times 7459}$	Travail fictif $R = \frac{M}{I : v} = \frac{\frac{75}{8} \times \overline{6{,}50}^2 + \frac{P}{4} \times 6{,}50}{74{,}6}$	Flèche observée	Travail réel calculé d'après la flèche observée par rapport à la flèche calculée.
100k	3mm,83	7k,49	1mm,0	1k,95
200	7 ,66	9 ,67	3 ,2	4 ,02
850	32 ,55	23 ,84	19 ,6	11 ,80
1550	39 ,36	39 ,10	50 ,0	33 ,00

Si l'on admet un travail fictif de 15 kilogrammes pour de telles poutres, le moment maximum des forces sollicitant la poutre (1) était de

$$\frac{P \times 6.50}{4} + \frac{70 \times 6{,}50^2}{8} = 1{,}425\ P + 370 = R\,\frac{I}{v_1}.$$

d'où

$$P = \frac{15 \times 87,71 - 370}{1,425} = 662 \text{ kilogrammes.}$$

La poutre s'est rompue à 1 800 kilogrammes, le coefficient de sécurité ressort donc à $\frac{1\,800}{6,62} = 2,72$, et la flèche réelle, interpolée étant de 16,4, le rapport $\frac{f}{l} = \frac{16,4}{6\,500} = \frac{1}{400}$ environ.

On a de même pour la poutre (2)

$$P = \frac{15 \times 58,7 - 348}{1,425} = 374 \text{ kilogrammes.}$$

La poutre s'est rompue à 1 150 kilogrammes, le coefficient de sécurité ressort donc à $\frac{1\,150}{374} = 3,07$ et la flèche réelle interpolée étant de 7,25, le rapport $\frac{f}{l} = \frac{7,25}{6\,500} = \frac{1}{900}$ environ.

Pour la poutre (3),

$$P = \frac{15 \times 114,5 - 422^{k},5}{1,425} = 906 \text{ kilogrammes.}$$

La poutre s'est rompue à 1 856 kilogrammes, le coefficient de sécurité ressort donc à $\frac{1\,856}{906} = 2,05$ et la flèche réelle interpolée étant de 14,65, le rapport $\frac{f}{l} = \frac{14,65}{6\,500} = \frac{1}{450}$ environ.

Pour la poutre (4),

$$P = \frac{15 \times 74,6 - 396}{1,425} = 596 \text{ kilogrammes.}$$

La poutre s'est rompue à 1 550 kilogrammes, le coefficient de sécurité ressort donc à $\frac{1\,550}{596} = 2,61$, et la flèche réelle interpolée étant de 13,2, le rapport $\frac{f}{l} = \frac{13,2}{6\,500} = \frac{1}{500}$ environ.

Analysons de plus près les résistances de ces poutres :

Poutre 1, de 12 × 22, armée symétriquement de 2 ronds de 20, section 6, 28, dont les axes étaient à 3 centimètres des faces extrêmes. Poids propre : 70 kilogrammes par mètre. Prévue pour une surcharge au milieu de la portée de $6^m,50$ de 662 kilogrammes, s'est rompue sous une charge de 1 800 kilogrammes.

$$u = \frac{3}{22} = 0,136$$

$$p = p' = \frac{6.28}{12 \times 22} = 2,38$$

$$M = 662 \times \frac{6.50}{4} + 70 \times \frac{6.50^2}{8} = 1\,446 \text{ kilogrammètres}$$

$$m = \frac{1\,446}{0,12 \times 22^2} = \frac{1\,446}{58,08} = 24,90.$$

La formule relative aux poutres symétriquement armées donnait droit à

$$m = \left[0,148 + (0,194 - 0,607 \times 0,136)\ 2,38\right] R_c$$

ou

$$m = 0,412 R_c$$

d'où

$$R_c = \frac{24,90}{0,412} = 60^{kg},43.$$

La charge de rupture 1800 kilogrammes donnait un moment :

$$M = 1\,800 \times \frac{6,5}{4} + 70 \times \frac{6.5^2}{8} = 3\,295$$

$$m = \frac{3295}{58,08} = 56,73$$

$$R_c = \frac{56,73}{0,418} = 138 \text{ kilogrammes.}$$

D'après les théories ci-dessus développées, la surcharge normale de cette poutre était donc loin d'atteindre 662 kilogrammes. Elles sont confirmées puisque le moment de rupture aurait dû sans cela atteindre 4 × 1 446 = 5 784 kilogrammètres alors qu'il

n'a atteint que 3 295 kilogrammètres. Le coefficient de sécurité de 4 à la rupture aurait été réalisé, pour une résistance normale de

$$\frac{3\,295}{4} = 824 \text{ kilogrammètres,}$$

qui aurait donné un

$$R_c = 60{,}43 \times \frac{824}{1\,446} = 34{,}20.$$

Le déchet trouvé sur $R_c = 47^{kg}{,}50$ doit résulter de l'âge du béton qui a rompu à 138 kilogrammes, au lieu de 180, sans cela on aurait eu

$$R_c = 34{,}20 \times \frac{180}{138} = 44^{kg}{,}60.$$

Poutre II. — Equarissage 12 × 22, symétriquement armée de 2 ronds de 16 millimètres, section 4 centimètres carrés ; distance des axes des armatures aux faces extrêmes : 3 centimètres. Poids propre 66 kilogrammes. Prévue pour une surcharge de 374 kilogrammes au milieu de la poutre sur une portée de $6^m{,}50$. Charge de rupture 1 150 kilogrammes.

$$u = \frac{3}{20} = 0{,}150$$

$$p = p' = \frac{400}{12 \times 20} = 1{,}67$$

$$M = 374 \times \frac{6{,}50}{4} + 66 \times \frac{6{,}50^2}{8} = 643 \text{ kilogrammètres}$$

$$m = \frac{643}{0{,}12 \times 20^2} = \frac{643}{48} = 13{,}40.$$

Nous trouvons

$$m = [0{,}148 + (0{,}194 - 0{,}607 \times 0{,}150)\,167]\,R_c$$

$$m = 0{,}220\,R_c$$

$$R_c = \frac{13{,}40}{0{,}220} = 60 \text{ kilogrammes.}$$

La surcharge de rupture a pour moment

$$M = 1\,150 \times \frac{6.50}{4} + 66 \times \frac{\overline{6.50}^2}{8} = 1\,904 \text{ kilogrammètres,}$$

$$m = \frac{1\,904}{32,72} = 62$$

$$R_c = \frac{62}{0,220} = 282 \text{ kilogrammes.}$$

Poutre III. — Equarrissage 12 × 26, symétriquement armée de 2 ronds de 20 millimètres, section 6,28, distance des axes aux faces extrêmes 3 centimètres. Poids propre : 80 kilogrammes. Prévue pour une surcharge de 906 kilogrammes, au milieu de la poutre, sur une portée de $6^m,50$. S'est rompue sous une surcharge de 1 856 kilogrammes.

$$u = \frac{3}{26} = 0,115$$

$$p = p' = \frac{6,28}{12 \times 26} = 2.01$$

$$M = \frac{906 \times 6,50}{4} + \frac{80 \times \overline{6,50}^2}{8} = 1\,514 \text{ kilogrammètres}$$

$$m = \frac{1\,514}{0,12 \times \overline{26}^2} = \frac{1\,514}{81,12} = 18,66.$$

Nos formules donnent

$$m = \left[0,148 + (0,194 - 0.607 \times 0,115)\ 2,01\right] R_c$$

$$m = 0,397\, R_c$$

d'où

$$R_c = \frac{18,66}{0,397} = 47 \text{ kilogrammes.}$$

La surcharge normale aurait été bien prévue.

La surcharge de rupture : 1 856 kilogrammes, a eu pour moment

$$\frac{1\,856 \times 6,50}{4} + \frac{80 \times \overline{6.50}^2}{8} = 3\,058 \text{ kilogrammes}$$

$$m = \frac{3\,058}{81,12} = 37,69$$

$$R_c = \frac{37,69}{0,397} = 94,92$$

Cette résistance si faible à la rupture, montre que le n'avait pas eu le temps de durcir dans cet échantillon d'un mois.

Poutre IV. — Equarrissage : 12 × 26 symétriquement ar 2 ronds de 16 millimètres, section 4 centimètres carrés. D des axes des armatures aux faces extrêmes, 3 centimètres propre, 75 kilogrammes. Surcharge normale prévue, 5 grammes. Surcharge de rupture 1 550 kilogrammes.

$$u = \frac{3}{26} = 0,115$$

$$p = p' = \frac{4,00}{12 \times 26} = 1,28.$$

$$M = \frac{596 \times 6,50}{4} + \frac{75 \times 6,5^2}{8} = 1\,008 \text{ kilogrammè}$$

$$m = \frac{1\,008}{0,12 \times 26^2} = \frac{1\,008}{81,12} = 12,40.$$

Nos formules donnent

$$m\left[0,148 + (0,194 - 0,607 \times 0,115)\ 1,28\right] R_c$$
$$m = 0,307\, R_c$$

d'où

$$R_c = \frac{12,40}{0,307} = 40^{kg},35.$$

La surcharge prévue était modérée.

La surcharge de rupture : 1 550 kilogrammes a pour mo

$$\frac{1\,550 \times 6,50}{4} + \frac{75 \times 6,5^2}{8} = 2\,559$$

$$m = \frac{2\,559}{81,12} = 31,54$$

$$R_c = \frac{31,54}{0,307} = 102^{kg},73.$$

Comme dans les exemples précédents I et III, la résist béton a été faible, vu son âge d'un mois.

Cᵉ du Jura-Simplon — Révision de 1894

LIGNE de BERNE-LUCERNE

PROCÈS-VERBAL

DES

18 Octobre

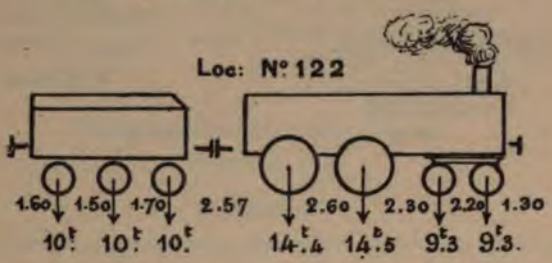
(141) Épreuves du pontceau en béton en gare de Viggen, au kilomètre 48 + 168

Travée unique

Ouverture libre . . . 2ᵐ,00
Portée théorique . . . 2ᵐ,40
D'axe en axe des poutres. (dalle).
Hauteur des poutres. . 0ᵐ,25

Type des poutres : dalle en béton de ciment armé (système Hennebique).
Pont : droit.
Rayon de la voie : alignement.
Voie de manœuvre en palier.

Composition du train d'essai



Inflexions

	Sous le rail à gauche		Sous le rail à droite	
1° Train au repos	0ᵐᵐ,15 mm. S	1 : »	0ᵐᵐ,15 mm. E	1 : »
2° Train en marche (vitesse 30 km.).	0ᵐᵐ,15 mm. S	1 : 16000	0ᵐᵐ,15 mm. E	1 : 16000
Flèches permanentes	»	1 : »	»	1 : »

Oscillations latérales

	Membrures		Membrures	
	supérieure	inférieure	supérieure	inférieure
Vitesse du train (30 kilomètres) .	»	»	»	»

OBSERVATIONS

Les observations ont été faites au moyen de coulisses; en outre, un appar multipliant cinq fois les déformations était installé sous la voie.

A $1^m,50$ du rail, vers la gauche, le milieu de la dalle s'infléchissait de $0^{mm},1_{Sp}$
A $1^m,50$ » la droite » » » de $0^{mm},0_E$

Toutes les déformations sont élastiques, la dalle ne présentait aucune fissu visible. — La dalle en béton sur rails de la voie n° 1 ne s'infléchit pas sous même charge. Il y a un joint de rail sur la dalle Hennebique.

Remarque. — Le nom des opérateurs est indiqué en regard de chaque lectu par l'initiale inscrite à côté de la signature.

Wiggen, le 18 octobre 1894.

Pour le Département des Postes et des Chemins de fer:

L'ingénieur du contrôle des ponts,

Signé :

S. SCHULE.

Pour le constructeur,

Signé :

S. de MOLLINS.

Pour la Compagnie,

L'ingénieur de section,

Signé :

Sp. A. SPICHER.

L'ingénieur des ponts,

Signé :

E. ELSKES.

Chemins de fer du Jura-Simplon

LIGNES de Lausanne-St-Maurice et St-Gingolph-Brigue

PROCÈS-VERBAL DES

Révision de 1897

(142) Épreuves du pont P. I. de l'Abbaye à St-Maurice au kilomètre 0 + 247

Travée unique

Ouverture libre : droite. . .	2m,64
» » biaise. . .	3m,50
Portée théorique : droite. . .	3m,14
Hauteur de la dalle.	0m,30

Type des poutres : dalle en béton de ciment armé (système Hennebique).
Pont : biais, angle 41°11'.
Rayon de la voie : alignement.
Voie de gauche : palier (ligne de Lausanne St-Maurice).
N.-B. — La voie de droite identique se trouvant coupée tout près du pont, n'a pas pu être essayée.

Composition du train d'essai

(*comme p.* 609)

Inflexions

	Poutre à gauche	Poutre à droite
1° Train au repos	»	»
2° Train en marche (vitesse 2 km. à l'heure). .	$\frac{1}{5}$ mm. E.O.	$\frac{1}{5}$ mm. E.
	(1 : 15700)	
Flèches permanentes	»	»

Oscillations latérales

	Membrure		Membrure	
	supérieure	inférieure	supérieure	inférieure
Vitesse du train (km.). . .	»	»	»	»

OBSERVATIONS

Le béton a été gâché le 5, VIII, 97, en présence des soussignés et laissé jusqu 5 courant à l'abri de toute surcharge. Près des appuis, l'inflexion est nulle. l cotes de $\frac{1}{5}$ mm. inscrites ci-dessous sont imperceptibles à l'œil, elle ont appréciées au toucher, à l'aide de lattes rabotées.

Remarque. — Le nom des opérateurs est indiqué en regard de chaque lectu par l'initiale inscrite à côté de la signature.

Saint-Maurice, le 6 novembre 1897.

Pour la Compagnie :

L'Ingénieur-Chef du Bureau des Ponts,
Signé :
E. ELSKES.

Les Ingénieurs de section,
Signé :
O. ORPIZEWSKI. G. D. GAI

Chemin de fer du Jura-Simplon — Jura-Simplon-Bahn

Ligne (Linie) Lausanne-Genève

Révision de (Untersuchung von) 21 mars 1898

(143) PROCÈS-VERBAL DES ÉPREUVES

PROTOKOLL DER PROBEBELASTUNGEN

Du (der Brücke) P. J. du Creux du Mas au kilomètre (bei kilomètre) 27 + 097

Travée unique — Œffnung

Ouverture libre (biaise) . . .	4m,25	Type des poutres / Art. der Träger	béton armé de fe / système Hennebique
Lichte Weite »	»	Pont (biais) Angle	24°20'
Portée théorique.	4m,40	Brücke » Winkel von	»
Theoretische Stützweite	»	Rayon de la voie	Alignement à
D'axe en axe des poutres. . .	1m,80	Halbmesser des Geleisebogens	» Centrum
Von Mitte zu Mitte der Träger	»	Voie	double en pente de 10 % vers Lausanne
Hauteur des poutres (hs). . .	0m,57	Geleise	» im Gefälle von » gegen »
Höhe der Träger »	»		

Composition du train d'essai

Zusammensetzung des Belastungszuges

(*comme p.* 609)

Inflexions — Einsenkungen

	Voie de gauche Linksseitiges Gleis (côté lac)		Voie de droite Rechtsseitiges Gleis (côté montagne)	
	Poutre aval	Poutre amont	Poutre aval	Poutre amont
1° Train au repos	0mm,05	0mm,09	»	0mm,08
Zug in Ruhe	»	»	»	»
2° Train en marche, vitesse 5 kilomètres	0mm,06	0mm,09	0mm,10	0mm,10
Zug in Bewegung, Geschwindigheit 60 km.	0mm,11	0mm,13	0mm,09	0mm,13
Flèches permanentes	»	»	»	»
Bleibende Eisenkungen	»	»	»	»

Oscillations latérales — Seitliche Schwankungen

	Membrure — Gurtung		Membrure — Gurtung	
	supérieure obere	inférieure untere	supérieure obere	inférieure untere
Vitesse du train km. .	»	»	»	»
Geschwindigkeit des Zuges »	»	»	»	»

Nota. — Neben jeder Ablösung ist der Name des Beobachters durch seiner Unterschrift eingeschriebenen Buchstaben angegeben.

Rolle, le (den) 21 Mars 1898.

Pour le Département des Postes
et des Chemins de fer
Für das Post und Eisenbahnen Departement :

L'ingénieur du contrôle des ponts,

Signé :

SCHULE.

L'ingénieur assistant,

Signé :

ROCHAT R.

Pour la Comp
Für die Bahngese

Signé :

ELSKES

L'ingénieur de

Signé :

E. PAS

Les Constructeurs (Die Brückenbauer) :

L'Agent général de M. Hennebique,

Signé :

S. de MOLLINS.

Le Concessionnaire,

Signé :

André FERRARI.

Chemin de fer du Jura-Simplon

LIGNE de Sonceboz-Chaux-de-Fonds

Révision de 1900 — 21 novembre

PROCÈS-VERBAL

DES

(144) Epreuves du Pont P. I. de la rue du Gaz à St-Imier, au kilomètre 62 + 541.

Travée unique

Ouverture libre.	4m,800	Type des poutres : en béton de ciment armé (Système Hennebique)
Portée théorique.	5m,000	Pont : droit.
D'axe en axe des poutres. .	1m,512	Rayon de la voie : les voies sont légèrement biaises par rapport aux poutres.
Hauteur des poutres 0m,500 à 1m,050.		Voie : en palier. Alignement.

Composition du train d'essai (v. p. 609)

	A_R	B_D	C_D	D_R
Train au repos.	0, 08mm.	0,06mm.	0,06mm.	0,04mm.
Train en marche (10 kilomètres)	0, 08mm.	0,06mm.	0,06mm.	0,04mm.
Flèches permanentes nulles (40 kilomètres).	0,075mm.	0,07mm.	0,06mm.	0,04mm.
Frain sur les voies IV et V		1	2	3

Observations

Les flèches ont été mesurées à l'aide d'enregistreurs Rabut, les amplifiant 20 fois.

La surcharge sur une autre voie que celle située verticalement au-dessus de la poutre ne donnait pas d'inflexion appréciable à l'appareil.

Remarque. — Le nom des opérateurs est indiqué en regard de chaque lecture par l'initiale inscrite à gauche de la signature.

Saint-Imier, le 21 novembre 1900.

Pour le département des Postes et des Chemins de fer,
L'Ingénieur du Contrôle des Ponts,
Signé :
STETTLER.

Le Constructeur,
Signé :
Adolphe RYCHNER, Entrepreneur.

L'Ingénieur de section,
Signé :
Albert STEIGER, ingénieur.

Pour la Compagnie,
L'Ingénieur des Ponts,
Signé :
ELSKESS.

Les Ingénieurs assistants,
Signé :
R A. ROBERT,
D H. DUMUR.

VILLE DE LAUSANNE

(145) Construction d'un Plancher en Béton de ciment armé

(SYSTÈME HENNEBIQUE)

Sur les Caves du Burignon

PROCÈS-VERBAL DE RÉCEPTION

En exécution de la convention du 21 juin 1894,

Les soussignés ont procédé à l'épreuve de réception du Plancher en Béton de ciment armé, construit sur la Cave du Burignon, destiné à porter les pressoirs. Les essais ont été commencés à 10 heures du matin et terminés à 3 heures, le 10 novembre 1894.

La charge prévue était de 10 000 kilogrammes sur une poutre, et la tolérance de flexion de 12 millimètres.

Il a été placé environ 9 mètres cubes de terre et de pierres cassées, représentant un poids de 14 000 kilogrammes, au milieu de l'une des poutres désignées par l'architecte, savoir la troisième depuis la face ouest.

La flexion constatée a été de un demi millimètre ; aucune fissure de retrait ou autre, ni aucune trace de fatigue n'ont été remarquées.

La pose immédiate des pressoirs a donc été ordonnée.

En foi de quoi a été dressé le présent Procès-Verbal.

Lausanne, le 10 Novembre 1894.

L'Architecte de la Ville,
Signé :
HENRI GRENIER.

L'Entrepreneur,
Signé :
ALEXANDRE FERRARI.

Pour le Constructeur,
Signé :
S. de MOLLINS, ingénieur.

NOTA. — 3 pressoirs pèsent 45 000 kilogrammes ; la portée est de 6 mètres ; l'épaisseur du hourdis 0m,15 ; la hauteur des poutres 0m,50. Les trois pressoirs ont été placés le 30 novembre sans aucune difficulté.

CHAPITRE IV

—

BÉTON FRETTÉ. (Système Considère) [1].

146. — Quoique les plus importantes applications du béton armé aient été faites dans les poutres et les planchers travaillant par flexion, ce nouveau matériau a été employé également avec succès dans les pièces soumises à des efforts de compression et il est intéressant de rechercher s'il ne peut pas être amélioré à ce point de vue.

Armatures longitudinales. — L'armature la plus usitée pour les pièces comprimées se compose de barres longitudinales réunies, de distance en distance, par des entretoises ou des liens métalliques de forme quelconque. En multipliant ces liens et en leur donnant une résistance suffisante, on arrive graduellement au frettage du béton qui constitue le procédé spécialement étudié dans cette note. On ne saurait rien dire de général sur les combinaisons multiples qu'on peut ainsi réaliser et, avant de les étudier, il faut considérer le cas simple du béton armé seulement de barres longitudinales.

On sait qu'exposé à l'air, le béton tend à prendre des retraits importants qui le mettent en tension dans les pièces armées et imposent des compressions aux barres métalliques. On a constaté récemment, au laboratoire de l'Ecole des Ponts et Chaussées, des pressions comprises entre $4^{kg},60$ et 10 kilogrammes dans des poutres ayant 2 à 4 mètres de longueur et des sections d'un à 8 décimètres carrés dont le béton renfermait la quantité habi-

[1] Ce chapitre est complètement emprunté à un extrait d'une note de M. Considère publié dans le journal *Le Ciment* de novembre 1902.

tuelle de 300 kilogrammes de ciment par mètre cube mis en œuvre.

La pression que fournit une armature dont le coefficient d'élasticité est E, lorsque la pièce qui la renferme a subi un raccourcissement i, est donc égale non pas à Ei comme on l'admettait généralement, mais à Ei augmenté de la pression préalable et importante qu'a produite le retrait. Il en résulte que les barres longitudinales prennent une large part des pressions qui sont imposées aux pièces comprimées dans les constructions armées, et que généralement la limite d'élasticité du métal y est atteinte avant la rupture par écrasement du béton.

Cette résistance ne peut pas être sensiblement dépassée, parce que le coefficient d'élasticité du métal subit une énorme diminution dès que la limite d'élasticité est atteinte, et par suite, les efforts qu'il produit, n'augmentent plus qu'avec une extrême lenteur et ne varient pas sensiblement par suite des faibles déformations que le béton peut encore supporter avant de s'écraser.

On peut dire, en résumé, que *dans les pièces armées de barres longitudinales réunies ensemble par des entretoises ou des liens trop faibles ou trop espacés pour fretter efficacement le béton, la résistance totale à l'écrasement s'écarte peu de la somme de la résistance à l'écrasement du béton et de la résistance fournie par les armatures longitudinales travaillant à la limite d'élasticité du métal.*

Pendant la période élastique du début, le métal comprimé d'avance par la tendance du béton au retrait produit des résistances importantes.

Armatures transversales. — L'idée d'employer des armatures transversales de forme quelconque, a été exprimée, dès l'année 1892, par MM. Koehnen et Wayss, puis par M. Harel de la Noë qui a expliqué théoriquement l'utilité des armatures transversales rectilignes et en a fait et inspiré de très intéressantes applications.

L'auteur a expérimenté l'emploi de treillis orthogonaux et de toiles métalliques et a obtenu ainsi des résultats supérieurs à ceux que donnent les armatures longitudinales, mais inférieurs de près de moitié à ceux du frettage. Il a cru devoir, en conséquence, réserver toutes ses études ultérieures à ce dernier mode de consolidation du béton.

Cause des effets du frettage. — Les deux idées qui ont conduit à ces recherches, permettront de donner aux conclusions une forme facilement intelligible. Il importe donc de les formuler.

Le sable enfermé dans des boîtes de faible résistance est souvent employé sous les cintres pour supporter des charges très lourdes et une formule connue de la poussée des terres explique ce fait qui est la conséquence du frottement développé entre les grains de sable.

Si P représente la pression par centimètre carré qu'on exerce sur la base supérieure d'un cylindre vertical formé d'une matière sans cohésion dont l'angle de frottement est égal à f, et dont le poids est négligeable en regard des pressions extérieures, on sait que pour empêcher l'écrasement, il faut appliquer sur la surface latérale une pression par centimètre carré $\frac{P}{K}$, K étant égal à $\frac{1}{\text{tang}^2 \frac{f}{2}}$.

L'expérience a prouvé que, pour le sable, la valeur de K est égale à 4,8 et on en déduit, par un calcul élémentaire, que le métal donne une résistance 2, 4 fois plus forte si on l'emploie à fretter du sable que s'il supporte directement la pression.

D'autre part, un tube métallique de 19 centimètres de diamètre ayant été ployé par les vagues suivant un rayon de 55 centimètres, on a constaté que le ciment dont il était rempli, n'était pas désagrégé. Il était donc probable que le béton conservant sa cohésion dans les déformations qu'il subirait à l'abri des frettages, ajouterait sa résistance propre à celle que produit le frottement et il était, en tout cas, certain que le béton fretté présenterait, quelle que fût sa qualité, le minimum de résistance déjà très élevé que possède le sable fretté. L'expérience seule pouvait éclaircir davantage la question.

Recherches expérimentales. — Dans les premières expériences qui ont été faites à Quimper, de petits cylindres de 40 millimètres de diamètre où le pourcentage en volume du métal employé en frettes était de 0,020 — 0,034 — 0,035 — 0,040 ont supporté des pressions en centimètre carré dépassant la résistance propre du mortier de quantités égales aux résistances d'armatures longitudinales dont le poids serait égal à celui du frettage multiplié par 2,6 — 3,0 — 2,0 — 2.1.

L'augmentation de résistance que le frettage a donnée au mortier, a donc été voisine, en moyenne, de la résistance totale que le même frettage donnerait au sable sans cohésion et dont le coefficient, on vient de le voir, serait 2,4.

Le seul de ces prismes qui fût formé de mortier ayant fait une prise complète, a donné une résistance à l'écrasement de 740 kilogrammes par centimètre carré de section totale. En tenant compte de ce fait que la densité de ce cylindre était 3,2 fois plus faible que celle du fer, on reconnaît qu'un prisme du même mortier qui aurait le même poids qu'un prisme de fer d'un centimètre carré de section, supporterait $740 \times 3{,}2 = 2370$ kilogrammes. C'est presque la résistance des constructions rivées qu'affaiblissent les trous de poinçon.

Un cylindre de mortier à faible dosage fretté au médiocre pourcentage de 0,034 avait donc une résistance peu différente de celle que donnerait une pièce rivée de même poids. C'est assurément un fait digne d'attention.

Une seconde série d'expériences a été faite à Paris sur des prismes de 150 millimètres de diamètre formés de béton renfermant, en général, 300 et quelquefois 450 ou 600 kilogrammes de ciment pour $0^{mc},800$ de gravier de 5 à 25 millimètres et $0^{mc},400$ de sable tamisé à 5 millimètres. Ces prismes avaient été fabriqués par les soins de M. Hennebique. Leurs déformations ont été mesurées et ont permis de déterminer les propriétés élastiques du béton fretté.

Ductilité. — On a expérimenté concurremment des prismes frettés et des prismes du même béton non armés ou armés de barres longitudinales réunies, de distance en distance, par des liens ou ceintures en fil de fer suivant un type très répandu dans les constructions.

On a constaté, à nouveau, dans tous les prismes frettés, la grande supériorité de résistance qu'avaient dénotée les expériences de Quimper et on a reconnu qu'ils présentaient une supériorité plus grande encore au point de vue de la ductilité et de la sécurité.

Tandis que le béton non armé ou armé de barres longitudinales insuffisamment reliées par des ceintures trop espacées transver-

salement, s'est brisé sans que rien l'annonçât et avec des raccourcissements très faibles qui, dans les essais en question, n'ont pas dépassé $1^{mm},03$ par mètre, le béton fretté a supporté, avant de s'écraser, des raccourcissements, au moins, 20 ou 30 fois plus grands. L'écaillement de la couche extérieure au frettage qui ne joue, dans la résistance, qu'un rôle presque négligeable, a annoncé le commencement de grandes déformations lorsque la charge a atteint une limite égale ou inférieure à la moitié de la charge de rupture.

On a constaté des faits plus surprenants encore dans les pièces qui ont péri par flambement. Ainsi un prisme de 15 centimètres de diamètre a pris, sous la pression de 557 kilogrammes par centimètre carré, une flèche de 10 millimètres mesurée sur une longueur de 330 millimètres dont la courbure était si inégalement répartie qu'on doit évaluer à $0^{m},60$ seulement le rayon de courbure de la partie la plus déformée. Il est probable que bien peu de pièces rivées ayant le même diamètre de 15 centimètres pourraient supporter, sans se briser, une courbure aussi grande.

Le béton fretté doit donc prendre place dans la série des matériaux de construction, non pas à côté des maçonneries et du béton armé longitudinalement, qui sont fragiles, mais près des métaux ductiles.

Propriétés élastiques. — Dans les pièces comprimées, la résistance au flambement est proportionnelle au coefficient d'élasticité. Par suite, il importe d'étudier ce coefficient et la limite d'élasticité à partir de laquelle il subit une diminution considérable.

On observe d'abord que tandis qu'on obtient une résistance à l'écrasement très satisfaisante, même avec des frettes assez éloignées les unes des autres, la limite et le coefficient d'élasticité n'ont des valeurs élevées que si les frettes, combinées avec des armatures longitudinales appuyées contre leur surface intérieure, ont des écartements, d'axe en axe, voisins du 1/7 au 1/10 du diamètre. Il ne sera question désormais que de prismes remplissant cette condition. Tels n'étaient pas tous ceux qui ont été essayés à Quimper et dont plusieurs auraient donné des résistances plus grandes encore s'ils avaient été mieux établis, à ce point de vue.

Pendant le premier chargement, on a constaté de grandes diffé-

rences dans les coefficients d'élasticité de prismes de même composition qui ne différaient que par la proportion d'eau de gâchage et le soin apporté au pilonnage. La limite d'élasticité et la résistance à l'écrasement étaient presque indépendantes de ces circonstances de fabrication et variaient beaucoup, au contraire, avec le dosage de ciment qui influait peu sur le coefficient d'élasticité. Ces faits sont d'accord avec ceux qu'on observe dans le béton non armé.

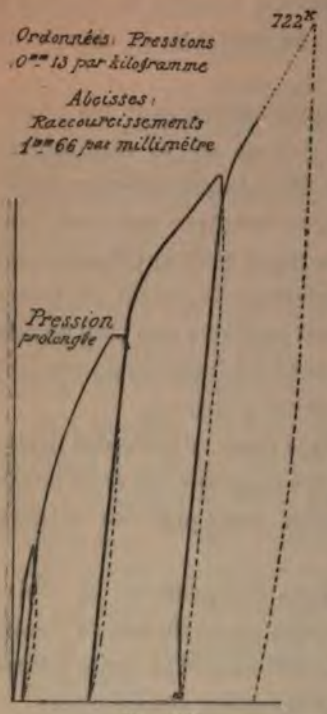


Fig. 199

Telles sont les constatations faites dans le premier chargement. Il importait d'étudier aussi les faits qui se produisent dans les déchargements et rechargements exécutés dans les limites d'une charge d'épreuve une fois subie, c'est-à-dire dans les conditions où se trouvent toutes les constructions.

On a observé les faits suivants que l'épure (fig. 199) rend sensibles aux yeux.

La limite d'élasticité s'élève jusqu'à la pression une fois subie, quelque forte qu'elle soit.

Le coefficient d'élasticité est augmenté de beaucoup dans les chargements et déchargements ultérieurs et présente un caractère particulier. Il est d'autant plus élevé que la pression est plus forte.

On s'en rendra compte en remarquant que les courbes de déchargement et rechargement tournent leur concavité vers l'axe des pressions tandis qu'elle est dirigée en sens opposé dans les courbes de premier chargement de tous les matériaux dont les propriétés sont connues.

L'élément dont dépend la résistance au flambement, augmente donc avec la charge tant qu'elle ne dépasse pas celle qui a été précédemment subie. C'est une circonstance exceptionnelle et éminemment favorable à la résistance.

Il importe d'ajouter que l'épreuve augmente l'élasticité du béton d'autant plus qu'elle était originairement moins satisfaisante. L'importance de la qualité du béton, qui est relativement faible dans le premier chargement des pièces frettées, par suite de la prédominance des effets du frottement sur ceux de la cohésion, est donc encore plus réduite après épreuve.

Essai d'analyse des faits au point de vue de l'élasticité. — On a cherché à séparer les effets du frettage et ceux de la cohésion, de manière à les mesurer directement. Sans rendre compte de cette étude délicate, on fera connaître les résultats qui semblent en découler.

Au début du chargement, le frettage ne serre pas réellement le noyau qu'il entoure, parce que le retrait de prise du béton a diminué le diamètre du noyau. Il agit donc alors moins vite que dans les déchargements et déchargements succédant à une charge d'épreuve qui a produit le contact énergique du béton et du frettage.

Cette observation explique le fait suivant.

L'augmentation du coefficient d'élasticité que produit le frettage, est égale à celle que donnerait un égal poids de métal employé en armatures longitudinales multipliée par 0,90 dans le premier chargement et par 2,00 dans les déchargements et rechargements après épreuve.

Le métal des frettes ne commence à se fatiguer que lorsque celui des armatures longitudinales est à bout de force. Ses déformations étant produites par le gonflement transversal qui est très inférieur au raccourcissement, sa fatigue progresse lentement après avoir commencé tard. C'est ainsi que s'expliquent les déformations énormes que le béton fretté peut supporter sans que le métal en souffre.

Résistance propre du béton fretté après épreuve. — On a enlevé complètement les armatures de plusieurs prismes frettés qui avaient subi de très fortes pressions et on a soumis les noyaux ainsi désarmés à des pressions croissantes. On a alors obtenu une nouvelle courbe de déformation du béton qui présente un caractère jamais encore observé.

Après avoir subi des variations qu'il est inutile d'analyser, le

coefficient angulaire de la tangente a diminué rapidement sous les fortes charges et a fini par devenir et rester égal à zéro.

En d'autres termes, la résistance du béton, après avoir augmenté longtemps avec la déformation, est devenue constante.

La résistance maximum ainsi atteinte par le béton à la suite de la compression subie sous le frettage a paru dépasser de 50 % environ la résistance normale des prismes témoins formés du même mélange et moulés sans armatures.

On remarquera l'analogie de ces faits et de ceux que l'auteur a depuis longtemps signalés dans le béton soumis à la traction.

Le rapprochement du premier et du dernier fait exposés dans ce résumé conduit à la conclusion suivante :

Le sable fretté a une grande résistance à l'écrasement qui est produite par le frottement. Le béton, qui a subi de grandes déformations sous la protection du frettage, conserve, après enlèvement des frettes une résistance supérieure à celle des prismes témoins.

La résistance à l'écrasement du béton fretté paraît voisine de la somme de ces deux éléments.

Règles de calcul. — L'étude analytique dont il a été rendu compte précédemment a permis de formuler les règles à suivre pour calculer le coefficient et la limite d'élasticité, ainsi que la résistance à l'écrasement d'une pièce de béton fretté de composition quelconque. On se bornera à dire ici que la résistance à l'écrasement dépasse la somme des trois éléments suivants :

1° Résistance propre à l'écrasement du béton ;

2° Résistance des armatures longitudinales travaillant à la limite d'élasticité ;

3° Résistance que produiraient, en travaillant à la limite d'élasticité, des armatures longitudinales fictives dont le volume serait égal à celui des frettes multiplié par 2,4.

Résistance au flambement. — La formule empirique de Rankine rend de bons services pour les matériaux de qualité sensiblement constante en vue desquels ses paramètres ont été calculés mais elle ne peut fournir aucune indication pour les matériaux d'élasticité variable.

On cite, comme preuve, deux aciers pour lesquels la formule de

Rankine donne la même valeur de la résistance au flambement alors qu'en réalité, elle diffère du simple au double.

Au contraire, la formule d'Euler donne, dans tous les cas, des valeurs exactes de la résistance au flambement, pourvu qu'on y attribue au coefficient d'élasticité E non pas la valeur qu'il a sous faible charge, mais celles à laquelle il est réduit quand la pression atteint la valeur N. Il est donc impossible de la résoudre sous sa forme habituelle

$$N = E\pi^2 \frac{r^2}{l^2},$$

mais, pour en tirer parti en vue de la formation de barèmes donnant les résistances au flambement de pièces de dimensions quelconques, il suffit de la mettre sous la forme

$$\frac{r}{l} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{N}{E}}.$$

l, représente la longueur des pièces entre articulations et r est le rayon de giration minimum de leur section transversale.

L'application numérique de cette formule a permis de constater qu'avec un dosage de 600 kilogrammes de ciment par mètre cube et un pourcentage total de métal de 0,05, les pièces frettées ont des résistances au flambement égales ou supérieures à 230 kilogrammes dans le premier chargement et à 450 kilogrammes après épreuve préalable, pourvu que leur longueur ne dépasse 27 diamètres dans le premier cas et 22 diamètres dans le second. Il est très rare qu'on soit amené à employer des formes plus grêles dans les constructions.

Coefficient de sécurité. — La marge de sécurité qu'on conserve entre les charges du travail et les efforts dangereux, doit être déterminée en tenant compte d'une foule d'éléments : possibilité d'erreurs de calcul, éventualité d'augmentation des charges, effets dynamiques, malfaçons, altérations par le temps et les intempéries, etc. On ne saurait trouver là les causes de l'énorme différence que les praticiens ont été conduits à admettre entre les valeurs attribuées au coefficient de sécurité dans les ouvrages métalliques et dans les constructions en maçonnerie. L'élément

le plus important à considérer a souvent échappé à l'attention ou, du moins, son importance sentie par tous les constructeurs expérimentés n'a pas été mise assez nettement en lumière. C'est la ductilité, c'est-à-dire la propriété que les matériaux possèdent, à un degré très différent, de subir des déformations sans que leur résistance soit compromise.

Dans toutes les constructions, les efforts dépassent, en certains points, les valeurs moyennes ou normales qui seules, peuvent être calculées. Parmi les causes de fatigue anormale, on doit signaler les difficultés de montage, de rivetage, de qualité et de serrage du mortier ou du béton, les mouvements des cintres, les inégalités de tassement des appuis et les écartements des piles et culées.

Si l'ouvrage est formé de matériaux très ductiles, ces irrégularités ne présentent aucun danger et le pis qui puisse arriver est le dépassement local de la limite d'élasticité qui ne présente aucun inconvénient dans ce cas, pas plus que dans le fil de fer dont la grande résistance est obtenue précisément par le dépassement de la limite d'élasticité du métal.

Au contraire, une déformation imposée à des matériaux qui ne sont pas ductiles cause un danger immédiat que rien n'annonce et qui peut entraîner la ruine soudaine.

Tandis que la maçonnerie et le béton armé de barres longitudinales sont des matériaux fragiles, le béton présente une ductilité égale à celle des constructions en métal rivé. Comme il paraît d'ailleurs l'emporter sur elles au point de vue de la résistance aux agents atmosphériques et aux effets dynamiques ainsi qu'à celui de la solidarité, il paraîtrait naturel d'adopter pour les constructions frettées, des coefficients de sécurité, par rapport à la limite d'élasticité, inférieurs à ceux de 2 et 2,5 qui résultent pour les ouvrages métalliques, de l'application du règlement du 29 août 1891.

Mais le béton fretté est un matériau nouveau et l'auteur propose d'adopter un coefficient de sécurité variant de 3 à 3,5 et même de le porter à 4 pour les premières applications. Il estime qu'en raison du peu d'importance des inconvénients que les malfaçons peuvent avoir dans les constructions frettées, on aura ainsi un surcroit considérable de sécurité, surtout si on les forme de tronçons éprouvés à l'atelier sous de fortes pressions.

Avec les coefficients de sécurité de 3 et 3,5, on arrive à prévoir des pressions de 66 à 77 kilogrammes pour les pièces non éprouvées et de 130 à 150 kilogrammes pour les pièces soumises préalablement à des pressions suffisantes.

Types de frettage. — On a vu plus haut que les frettes doivent être rapprochées les unes des autres pour produire tous les effets au point de vue du coefficient d'élasticité et de la résistance au flambement. Il est d'ailleurs évident qu'elles doivent être fermées de manière à ne pas s'ouvrir sous l'effort de la pression intérieure et que l'action exercée sur le béton par leurs assemblages ne doit pas ajouter une importante fatigue supplémentaire à l'effort principal de compression, surtout dans la région périphérique où rien n'empêche le béton d'éclater à l'extérieur.

Il semble que ces conditions ne peuvent être remplies convenablement que par l'emploi de fils ou barres de métal de grande longueur, enroulés en hélice dans le béton, à la profondeur nécessaire pour être à l'abri de l'action des agents extérieurs.

Pour assurer la continuité du frettage, il suffit que les dernières spires de chaque barre se recouvrent et que leurs extrémités soient repliées dans le noyau fretté suivant des diamètres. L'expérience a prouvé que par ce procédé si simple, on obtient une résistance absolument égale à celle des sections courantes.

Il va de soi qu'on peut varier la disposition des spires, les enrouler suivant un seul ou deux cylindres, dans le même sens ou en sens opposés, et les former d'un seul ou de plusieurs fils parallèles.

Les spires seront nécessairement façonnées et mises en place avant le bétonnage. L'ingénieur où le chef d'atelier pourra, d'un coup d'œil, les vérifier toutes et on sera sûr, par conséquent, d'avoir, quelle que soit la qualité du béton, le minimum considérable de résistance que forment les deux derniers des éléments énumérés dans le paragraphe intitulé « règles de calcul ».

Mode d'exécution. — Il n'y a rien à dire de particulier au sujet du mode d'exécution des petits ouvrages dans lesquels il n'y a pas grand intérêt à diminuer le poids mort. On peut procéder comme dans les constructions armées ordinaires. Diverses considérations conduisent, au contraire, à adopter le moulage vertical à l'atelier pour les éléments des constructions importantes.

Le moulage vertical permet de damer facilement et parfaitement le noyau entouré par les frettes sans que rien gêne la manœuvre du pilon et l'on sait que ce noyau a seul une réelle importance dans les pièces frettées.

Le moulage vertical assure la symétrie élastique qui est très favorable à la résistance au flambement et qu'il est pratiquement impossible d'obtenir dans les pièces moulées à plat.

En moulant, d'avance, à l'atelier les tronçons de membrures, on peut utiliser plusieurs fois les mêmes moules fabriqués avec soin et munis de taquets d'écartement des spires, employer un petit nombre d'ouvriers expérimentés sous la surveillance incessante d'un contremaître spécial et sous l'œil de l'ingénieur. On évite les inconvénients de la pluie et ceux de la sécheresse et on peut placer les pièces de béton dans les meilleures conditions hygrométriques pendant la prise. Enfin il est facile de refuser les tronçons douteux après examen, sondage au marteau, pesage et même épreuve sous des pressions dépassant celles de travail dans la limite qui parait opportune.

Ce mode d'exécution exige des manœuvres de lourds tronçons qui seront évidemment onéreuses, mais, en revanche, il réduit de beaucoup les frais de coffrages qui entrent, pour une part importante, dans le coût des constructions armées.

On serait porté à regretter la nécessité d'assembler les tronçons successifs des membrures. Les joints sont, en effet, une cause de danger dans les maçonneries par suite de la localisation des efforts agissant sur des matériaux qui n'ont pas la ductilité nécessaire pour les répartir sans danger, mais il n'y a rien de pareil à craindre pour le béton fretté qui possède une ductilité surabondante et qui peut recevoir presque sans frais, tel supplément de résistance qui paraîtra nécessaire près des joints. Pour le lui donner, il suffit de rapprocher davantage les spires aux extrémités des tronçons et, si on le juge utile, d'ajouter, après exécution du joint, une spire supplémentaire placée à cheval sur les extrémités des membrures.

Il est facile aussi d'assurer la transmission des tensions en vue des cas exceptionnels où il s'en produirait dans les armatures longitudinales. Les extrémités de celles d'un tronçon peuvent

être logées et scellées dans des tubes en fer noyés dans le béton des membrures contigues.

Il semble, en conséquence, que, dans les constructions frettées, les joints ne présentent aucun des inconvénients qu'on redoute dans les maçonneries et que pour les membrures à grande résistance, il y a lieu d'adopter l'exécution par tronçons moulés verticalement à l'atelier.

Nature des matériaux. — Dans les pièces travaillant par flexion, on emploie généralement un béton maigre renfermant environ 300 kilogrammes de ciment par mètre cube mis en œuvre et cette pratique paraît justifiée par la crainte des fissures dans les parties soumises à des allongements, par l'inutilité d'augmenter la résistance du béton tendu sur laquelle on ne compte pas dans les calculs et enfin par ce fait que la diminution des épaisseurs, corrélative de l'augmentation du dosage, réduit les moments de flexion.

Aucune de ces raisons d'écarter les dosages plus riches ne subsiste pour le béton comprimé et on est conduit à y employer 450 à 600 kilogrammes de ciment par mètre cube afin de relever la limite d'élasticité qui exerce une grande influence sur la résistance au flambement des pièces lorsqu'elles n'ont pas été soumises à une épreuve préalable.

Le béton fretté pouvant supporter, sans altération, des raccourcissements considérables, les armatures longitudinales qu'il renferme, travaillent avant l'écrasement à des pressions supérieures à leur limite d'élasticité quelqu'élevée qu'elle soit. Comme d'ailleurs le métal noyé dans le béton n'est exposé à aucun choc, ni écrouissage, pouvant y développer la fragilité, on a intérêt à former les armatures longitudinales du béton fretté d'acier aussi résistant que le permettent les nécessités de l'usinage.

Au contraire, l'allongement des frettes étant retardé par le retrait de prise du béton et ne se produisant qu'en vertu du gonflement latéral qui n'est guère que le tiers du raccourcissement longitudinal, il s'en faut de beaucoup que la limite d'élasticité du métal y soit atteinte dans la phase de déformation modérée qui présente un intérêt pratique. On peut, en conséquence, former les spires du métal dont l'emploi est le plus économique et le plus

facile. Le choix se portera sur le fer ou l'acier de qualité courante suivant les prix de ces deux métaux.

En général, le pourcentage de métal sera compris entre 0,01 et 0,02 pour les armatures longitudinales, il sera de 0,02 à 0,3 pour le frettage.

Prix de revient. — Il semble que le prix de revient doit être sensiblement le même pour des pièces de béton armé ou de béton fretté qui renferment les mêmes quantités des mêmes matières si l'on emploie, pour ces dernières, les procédés usuels de fabrication sans recourir aux perfectionnements qui ont pour but d'obtenir le maximum de qualité. Or, il résulte de ce qui précède que, formées des mêmes éléments, les pièces frettées auront plus de résistance que les pièces armées et, qu'en outre, la supériorité énorme de leur ductilité permettra de leur appliquer des coefficients de sécurité moins forts.

La comparaison précise de la somme de tous les éléments qui forment les prix de revient des constructions frettées et des ouvrages métalliques serait bien délicate parce qu'on n'a pas encore de bases certaines pour évaluer exactement les frais de montage, échafaudage, etc., qu'entraîneront les premières. En revanche, il est facile de mettre en regard du coût total des constructions métalliques, la dépense que l'emploi du béton fretté entraînera, en matières et en main-d'œuvre directe de fabrication.

La dépense en matières par mètre cube comprendra $1^{mc},20$ de sable et gravier valant 6 à 12 francs ; 450 à 600 kilogrammes de ciment valant 30 à 40 francs, $0^{mc},03$ à $0^{mc},06$ de métal pesant 23 à 46 kilogrammes et coûtant, façon comprise, 46 à 100 francs. La dépense en matières pourra donc varier de 82 à 152 francs. La fabrication et le pilonnage du béton coûteront 13 à 28 francs et porteront la dépense de 95 à 180 francs. Quoique ces prix limites soient largement comptés, on les a portés à 100 et 200 francs.

On a admis que les pressions respectives qui pourraient être imposées aux pièces ainsi fabriquées varieraient de 60 à 120 kilogrammes par centimètre carré et on a calculé que des pièces en fer rivé coûtant le prix minimum de 30 francs par 100 kilogrammes qui pourraient supporter la même pression qu'un mètre cube de béton fretté, coûteraient de 234 à 468 francs.

En résumé, le coût en matières et en main-d'œuvre de fabrication directe des pièces de béton fretté seraient environ les $\frac{100}{234}$ du coût total de pièces de fer rivé capables de supporter les mêmes pressions. Dans chaque cas, on devra examiner si la marge disponible de $\frac{134}{234}$ sera suffisante pour couvrir les dépenses de montage, les frais généraux, le bénéfice de l'entrepreneur et la majoration de résistance qui est nécessaire aux constructions en béton en raison de leur poids mort plus élevé.

Malgré les qualités remarquables du nouveau matériau qu'il a fait connaître, l'auteur conclut, non pas qu'il trouvera un emploi général dans les pièces comprimées mais qu'il rendra de sérieux services dans certains cas à déterminer et qu'il complètera une série graduée de matériaux comprenant la maçonnerie, le béton armé de barres longitudinales ou transversales, le béton fretté et la construction métallique, série dans laquelle il y a augmentation de résistance par unité de poids depuis le premier jusqu'au dernier terme et augmentation de ductilité jusqu'à l'avant-dernier.

On peut résumer brièvement les conséquences pratiques les plus importantes qui ressortent de cette étude :

Le béton fretté joint une grande résistance à une ductilité considérable. L'approche du danger est annoncée longtemps d'avance par des fissures superficielles qui ne compromettent pas la résistance.

Il est facile de vérifier avant le bétonnage, la façon et la mise en place des armatures.

Alors même que le béton aurait une qualité inférieure au minimum qu'on rencontre dans les plus mauvaises constructions, les pièces frettées présenteraient encore une résistance très supérieure aux charges de travail.

L'adhérence du béton au métal n'est soumise, pour ainsi dire, à aucune fatigue dans les pièces frettées travaillant par compression.

Le nouveau matériau échappe donc presque complètement aux dangers résultant, pour les constructions armées des types ordinaires, de l'influence considérable que les soins apportés à l'exécution exerce sur la résistance.

Comme tous les bétons armés, le béton fretté ne peut que résister bien et sans entretien aux intempéries et aux effets dynamiques.

Depuis la rédaction de la note dont ces lignes ne sont qu'un extrait, un pont d'essai construit à Ivry en béton fretté a complètement confirmé les prévisions de M. Considère.

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE . . . . . .

LIVRE I

CHAPITRE PREMIER

LE CIMENT — SES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

Pages

1. Définition 1
2. Réactions chimiques pendant la cuisson 2
3. Composition chimique 2
4. Indice et module d'hydraulicité 2
5. Conservation du ciment 3
6. Structure 3
7. Poids spécifique. Densité apparente 3
8. Finesse de mouture 4
9. Variations de volume 4
10. Dilatation 5
11. Perméabilité 5
12. Conductibilité électrique 6
13. Prise et durcissement 6
14. Elévation de température. Influence de la température et du chlorure de calcium 7
15. Rebattage 9
16. Action chimique de divers corps d'après F. W. Büsing et C. Schumann. 10
17. Coefficient d'élasticité 13
18. Résistance à la compression et à l'extension 14
19. Flexion 15
20. Cisaillement 16
21. Falsification des ciments 16
22 Vérification de la qualité 17
23. Essais accélérés et simplifiés proposés par H. Le Châtelier.
    Composition chimique 17
    Finesse et densité 18
    Rapidité de prise 19
    Invariabilité de volume 20
    Résistance mécanique 23
    Conclusion 25

Pages
24. Rendement 26
25. Mortiers et bétons. 27
26. Fabrication 28
27. Pilonnage. 30
28. Sable 30
29. Gravier. 32
30. Eau de gâchage. 33
31. Dosages normaux. — *a*) Mortiers 33
b) Béton 35
c) Deuxième méthode. 35
d, *e* et *f*) Tableaux de calculs tout faits 37
32. Poids spécifique des bétons 41

CHAPITRE II

MORTIERS ET BÉTONS — LEURS PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

33. Variations de volume sous l'eau et à l'air 42
34. Variations de volume sous l'influence de la température 43
35. Adhérence au fer 43
36. Adhérence à d'autres substances. 46
37 Résistance à l'usure 47
38. Propriétés mécaniques 48
39. Résistance à l'extension. Influence du dosage 48
40. Résistance à l'extension. Influence du temps 49
41. Résistance à la compression 50
42. Compression des prismes d'une certaine hauteur. 53
43. Influences diverses sur la résistance à la compression. Influence de l'âge. 54
44. Coefficients d'élasticité 56
45. Expériences d'élasticité à la traction de l'Inspecteur général Bourdelles. 59
46. Expériences de Bach. 61
47. Formule d'Hartig 64
48. Expériences de MM. Souleyre et Anglade 65
49. Lois générales de la déformation des mortiers et bétons. 67
50. Conclusions 77
51. Données pratiques. 79
52. Flexion. 79
53. Calcul des déplacements. Flèches 86
54. Flexion par compression ou flambage. 91
55. Cisaillement (constitution moléculaire) 94
56. Coefficients de sécurité 100
57. Applications. 101

CHAPITRE III

CALCUL DES OUVRAGES EN BÉTON D'APRÈS L'ASSOCIATION DES FABRICANTS ALLEMANDS DE CIMENT

58. Compression. — *a*) Pression dans l'axe 106
b) Pression excentrique 107
59. Flexion — *a*) Méthode exacte 108

Pages
60. Flexion. — b) Méthode approximative. 111
61. — Cisaillement 113

LIVRE II

—

CHAPITRE PREMIER

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

62. Choix des matières 118
63. Fabrication des mortiers et bétons. 119
64. Armatures 122
65. Généralités sur le calcul 133

CHAPITRE II

THÉORIE DE M. E. COIGNET

66. **Théorie de MM. Ed. Coignet et N. de Tédesco** 138
Détermination de la fibre neutre 141
Calcul des moments d'inertie 143
Moments fléchissants. Taux de travail 144
Formules dérivées 146
Calcul des dalles 149
Etablissement d'une série de types rationnels 152

CHAPITRE III

THÉORIE DE M. P. CHRISTOPHE

67. **Théorie de M. Christophe**. 159
Compression simple. 160
Extension. Flexion simple. 161
Poutre rectangulaire à armature simple 163
Poutre droite à simple té et à double armature. 165
Poutre droite à simple té et à armature simple. 165
Poutre à simple té renversé. 166
Calcul des dalles en fonction du pourcentage, armature simple . . 167
Calcul des dalles en fonction du pourcentage, armature double . . 169
Calcul des poutres rectangulaires en fonction du pourcentage . . 171
68. Efforts tranchants. 171
Pièces comprimées et fléchies 173
69. Applications. 176

CHAPITRE IV

THÉORIES DE LÉON STELLET — L. LEFORT — RÉSAL — HAREL DE LA NOË

70. Théorie de Léon Stellet. 182
71. Théorie de Léon Lefort. 184

Pages
72. Théorie de J. Résal 186
73. Théorie de Harel de la Noë 197

CHAPITRE V

MÉTHODES DE RITTER — DE L'ASSOCIATION DES FABRICANTS DE CIMENT ALLEMANDS DE MELAN — DE P. PLANAT—DE FRITZ VON EMPERGER

74. Méthode de M. le Professeur Ritter. Applications 205
75. Méthode de l'Association des Fabricants de ciment allemands 220
76. Méthodes de M. le Professeur Melan 231
77. Méthode de P. Planat 236
78. Méthode du Docteur Fritz von Emperger 240
Applications. 245
Méthode graphique 246

CHAPITRE VI

A. MAUREL

79. **Théorie de M. A. Maurel** 250

CHAPITRE VII

CONSIDÈRE

80. **Théorie de M. A. Considère**. 263
81. I et II. Communications à l'Académie des Sciences 264
82. III. Note présentée au Congrès international des Méthodes d'essai des matériaux, de 1900 à Paris. 280
83. IV. Etat de la question du béton armé 289
84. V. Congrès de Budapest de l'Association internationale pour l'essai des matériaux (1901). 291

CHAPITRE VIII

MÉTHODES SEMI-EMPIRIQUES

85. **Méthode de M. Hennebique** 303
Calcul d'une dalle 305
Application 307
Calcul d'une poutre à simple té 308
Application 309
Comparaison avec les formules théoriques. 310
86. **Méthode Rabut.** Calcul des dalles 314
Applications 315
Calcul des hourdis nervurés. 317
Application 318

LIVRE III

—

CALCUL DU CIMENT ARMÉ

—

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS

Pages

87. Armatures 321

CHAPITRE II

COMPRESSION

88. Compression 328
89. Applications 334

CHAPITRE III

90. Extension 339
91. Applications 339
92. Projet de tuyau 343
93. Calcul d'un réservoir cylindrique 346

CHAPITRE IV

FLEXION

94. Moments de résistance 349
Détermination de la fibre neutre 353
Détermination du moment résistant 359
Premières simplifications des équations générales 362
A. Poutre à simple té armée à la fois à la compression et à la tension 366
B. Poutre à simple té armée seulement à la tension 366
C. Poutre rectangulaire armée à la tension et à la compression 367
D. Poutre rectangulaire ou dalle armée seulement en tension. 367
E. Poutre rectangulaire armée seulement en tension $R_t = 0$. 368
Applications 368

CHAPITRE V

CISAILLEMENT — EFFORTS MAXIMA DANS DES DIRECTIONS OBLIQUES

95. Théorie générale. Efforts de cisaillement verticaux et horizontaux . . 396
96. Applications 399
97. Application aux corps hétérogènes 404

Pages
98. Applications numériques 406
99. Mode de calcul des attaches ou étriers 409
Efforts maxima dans des directions obliques 412

CHAPITRE VI

CALCUL DES FLÈCHES

100. Rappel de la méthode générale 417
Applications 418
101. Efforts composés 422

LIVRE IV

—

FORMULES SIMPLIFIÉES

—

CHAPITRE PREMIER

DALLES MINCES — DALLES ÉPAISSES $R_t = 20$

102. Choix des paramètres 426
103. Calcul des dalles minces $R_t = 20$ 428
104. Applications 432
105. Dalles de forte épaisseur $R_t = 20$. 435
106. Applications 439

CHAPITRE II

POUTRES RECTANGULAIRES $R_t = 20$

107. Armatures symétriques 446
108. Applications 447
109. Armatures dissymétriques $R_t = 20$ 453
110. Applications 458

CHAPITRE III

DALLES MINCES ET ÉPAISSES $R_t = 0$

111. Dalles minces 462
112. Dalles épaisses 466
113. Applications 472

CHAPITRE IV

ÉLÉMENT DE PLANCHER NERVURÉ $R_t = 20$

114. Elément de plancher nervuré $R_t = 20$ 481
115. Applications 486

CHAPITRE V

ÉLÉMENT DE PLANCHER NERVURÉ $R_t = 0$

Pages
116. Elément de plancher nervuré $R_t = 0$ 503
117. Applications 515

CHAPITRE VI

CONCLUSIONS

118. Généralités 519
119. Dalles minces 523
120. Dalles épaisses 526
121. Poutres rectangulaires 528
122. Eléments de planchers nervurés 529

APPENDICE

—

CHAPITRE PREMIER

ÉLÉMENT DE PLANCHER NERVURÉ ($R_t = 20$)

123. Poutres à simple té. Autre méthode 531
124. Applications 541

CHAPITRE II

DISCUSSION DES ÉQUATIONS SIMPLIFIÉES

125. Dalles d'épaisseur inférieure à 0,10 547
126. Dalles épaisses 552
127. Poutres à simple té 553

CHAPITRE III

RÉSULTATS D'ESSAIS DE RUPTURES

128. Expériences faites au laboratoire des Ponts et Chaussées par M. Debray sur des plaques Cottancin 558
129. Essais Spitzer et Hanisch 561
130. Essais Bauschinger 562
131. Dalles danoises 563
132. Dalles armées de métal déployé 564
133. Rapport du Building Trades Exchange et de la Northern Architectural Association 567
134. Dalles Sanders 574
135. Expérience de Genève 574

Pages
136. Expériences de Lausanne 579
137. Expérience de Gorinchem. 588
138. Expériences de l'Association des Ingénieurs et Architectes autrichiens. 589
139. Expériences de M. de Joly 597
140. Expériences de la Société pour les constructions en ciment armé . . 599
141. Procès-verbal des épreuves du pontceau en béton en gare de Viggen. 609
142. Procès-verbal des épreuves du P. I. de l'abbaye à Saint-Maurice . . 611
143. Procès-verbal des épreuves du P. I. du Creux du Mas 613
144. Procès-verbal du P. I. de la rue du Gaz, à Saint-Imier. 615
145. Procès-verbal d'un plancher système Hennebique 616

CHAPITRE IV

BÉTON FRETTÉ

146. Béton fretté. Système Considère 617

SAINT-AMAND (CHER) — IMPRIMERIE BUSSIÈRE

CATALOGUE DE LIVRES

SUR

L'ARCHITECTURE ET LES TRAVAUX PUBLICS

PUBLIÉS PAR

La Librairie Polytechnique CH. BÉRANGER

Successeur de BAUDRY et Cie

15, RUE DES SAINTS-PÈRES, A PARIS

21, RUE DE LA RÉGENCE, A LIÈGE

Le catalogue complet est envoyé franco sur demande.

ARCHITECTURE

Traité d'architecture.

Traité d'architecture, par L. Cloquet, professeur à l'Université de Gand.

Tome I et II : *Éléments de l'Architecture.* Murs, voûtes, arcades, portes, fenêtres, cheminées, charpente, menuiserie, planchers, escaliers, combles, couvertures. 2 volumes grand in-8°, avec 2.260 figures dans le texte. . . . . 30 fr.

Tome III : *Hygiène, chauffage et ventilation.* 1 volume grand in-8°, avec 103 figures dans le texte . . . . . 5 fr.

Tomes IV : *Types d'édifices.* Habitations privées ou collectives. Entrepôts. Marchés. Abattoirs. Bourses et banques. Écoles. Bibliothèques. Musées. Hôtels de ville. Mairies. Parlements. Préfectures. Tribunaux. Prisons. Hôpitaux. Hospices. Gares. Hôtels des postes. Théâtres. Panoramas. Casinos. Cirques. Manèges. Tirs. Bains et lavoirs. Tombeaux. Cimetières. 1 volume grand in-8° avec 433 figures dans le texte. . . . . 20 fr.

Tome V : *Esthétique de l'Architecture. Composition et décoration.* 1 volume in-8° avec 880 figures dans le texte. . . . . 20 fr.

Dictionnaire d'architecture.

Dictionnaire d'architecture donnant l'explication de tous les termes employés en architecture, beaux arts, jurisprudence et travaux publics, par H. Gelot, architecte. 1 volume in-8° contenant 368 figures dans le texte. Relié. . . . . 12 fr. 50

Histoire des styles d'architecture.

Histoire des styles d'architecture dans tous les pays, depuis les temps les plus anciens jusqu'à nos jours. Les ordres. Caractéristiques des styles. Ornementation. Sculpture. Peinture. Serrurerie. Arts divers, par E. Bauderot, architecte. 2 volumes grand in-8° jésus, avec 928 gravures dans le texte . . . . . 40 fr.

Art architectural.

L'art architectural en France, depuis François Ier jusqu'à Louis XVI, par Roland, architecte, avec texte par Alfred Darcel, directeur du Musée de Cluny. Motifs de décoration intérieure et extérieure, dessinés d'après des modèles exécutés et inédits des principales époques de la Renaissance comprenant : salons, chambres à coucher, vestibules, cabinets de travail, bibliothèques, lambris, plafonds, voûtes, cheminées, portes, fenêtres, fontaines, grilles, stalles, chaires à prêcher, tombeaux, vases, glaces, etc. 2 volumes grand in-4°, contenant 2[illegible] planches et texte. . . . . 200 fr.

Décorations intérieures.

Décorations intérieures de l'époque de la Renaissance (de François Ier à Louis XIII

boiseries, panneaux, meubles, relevés, mesurés et dessinés, avec cotes, échelles, profils et détails d'exécution, par Eugène Rouyer, architecte auteur de l'Art architectural en France, etc. 1 volume in-folio contenant 100 planches et texte . . . 120 fr.

Architecture moderne.

L'architecture moderne en France. Plans, coupes, élévations, profils et détails de construction et d'ornementation comprenant, outre les plans et les façades des maisons, une quantité énorme de détails de portes, fenêtres, cornuches, balcons, vestibules, chapiteaux, entablements, etc., par F. Barell, architecte. 1 volume in-folio, contenant 120 planches et texte. . . . . 100 fr.

Architecture.

Petit manuel d'architecture, notions générales, historique, renseignements pratiques, par A. Krafft, architecte. 1 volume in-18, avec 195 figures dans le texte . . . 1 fr.

Maisons de Bruxelles.

Parallèle des maisons de Bruxelles et des principales villes de la Belgique, représentées en plans, élévations, coupes, détails intérieurs et extérieurs, par Las Termans. 2 volumes in-folio contenant 240 planches. . . . . 160 fr.

Architecture intérieure.

L'architecture intérieure : portes, vestibules, escaliers, antichambres, salons, salles à manger, chambres à coucher, bibliothèques, bureaux de banque et de journaux, devantures et intérieurs de boutiques, etc. Ensembles et détails en plans, coupes, élévations et profils, par Daviouud. 1 volume in-folio contenant 100 planches et texte. . . . . 40 fr.

Traité de constructions civiles.

Traité de constructions civiles. Fondation, maçonnerie, pavage et revêtements, marbrerie, vitrerie, charpente en bois et en fer, couverture, menuiserie et ferrures, escaliers, monte-plats, monte-charges et ascenseurs, plomberie d'eau et sanitaire, chauffage et ventilation, décoration, éclairage au gaz et à l'électricité, acoustique, matériaux de construction, résistance des matériaux, renseignements généraux, par E. Bernhot, architecte. 2e édition. 1 volume in-8°, avec 1,[illegible] figures dans le texte dessinées par l'auteur. Relié. . . . . 2[illegible] fr.

Législation du bâtiment.

Traité pratique de la législation des bâtiments et des usines. Voirie, mitoyenneté, clôtures, servitudes, assainissement, propriété, bornage, vente d'immeubles, contributions, location, réparations locatives, concours publics, honoraires, lois, jurisprudence, usages locaux, etc., etc., à l'usage des architectes, des ingénieurs, des entrepreneurs, des conducteurs des ponts et chaussées, des agents voyers, des propriétaires et des locataires, par L. Ewerlot, architecte. 1 volume [illegible], contenant de nombreuses figures dans le texte. Relié. . . . . 2[illegible] fr.

Maçonnerie.

Architecture et constructions civiles. Maçonnerie : pierres et briques, leur emploi dans les maçonneries, proportion des murs, fondations, murs de cave et [illegible], élévation, des moulures et des contours ; décoration des murs extérieurs, des [illegible] cloisons, planchers, voûtes, escaliers en maçonnerie, éléments de [illegible], revêtement des sols, pierres naturelles, chaux et ciments, [illegible], produits céramiques, par J. Dex, architecte, professeur de [illegible]. 2 volumes grand in-8°, avec 700 figures dans le texte. . . . . [illegible] fr.

Charpente en bois et menuiserie.

Architecture et constructions civiles. Charpente en bois et menuiserie, bois de [illegible], essences, résistance des bois, tableaux, calculs faits, [illegible], pièces droites, pièces courbes, combles, [illegible], échafaudages, appareils de [illegible], travaux [illegible], voûtes, ponts et passerelles en bois, escaliers, menuiserie, [illegible], portes, fenêtres, persiennes, devantures, décorations, par J. Dex, architecte, professeur de [illegible]. 1 volume grand in-8°, avec [illegible] figures dans le texte. . . . . [illegible] fr.

Le Béton armé.

Le Béton armé et ses applications. Aperçu historique, principes, systèmes, [illegible], planchers, ponts et passerelles, couvertures et voûtement, [illegible], constructions [illegible], canalisations, réservoirs, [illegible]

etc. *Exécution*, matériaux, mise en œuvre, fabrication du béton, préparation des fers, coffrages, mise en œuvre du béton et du métal, fabrication des tuyaux, pieux et palplanches. *Théorie*, étude expérimentale, épreuves, étude théorique du béton armé, compression, extension, flexions. Avantages et inconvénients, par P. Camerone, ingénieur des ponts et chaussées. 2e édition refondue et augmentée. 1 volume grand in 8°, contenant 847 figures dans le texte. . . . . 25 fr.

Constructions en ciment armé.

Etude de divers systèmes de constructions en ciment armé. Principes, principaux systèmes, applications des différents systèmes de ciment armé, matériaux, avantages, inconvénients et essais du ciment armé, calcul des pièces, exemples de constructions en ciment, par Gérard Lavergne, ingénieur civil. *2e édition*. 1 volume in-8° avec 89 gravures dans le texte. Cartonné . . . . . 6 fr.

Béton de ciment armé.

Calcul des poutres droites et planchers en béton de ciment armé, par L. Lelong, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 1 volume in-8° avec 7 abaques représentatifs des formules et 48 gravures dans le texte, relié . . . . . 8 fr.

Habitations ouvrières.

Les habitations ouvrières en tous pays, par Muller et Cacheux. 2e édition. 1 volume grand in-8° et 1 atlas de 78 planches in-4°. . . . . 60 fr.

Habitations ouvrières.

Etat des habitations ouvrières à la fin du XIXe siècle, par Emile Cacheux. 1 volume grand in-8° avec 18 planches . . . . . 2 fr.

L'Economiste pratique.

L'économiste pratique. Construction et organisation des crèches, salles d'asile, écoles, habitations ouvrières et maisons d'employés, hôtels pour célibataires, cuisines économiques, bains, lavoirs, cercles populaires, nourriceries, maternités, dispensaires, hôpitaux, hospices, asiles de nuit, postes de secours. Mécanisme, statuts, règlements des institutions de prévoyance et de bienfaisance, par Cacheux. 1 volume grand in 8° et 1 atlas de 72 planches in-4°. . . . . 40 fr.

Asiles d'aliénés.

Etudes pour servir à la construction des asiles d'aliénés. — Programme. — Emplacement pour l'établissement de l'asile. — Dimensions principales des pavillons et des salles de malades. — Description des divers quartiers. — Services généraux. — Description des principaux asiles français. — Asiles de la Seine. — Considérations sur la construction des asiles d'aliénés en Angleterre et en Ecosse, par J. Sanoner, architecte du gouvernement. 1 volume grand in 8° avec planches et figures intercalées dans le texte. . . . . 12 fr. 20

Théâtres.

Traité de la construction des théâtres. Historique, principes généraux de la construction des théâtres modernes, machinerie, éclairage, chauffage et ventilation, acoustique, précautions contre l'incendie, parallèle des théâtres, théâtres de société, par Alphonse Gosset, architecte. 1 beau volume in 4° avec gravures dans le texte et 62 planches montées sur onglets. Prix, relié . . . . . 75 fr.

Chauffage et ventilation.

Traité pratique du chauffage et de la ventilation. Principes, appareils, installations, cheminées, poêles, calorifères, chauffages à air chaud et à vapeur. Chauffage et ventilation des maisons particulières, écoles, crèches, lycées, hôpitaux, magasins, établissements publics, théâtres, hôpitaux, casernes, serres, bains, amphithéâtres, par Pa. Picard, ingénieur des arts et manufactures. 1 volume grand in-8° avec 406 figures dans le texte, relié. . . . . 20 fr.

Chauffage et ventilation.

Fumisterie, chauffage et ventilation. Foyers. Tuyaux de fumée. Cheminées. Surfaces de chauffe. Refroidissement des fontes. Chauffage par cheminées. Chauffage par poêles. Calorifères à air chaud. Chauffage à vapeur. Chauffage à eau chaude. Ventilation. Fourneaux de cuisine, par J. Denis, architecte. 1 volume grand in-8° avec 477 figures dans le texte. . . . . 25 fr.

Salubrité des maisons.

Hygiène publique et privée. La plomberie au point de vue de la salubrité des

maisons. Eau. Air. Lumière. Canalisations des habitations. Siphons. Tuyaux de chute. Appareils des water-closets. Installation des water-closets. Baignoires. Lavabos. Bacs. Eviers. Laveries. Urinoirs. Puisarts. Eaux pluviales. Ventilation. Essais comparatifs de divers ventilateurs, par Stevens Hellyer, traduit sur la 3e édition anglaise par G. Pouillet, fils. 1 volume grand in-8° contenant 329 figures dans le texte et 22 planches hors texte. Relié. . . . . 20 fr.

Plomberie.

Plomberie. Eau, assainissement et gaz. Tuyauteries, appareils d'arrêt et de passage, prises d'eau, pompes, compteurs, canalisation, réservoirs d'eau, appareils utilisateurs d'eau et leurs décharges, canalisation des eaux résiduaires d'une propriété, gaz, canalisations et accessoires, compteurs et régulateurs, brûleurs et appareils, par J. Dejeer, architecte, professeur à l'École Centrale. 1 volume grand in-8° avec 391 figures dans le texte. . . . . 20 fr.

Distribution d'eau.— Assainissement.

Salubrité urbaine, distribution d'eau et assainissement. *Salubrité urbaine et* L'eau dans les villes. Aperçu historique. *Distribution d'eau.* Besoins. Ressources. Recherche, examen et choix des eaux destinées à l'alimentation. Captage des eaux. Procédés employés pour l'amélioration des eaux naturelles. Amenée de l'eau par la gravité. Élévation mécanique de l'eau. Réservoirs. Distribution générale. Service public. Eau sur la voie publique et dans les promenades. Vente et livraison de l'eau. Service privé. Eau dans la maison. *Assainissement.* Égoûts des villes. Systèmes d'évacuation. Déversement ou traitement final. Canalisation intérieure des maisons. Canalisation des voies publiques. Réseaux d'égoûts. Construction des égoûts. Curage. Épuration des eaux d'égoût par le sol. Traitement artificiel des eaux d'égoût. Réglementation. Statistique, par G. Bechmann, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 2e édition, très augmentée. 2 volumes in-8° avec figures dans le texte. 40 fr.

Chaque volume se vend séparément au prix de 20 francs.

Stabilité des constructions.

Traité de stabilité des constructions. Éléments de statique graphique. Résistance des matériaux. Résistance et stabilité des organes isolés. Résistance et stabilité des systèmes d'organes. Les arcs, les massifs en maçonnerie. Les assemblages en fer. Complément de mathématiques. Leçons professées au Conservatoire national des arts et métiers et à l'École centrale d'architecture, par Jules Pillet, professeur au Conservatoire des arts et métiers. 1 volume grand in-4°, de 430 pages, impression sur très beau papier. Nombreux tableaux graphiques, abaques et tables numériques. 600 figures et épures dans le texte. . . . . 25 fr.

Résistance des matériaux.

Cours pratique de résistance des matériaux. Professé à la Société d'encouragement pour l'industrie nationale, par J. Nouvel, ingénieur des arts et manufactures. 1 volume in-8° contenant de nombreuses figures intercalées dans le texte. Relié. . . . . 8 fr.

Résistance des matériaux.

Résistance des matériaux. Notions préliminaires de géométrie et de statique graphique. Principes généraux de la théorie mathématique de la résistance et leurs applications. Essais des matériaux. Résistance des matériaux. Propriétés physiques et élastiques des matériaux de construction. Cours de résistance des ponts et chaussées, par Les Ressorts, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° avec de nombreuses figures dans le texte. . . . . 12 fr.

Stabilité des constructions.

Stabilité des constructions. Calculs des poutres. Poutres courbes et arcs. Systèmes articulés. Systèmes rigides. Constructions en maçonnerie. Cours de résistance des ponts et chaussées, par Les Ressorts, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° avec de nombreuses figures dans le texte. . . . . 12 fr.

Résistance des matériaux.

Stabilité des constructions et résistance des matériaux. Moments d'inertie. Résistance de l'élément. Résistance des éléments composés. Poussées des terres. Murs de soutènement. Voûtes. Stabilité des voûtes. Résistance à la compression, à la flexion, à la torsion. Poutres droites. Poutres à âme pleine. Poutres à treillis et à âmes composées. Poutres à treillis. Poutres à treillis à parois pleines. Treillises. Flexion des ressorts. Flambement. Appuis. Ponts et chaussées. Ponts et chaussées. Ponts et viaducs. Ponts et viaducs. 1 volume grand in-8° avec 241 figures dans le texte. . . . . 25 fr.

Moments d'inertie.

Carnet du constructeur. Recueil de moments d'inertie relatifs à 3.263 poutres composées à âme simple et double d'une hauteur variant de 20 centimètres à 1 mètre, par Chevalier et Brun, ingénieurs constructeurs. 1 volume in-12. Relié . . . 7 fr. 50

Constructions en fer.

Expressions analytiques et tables des moments d'inertie et des moments résistants des sections à double T, par Hellwig. 1 brochure in-8° avec figure. . . . 3 fr.

Calcul des pièces de construction.

Formules et tableaux pour le calcul de pièces de construction à la traction, à la compression (flambage) et à la flexion, par R. Kirchlin. 1 volume in-8° contenant des figures dans le texte et de nombreux travaux graphiques. Relié. . . . 6 fr. 50

Formules et tables de résistance des fers, etc.

Formules et tableaux pratiques permettant de déterminer très rapidement les sections des pièces comprimées, tendues et fléchies en fer et acier laminés, en fer et acier coulés, par J. Delporte, dessinateur. 1 volume in-8°. . . . . 8 fr.

Fers à charpente.

Tables, formules et calculs des fers à charpente, 3.500 moments d'inertie, moments résistants, sections, poids métriques de profils simples, composés et éléments de profils ; 120 formules et applications relatives aux poutres, colonnes et colonnes-poutres, par Edouard Lingelin. 1 volume in-12. . . . . 6 fr.

Emploi de l'acier.

De l'emploi de l'acier dans les constructions navales, civiles et mécaniques, par Perisse, ingénieur. 1 brochure grand in-8° . . . . . 3 fr.

Serrurerie et constructions en fer.

Traité pratique de serrurerie. Constructions en fer et serrurerie d'art. — Planchers en fer, linteaux, filets, poutres ordinaires et armées. — Colonnes en fonte, consoles en fonte, colonnes en fer creux, pans de fer, montants en fer composés. — Charpentes en fer, combles, hangars, marchés couverts. — Passerelles et petits ponts. — Escaliers en fer. — Châssis de couche, bâches, serres, jardins d'hiver, chauffage, vitrerie. — Volières, tonnelles, kiosques. — Auvents, marquises, verandahs, bow-windows. — Grilles, panneaux de portes, rampes. — Éléments divers de serrurerie et de ferronnerie d'art. — Principaux assemblages employés en serrurerie, etc., etc., par F. Balleroy. 2e édition. 1 volume grand in-8° avec 972 figures dans le texte. . . . . 25 fr.

Serrurier-Constructeur.

Manuel du serrurier constructeur. — Fonte, fer et acier. — Influence de la fabrication. — Coefficients usuels. — Centres de gravité. — Moments d'inertie. — Calcul des charges et surcharges. — Traction. — Compression. — Glissement. — Flexion simple et composée. — Fermes triangulées et en arc. — Poutres en treillis. — Contreventement. — Assemblages. — Renseignements mathématiques. — Poids et mesures du commerce. — Tableaux et calculs faits de résistance. — Documents relatifs aux constructions, à l'usage des ingénieurs, architectes, constructeurs, conducteurs de travaux, dessinateurs, contre-maîtres, vérificateurs, etc., etc., par Léon Gruyeaud, ingénieur. 1 volume grand in-8° contenant près de 300 tableaux, plus de 800 formules usuelles, 250 figures intercalées dans le texte et de nombreux tracés graphiques et applications numériques. Relié. . . . . 20 fr.

Constructions métalliques Manuel des .

Manuel des constructions métalliques et mécaniques. 3e édition. Ouvrage contenant les méthodes de calcul graphiques et analytiques, appliquées aux poutres droites des ponts, etc., aux charpentes et aux arcs continus, articulés et encastrés, par J. Bourdon, ingénieur. 1 volume in-8° avec plus de 200 figures dans le texte et un atlas in-4° de 20 planches. . . . . 40 fr.

Charpentes métalliques

Les principes de la construction des charpentes métalliques et leur application aux ponts à poutres droites, combles, supports et chevalements. Extraits du cours d'*architecture and structure* professé à l'École spéciale des arts et manufactures et des mines annexée à l'Université de Liège, par Henri Dechamps, professeur à la faculté des sciences de Liège. 2e édition, refondue et augmentée. 1 volume grand in-8° avec 354 figures dans le texte. Relié. . . . . 15 fr.

Série de prix provinciale. — Aide-Mémoire.

Séries de prix sous détaillées avec commentaires, par Armand Pavot, ingénieur architecte, 6 volumes in-8°, contenant un grand nombre de figures dans le texte et hors texte. . . . . 80 fr.

On vend séparément :

Tome I. Terrassements. Maçonnerie. Plâtrerie. Fumisterie. Transport . . 25 fr.
— II. Charpente. Menuiserie. Ameublement. Tapisserie. . . . . 12 fr.
— III. Couverture. Ferblanterie. . . . . 12 fr.
IV. Serrurerie. Electricité. Mécanique. . . . . 15 fr.
V. Peinture. Vitrerie. Décors. Miroiterie. . . . . 12 fr.
VI. Encyclopédie élémentaire du bâtiment. Législation. . . . 12 fr.

On peut également se procurer à part chacune des parties suivantes :

Ire, IIe, IIIe parties : Terrassements, dragages, vidanges, pares et jardins, ponts et galeries, transport. . . . . 8 fr.

IVe partie : Maçonnerie, ciment armé, béton comprimé, sculpture, mosaïque, marbre, asphalte, égouts. . . . . 15 fr.

Ve, VIe parties : Plâtrerie, fumisterie, stucs, voûtes d'églises, plâtre armé, maçonnerie, fours, calorifères. . . . . 8 fr.

VIIe partie : Charpente, pilotis, encoffrements, escaliers, charronnages, rustiques . . . . . 8 fr.

VIIIe, IXe parties : Menuiserie, ameublement, parquets, moulures sculptées, sculptures pour meubles, ébénisterie. . . . . 8 fr.

Xe partie : Couverture, travaux d'ardoiserie, chaperons et couvertures de murs, toitures, terrasses. . . . . 8 fr.

XIe partie : Ferblanterie. Canalisation. Tôlerie. Poêlerie. Chaudronnerie. Canalisations. Eclairage. Pompes. . . . . 8 fr.

XIIe partie : Serrurerie. Ferronnerie. Charpentes en fer. Escaliers en fer. Quincaillerie. Ascenseurs. . . . . 8 fr.

XIIIe et XIVe parties : Electricité, paratonnerres, mécanique, acoustique . . . 8 fr.

TRAVAUX PUBLICS

Annales de la construction.

Nouvelles Annales de la construction, fondées par Oppermann. 12 numéros par an, formant un beau volume de 50 à 60 planches et 200 colonnes de texte.

Abonnements : Paris, 15 fr. — Départements et Belgique, 18 fr. — Union postale, 20 fr.

Prix de l'année parue reliée . . . . . 25 fr.

Agenda Oppermann.

Agenda Oppermann paraissant chaque année. Très petit carnet de poche, contenant tous les détails et renseignements techniques usuels du usage journalier. Règles d'angles. Coupe géographique du globe terrestre, guide du mécanicien. Bases géodésie. Poids et mesures, monnaies françaises et étrangères. Renseignements mathématiques et géométriques. Renseignements physiques et chimiques. Résistance des matériaux. Electricité. Règlements administratifs. Professions du commerce. Prix courants et séries de prix. Tarifs des chemins de fer. Télégraphes.

Relié en toile . . . . . 3 fr. — Pour l'envoi par la poste . . . . . .

Aide-mémoire de l'ingénieur.

Aide-mémoire de l'ingénieur. Mathématiques, mécanique, physique, chimie, résistance des matériaux, statique des constructions, chaudières, machines, machines motrices, chemins de fer, machines outils, [illegible] [illegible] Publié par [illegible] Membre de la Société [illegible] par [illegible] Il [illegible] plus de [illegible] pages avec [illegible] texte [illegible]

Aide mémoire français.

[illegible] par J. [illegible]

Cours de construction.

[illegible] conformément au programme officiel [illegible] Terrassements. [illegible] Fonctions [illegible] publiques. [illegible] 2 volumes [illegible]

Assainissement de Paris.

Notice sur le Service des eaux et de l'assainissement de Paris. Les eaux et les égouts il y a 100 ans. Les eaux et les égouts dans la première moitié du XIXe siècle. Période de Belgrand. Période d'Alphand. *État actuel*. Ensemble. Organisation. Personnel. Alimentation des services publics et privés. Réservoirs. Distribution. égouts et collecteurs. Champs d'épuration. Canaux de navigation. Fonctionnement des services, exploitation et entretien. Résultats techniques et financiers dressés par les soins de G. Bechmann, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 1 volume in 8°, contenant des figures dans le texte. Relié . . . . . 7 fr. 50

Assainissement. Voir page 4.

Terrassements, tunnels, etc.

Procédés généraux de construction. Travaux de terrassement, tunnels, dragages et détochements. Renseignements généraux. Terrassements à bras d'hommes. Terrassements à l'aide de machines. Déblai de rocher. Mode d'exécution des déblais et des remblais. Des *Tunnels* en général. Monographies de tunnels. Tunnels en terrains difficiles. Terrassements sous l'eau. Reconnaissance du terrain. *Dragage*. Derasement de roches sous-marines. Remblais sous marins. Entreprises de terrassements. Déblais souterrains. Fonctionnement des dragues à aspiration. *Desrochements*, par Ernest Pontzen. 1 vol. in 8°, avec 234 fig. dans le texte. . . 25 fr.

Travaux d'art.

Procédés généraux de construction. Travaux d'art, par A. de Préaudeau, avec la collaboration de E. Pontzen.

Tome I. Éléments des ouvrages, généralités. Qualités et mode d'emploi des matériaux. Travaux préparatoires. *Terrassements*, *Dragages*, *Pieux*, *Bâtardeaux*, *Épuisements*, etc.; Travaux accessoires. *Crottes*, *Échafaudages* et *Ponts de service*. 1 volume grand in-8°. . . . . 20 fr.

Tome II. Construction des ouvrages. Fondations à l'air libre, à sec et sous l'eau. Procédés de consolidation du sous-sol, accidents. Fondations à l'air comprimé. Entretien et réparation des ouvrages, démolition. Travaux en élévation. Prix de revient : *Fondations*, *travaux en élévation*. 1 volume grand in-8°, avec 489 figures dans le texte . . . . . 20 fr.

Le Bouclier dans la construction des souterrains.

Emploi du bouclier dans la construction des souterrains. Exposé, enveloppe, couteau, avant-bec, divisions horizontales, divisions verticales, la chemise, corps du bouclier, queue, longueur totale, vérins, poids des boucliers, blindage du front d'attaque, dispositions relatives à l'emploi de l'air comprimé. Revêtement. Conditions générales d'emploi de la méthode. Applications diverses du bouclier, par Raymond Le Cuyer, ingénieur des ponts et chaussées. 1 volume in 8°, avec 337 figures dans le texte, relié. . . . . 20 fr.

Le Bouclier dans la construction des souterrains.

Le Bouclier et les méthodes nouvelles de percement des souterrains. 1re partie. Collecteur de Clichy. Siphon de l'Orge. Prolongement du chemin de fer d'Orléans à Paris. Collecteur de Bièvre. Chemin de fer métropolitain de Paris. Boucliers de Djoudonnet, de Weber, de Lamarre. Souterrain de Menilmontant. Dérivation du Loing et du Lunain. Applications à l'étranger. 2e partie. Méthode. Avantages et inconvénients de la méthode Legrand. Utilisation de Legrand, par Rinx Pacquet, ingénieur des ponts et chaussées. 1 volume in 8°, contenant 225 figures dans le texte. Relié . . . . . 20 fr.

Mesurage et Métrage.

Traité pratique et complet de tous les mesurages, métrages, jaugeages de tous les corps appliqués aux arts, aux métiers, à l'industrie, aux constructions, aux travaux hydrauliques, aux nivellements pour construction de routes, de canaux et de chemins de fer, charpente, etc., suivi de la rédaction de projets de toute espèce de travaux du tissage, de l'architecture et du genie civil et militaire, terminé par une analyse et suite de prix avec détails sur la nature, la qualité, le façon et la mise en œuvre des matériaux, par E. Sonnet, 8e édition. 2 volumes grand in-8° et 1 atlas de 47 pl. pour les modèles . . . . . 30 fr.

Géométrie descriptive.

Cours de géométrie descriptive. Perspective, ombres, courbes et surfaces, charpente. Professé à l'École centrale des arts et manufactures, par Ch. Rossel, rédigé et annoté par H. Pelletier, examinateur à l'École polytechnique. 1 volume in 8°, avec 300 figures dans le texte . . . . . 17 fr. 50

Coupe des pierres.

Traité pratique de la coupe des pierres, précédé de toute la partie de la géométrie descriptive qui trouve son application dans la coupe des pierres, par [illegible]. 1 volume in-8° et 1 atlas in-4° de 59 planches, contenant 381 figures . . . 40 fr.

Coupe des pierres.

Coupe des pierres, précédée des principes du trait de stéréotomie, par [illegible] Rouché, examinateur de sortie à l'École Polytechnique, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, et [illegible], professeur à l'École centrale. 1 volume grand in-8° et 1 atlas in-4° de 34 planches. . . . . 25 fr.

Matériaux de construction.

Connaissance, recherche et essais des matériaux de construction et de balastage, par Ed. Barrson, chef de section des travaux neufs au chemin de fer du Nord. 1 volume grand in-8° avec figures dans le texte, relié. . . . . 10 fr.

Chimie appliquée à l'art de l'ingénieur.

Chimie appliquée à l'art de l'ingénieur. *Première partie :* Analyse chimique des matériaux de construction. Généralités. Matériaux de maçonnerie. Métaux. Matériaux divers. Eaux naturelles, terres, amendements et produits agricoles, par [illegible] Durand-Claye, inspecteur général, et Dupont, chimiste de ce Laboratoire. *Seconde partie :* Étude spéciale des matériaux d'agrégation. Historique. Classification. Fabrication. Propriétés. Essais. Mortiers. Bétons. Applications. Comparaison de divers liants hydrauliques, par René Feret, ancien élève de l'École polytechnique. 1 volume in-8°, avec gravures dans le texte. . . . . 15 fr.

Chaux hydrauliques et ciments.

Fabrication et emploi des chaux hydrauliques et des ciments. Chaux hydrauliques. Ciments de grappiers. — Ciments naturels et artificiels. Leur fabrication, leurs essais et leur emploi. Formant un guide pratique du fabricant, de l'ingénieur, de l'architecte et de l'entrepreneur, par Bonnet, ingénieur des Arts et Manufactures. 1 volume in-8°, avec 148 figures dans le texte, relié . . . . . 10 fr.

Ciments et chaux hydrauliques.

Ciments et chaux hydrauliques. Fabrication, propriétés, emploi. [illegible] Ciments Portland. Ciment de laitiers, ciments naturels, ciments mixtes, ciments de grappiers, ciments prompts, ciments romains, Pouzzolanes, [illegible] des produits hydrauliques. Emploi des produits hydrauliques. Cause de la [illegible] des mortiers. Théories diverses sur la constitution, la prise et le durcissement des chaux, ciments et mortiers, etc., par [illegible], 2e édition revue et considérablement augmentée. 1 volume grand in-8° avec 98 figures dans le texte et [illegible] graphiques de résistance des ciments, relié . . . . . [illegible]

Chaux et sels de chaux.

Chaux et sels de chaux appliqués à l'art de l'ingénieur. Chaux et sels de chaux considérés minéralogiquement, chimiquement et industriellement. Propriétés, procédés de fabrication des chaux grasses et maigres, des chaux hydrauliques et des ciments divers. Propriétés et moyens d'extraction du carbonate de chaux, des pierres calcaires, des marbres, des albâtres, du sulfate de chaux et des plâtres. Théorie de la solidification des chaux, ciments, mortiers et plâtres. Essais chimiques et essais chimiques des chaux, sels de chaux et ciments, par [illegible] Avec un [illegible] au département de la Vienne. 1 volume grand in-8° [illegible] dans le texte. . . . . [illegible]

Murs de soutènement.

Études théoriques et pratiques sur les murs de soutènement et les [illegible] par [illegible] sous ingénieur des ponts et chaussées. [illegible] texte. 1 volume [illegible], avec [illegible] planches et [illegible] . . . . . [illegible]

Murs de soutènement.

[illegible] et de poussées de pierres par [illegible] volume [illegible] figures dans le texte.

Consolidation des talus.

[illegible] canaux et chemins de fer par [illegible] in-12 [illegible] 95 de 70 planches doubles [illegible]

Statique graphique.

Statique graphique appliquée aux constructions, toitures, planchers, poutres, ponts, etc. Éléments du calcul graphique. — Des forces et de leur résultante. Des moments fléchissants, des efforts tranchants. — Recherche des maxima. — Surcharge permanente concentrée et répartie. — Surcharge mobile. Données pratiques sur le poids propre des toitures et sur leur surcharge accidentelle. — Poutres pleines. Poutres à treillis, simples et multiples. — Centre de gravité. — Notions sur la résistance des matériaux. — Moment d'inertie. Exemples et applications, par MAURICE MAUREN, ingénieur. 1 volume grand in-8° avec figures et 1 atlas in-4° de 20 planches . . . . . 12 fr. 50

Statique graphique.

Éléments de statique graphique, par EUGÈNE ROUCHÉ, examinateur de sortie à l'École polytechnique. 1 volume grand in 8°, avec gravures dans le texte. 12 fr. 50

Statique graphique.

Application de la statique graphique. Règlements ministériels, charges des ponts et des charpentes, poutres droites, poutres courbes, pleines, à treillis, continues, ponts-grues, arcs métalliques, fermes métalliques, piles métalliques, influence du vent sur les constructions, leurs déformations, calcul des poutres pour le lançage et le montage, piles en maçonnerie, calcul des joints des poutres, formules et tables usuelles, par MAURICE KŒCHLIN, administrateur de la Société de Construction de Levallois-Perret. 2e édition. 1 volume grand in 8°, avec figures dans le texte et 1 atlas in-4° de 34 planches . . . . . 30 fr

Statique graphique.

Éléments de statique graphique appliquée à l'équilibre des systèmes articulés, par AUGUSTE TOMA, ancien élève de l'École polytechnique. 1 volume grand in 8° et 1 atlas in-4° de 18 planches. . . . . 10 fr.

Cours de mathématiques.

Cours de mathématiques pures et appliquées, à l'usage des conducteurs des ponts et chaussées, agents voyers, chefs de section, architectes, conducteurs de travaux, entrepreneurs, etc., comprenant : *Arithmétique, Géométrie plane, Géométrie de l'espace, Algèbre, analyse et géométrie analytique, Mécanique*, par L. LANGLOIS, inspecteur général des ponts et chaussées. 1 volume in 8°, avec de nombreuses figures dans le texte, relié. . . . . 10 fr.

Résumé des connaissances mathématiques.

Résumé des connaissances mathématiques nécessaires dans la pratique des travaux publics et de la construction, par F. MESSAL, ingénieur des ponts et chaussées. 1 volume grand in 8°, avec 135 figures dans le texte. . . . . 10 fr.

Voirie. — De l'alignement.

De l'alignement ou du régime des propriétés privées bordant le domaine public, par L. MOLIN. 1 volume grand in 8°. . . . . 15 fr.

Traité de topographie.

Traité de topographie. Appareils d'optique, applications de la géodésie à la topographie, instruments de mesure, levé des plans de surface, levés souterrains, théorie des erreurs, par ANDRÉ PETITGAN, ingénieur en chef des mines. 1 volume in-8°, avec 234 figures dans le texte, relié. . . . . 15 fr.

Topographie.

Cours de topographie. Levé des plans de surface et levé des plans de mines, par A. HARDIS, ingénieur honoraire des mines. 3e édition. 1 volume in 8° avec 107 figures dans le texte, relié. . . . . 10 fr.

Levé des plans et nivellement.

Levé des plans et nivellement. 1° Opérations sur le terrain. 2° Opérations souterraines. 3° Nivellement de haute précision, par LÉON DUPANT-GRAY, ingénieur en chef des ponts et chaussées, PÉLÉTAN et LAVERGNAT, ingénieurs des mines. 1 volume in-8°, avec figures dans le texte . . . . . 25 fr.

Levé des plans.

Traité du levé des plans et de l'arpentage. Notions relatives aux lignes et aux

angles. — Description des instruments. — Levé des plans. — Triangulation. — Arpentage. — Polygonométerie. — Mesures des distances inaccessibles, par J. Derressis, 2e édition. 1 volume in-8°, avec 103 figures dans le texte . . . . . fr.

Nivellement.

Traité du nivellement, contenant les principes généraux, la description et l'usage des instruments, les opérations et les applications, par J. Derressis, 4e édition. 1 volume in-8°, contenant 112 figures . . . . . fr.

Tables trigonométriques centésimales.

Tables trigonométriques centésimales pour le tracé des courbes des voies de communication, augmentées de tables tachéométriques, suivi d'un recueil des coordonnées polaires et des coordonnées rectangulaires, de tables donnant les éléments de raccordement des courbes et des déclivités des voies de fer et de nombreuses tables relatives à la pose des voies de fer, par Th. Wisniewski, ingénieur, ancien élève de l'École polytechnique de Zurich. 1 volume in-8°, cartonné . . . . . 12 fr.

Tables tachéométriques.

Nouvelles tables tachéométriques centésimales et sexagésimales pour calculer les distances réduites à l'horizon, les différences de niveau, les coordonnées rectangulaires et les courbes. Précédées d'une instruction détaillée sur leurs différents usages, par J. Orlandi, ingénieur civil. 1 volume in-12, cartonné. . . . . fr.

Tables tachéométriques.

Tables tachéométriques, donnant aussi rapidement que la règle logarithmique pour les calculs nécessaires à l'emploi du tachéomètre, par Louis Poss, ingénieur des chemins de fer. 1 volume in-8°, relié. . . . . fr.

Tachéométrie.

Suppression du chainage, des règles à calcul, des tables tachéométriques et des tables logarithmiques dans le nivellement et le levé des plans, méthode donnant simultanément la configuration et le relief des terrains de toute étendue par la lecture directe des distances horizontales, des différences de niveau et des coordonnées rectangulaires des points visés par rapport à l'orientation de chaque station, par Léon Fraser, agent voyer. 2e édition. 1 volume in-8°, avec 3 planches.

Courbes de raccordement.

Tables pour le tracé des courbes circulaires de raccordement des voies de communication, par Cavaros Gaspard, ancien ingénieur. 1 volume in-12, avec figures dans le texte, relié . . . . . fr.

Courbes de raccordement.

Tracé des courbes sans mesure, chainage des courbes microscopiques et des profils en travers sans niveau, par Louis Lesse. 2e édition. 1 volume in-8°, 1 planche . . . . . fr.

Calcul des raccordements paraboliques.

Calcul des raccordements paraboliques pour les tracés de chemins de fer et de parcours de courbes. Tables nouvelles et la théorie complète des courbes circulaires et paraboliques, par M. [illegible], ingénieur en chef des ponts et chaussées. 1 volume in-8°, avec figures et planches, relié . . . . . fr.

Courbes de raccordement.

Nouvelles tables pour le tracé des courbes de raccordement en voie de chemins de fer, avec tables [illegible], par Lucien [illegible]. 1 volume in-8°, [illegible] . . . . . fr.

Mouvement des terres.

[illegible] 1 volume [illegible] . . . . . fr.

Tables de déblais et de remblais

[illegible] 1 volume [illegible] . . . . . fr.

Cours de routes.

Cours de routes professé à l'École des ponts et chaussées. Dispositions générales, définition, formes des différentes parties des routes. Étude et préparation des projets. Étude des tracés. Rédaction des projets. Construction des routes. Terrassements, chaussées, ouvrages accessoires. Entretien des chaussées empierrées. Entretien des chaussées pavées. Entretien des parties accessoires des routes. Évaluation et répartition des dépenses d'entretien, par Ch. Léon Durand-Claye, inspecteur général des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8°, avec figures dans le texte. . 20 fr.

Chemins vicinaux.

Traité pratique des chemins vicinaux. Généralités, personnel, assiette des chemins vicinaux, ressources de la voirie vicinale, exécution des travaux, comptabilité des chemins vicinaux, police de la voirie vicinale, police de roulage, objets divers, par Ernest Henry, inspecteur général des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8°. 20 fr.

Réparation et entretien des chaussées.

Réparation et entretien des chaussées en empierrement. Instructions pratiques à l'usage des ingénieurs, conducteurs, commis et agents voyers et plus spécialement à celui des cantonniers, par J. Dubosque, sous-ingénieur des ponts et chaussées, 2e édition mise à jour. 1 volume in-12, cartonné. . . . . 1 fr. 50

Pavage en bois.

Le bois et ses applications au pavage à Paris, en France et à l'étranger. Divers systèmes de pavage en bois ; bois employé au pavage ; étude des propriétés physiques, mécaniques, anatomiques et chimiques des bois ; conservation et préparation des bois ; fabrication des pavés ; entretien et durée des pavages en bois ; pavage en bois dans les voies à tramways ; régime des sociétés de pavage en bois ; contrats et cahiers des charges ; fonctionnement du système de la régie, à Paris ; prix de revient, par Albert Puisque, ingénieur des ponts et chaussées. 1 volume in-8°, avec 223 figures dans le texte, relié . . . . . 20 fr.

Asphalte.

L'asphalte. Son origine, sa préparation, ses applications, par Léon Malo, 2e édition, entièrement refondue et mise au courant des derniers perfectionnements de l'industrie de l'asphalte. 1 volume in-12, avec 2 planches. . . . . 3 fr. 50

Traité complet des Chemins de fer.

Traité complet des chemins de fer. Historique et organisation financière, construction de la plate-forme, ouvrages d'art, voie, stations, signaux, matériel roulant, traction, exploitation, chemins de fer à voie étroite, tramways, par G. Humbert, ingénieur des ponts et chaussées. 3 volumes grand in-8°, avec 700 figures dans le texte. . . . . [illegible] fr.

Chemins de fer. Notions générales et économiques.

Chemins de fer. Notions générales et économiques. Historique, formalités et règlements relatifs à l'exécution des travaux, régimes, développements, dépenses, comparaison des voies ferrées avec les routes et les voies de navigation intérieure, prix de revient des transports sur rails, tarifs et leur application, recettes d'exploitation, voie et traction, chemins de fer à voie étroite, considérations économiques, par Léon Lévy, ancien ingénieur des ponts et chaussées, ingénieur civil. 1 volume grand in-8°. . . . . 15 fr.

Construction des chemins de fer.

Instructions pour la préparation des projets et la surveillance des travaux de construction de la plate-forme des chemins de fer, suivies de tables pour le calcul des courbes et pour l'évaluation des volumes des déblais et des remblais, par L. Pacheco, inspecteur général des ponts et chaussées. 1 volume petit in-4°, avec 8 planches et de nombreuses figures intercalées dans le texte, relié . . . 15 fr.

Chemins de fer.— Superstructure.

Chemins de fer. Superstructure. Les diverses voies de communication. Composition et largeur de la voie, divers types de rails, longueur, fabrication, éclissage, fixation et durée des rails. Traverses, longrines, ballast. Pose de la voie. Appareils de communication entre les voies. Appareils d'arrêt des véhicules. Outillage de la

voie. Passages à niveau. Gares et stations, service des voyageurs. Voie unique, voie double. Stations intermédiaires, stations de grande circulation, gares de bifurcation, gares terminales. Service des marchandises. Service du matériel roulant, détails. Signaux. Signaux de la voie. Langage, structure des signaux mobiles. Réglementation des signaux. Installation, enclenchements. Application de l'électricité aux signaux, par E. Durrmme, ingénieur du service central de la Compagnie du Midi. 1 volume in-8° avec 310 figures dans le texte et 1 atlas de 73 planches doubles. . . . . 30 fr.

Chemins de fer d'intérêt local.

La réglementation des chemins de fer d'intérêt local, des tramways et des automobiles. Enquêtes. Historique de la réglementation des chemins de fer d'intérêt local et des tramways. Réglementation d'administration publique concernant l'établissement et l'exploitation des voies ferrées sur le sol des voies publiques. Cahier des charges-types des chemins de fer d'intérêt local. Cahier des charges-types des tramways. Réglementation des automobiles. Documents officiels. Lois, décrets et circulaires ministérielles, par A. Doniol, inspecteur général des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8°. . . . . 10 fr.

Chemins de fer d'intérêt local.

Traité des chemins de fer d'intérêt local. Chemins de fer à voie étroite, tramways, chemins de fer à crémaillère et funiculaires, par G. Humbert, ingénieur des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° avec 212 figures dans le texte. Relié. . . 20 fr.

Chemins de fer à voie de 0.60 centimètres.

Construction et exploitation des chemins de fer à voie de 0,60 centimètres. Voie, terrassements, ouvrages d'art, machines et matériel roulant, avec étude d'un tracé entre deux points donnés, par R. Tavernay, conducteur des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° avec 97 figures dans le texte. . . . . 10 fr.

Chemins de fer funiculaires. — Transports aériens.

Chemins de fer funiculaires. Transports aériens. Funiculaires à mouvements alternatifs mus par une machine fixe. Funiculaires à contrepoids d'eau. Funiculaires à câbles sans fin. Principes, théorie, description, voie, poulies de supports, câbles, machines motrices, description. Câbles aériens porteurs, par A. Levy Lambert, ingénieur civil. 1 volume grand in-8°, avec figures dans le texte. . . . . 10 fr.

Chemins de fer funiculaires.

Étude des chemins de fer funiculaires. Historique et classification, [illegible] en long, résistance au mouvement des trains, engins spéciaux et voies, [illegible] et exploitation, par Alexandre Vaucher, ingénieur civil. 1 brochure grand in-8° avec figures dans le texte. . . . . 2 fr.

Traction mécanique des tramways.

La traction mécanique des tramways. Étude des différents systèmes [illegible] son et prix de revient, par Raymond Bertocchi, ingénieur des arts et manufactures. 1 volume in-8° avec 182 figures dans le texte. Relié. . . . . 8 fr.

Traction mécanique sur routes.

Essai d'une étude théorique des conditions d'établissement d'une voie de traction mécanique sur routes, par G. [illegible], inspecteur [illegible] des ponts et chaussées. 1 volume in-8° contenant [illegible] figures dans le texte. . . . . 7 fr.

Tramways à air comprimé.

[illegible] appliqué à la traction des tramways. Description [illegible] tive, compresseurs [illegible] chargement des voitures [illegible] canalisation, divers [illegible] port par [illegible] prix de revient et conclusions, par E. A[illegible]. 1 volume grand in-8° avec [illegible] figures dans le texte. . . . . 7 fr.

Traction électrique.

La [illegible] sur voies ferrées. Types de voies. Exemples [illegible] Voies [illegible] Locomotives électriques. Matériel [illegible] mémorandums. Lignes à toutes compositions [illegible] courant continu et à courants [illegible].

Régulation de la vitesse des voitures. Conduite, entretien et essais des moteurs et du matériel roulant. Résistance et traction du matériel roulant électrique. Puissance et énergie électrique consommées sur les voitures et à la station génératrice. Projet de traction. Freinage des voitures électriques. Dépenses d'établissement et d'exploitation des lignes électriques. Conditions de sécurité, réglementation et contrôle technique, par A. Brosnot et L. P. Dubois, ingénieurs des ponts et chaussées. 2 volumes grand in 8° contenant plus de 1.700 pages et 1.014 figures dans le texte. Reliés 50 fr.

Production et distribution de l'énergie électrique.

Production et distribution de l'énergie électrique. Puissance et organisation des stations centrales, chaudières, machines à vapeur. Stations centrales au gaz pauvre. Stations centrales hydrauliques. Machines électriques employées pour la traction. Machines à courant continu. Emploi des accumulateurs dans les stations centrales. Sous-stations de transformation. Moyens d'éviter ou de remédier aux accidents de personnes, dépenses d'établissement des stations centrales. Feeders. Lignes aériennes. Trolleys. Montage des lignes aériennes. Paratonnerres, appareils accessoires des lignes aériennes. 3° rail. Caniveaux. Contacts superficiels. Retour du courant, par H. Martin, ingénieur des arts et manufactures. 1 volume grand in 8° avec 870 figures dans le texte. Relié . . . . . 25 fr.

Tramways électriques.

Les tramways électriques. Dispositions générales. Voie. Tramways à conducteurs aériens, souterrains, à contacts superficiels. Tramways à accumulateurs, matériel roulant, dépôts, ateliers, production et transformation de l'énergie, exploitation, dépenses, concessions, réglementation, par H. Martin, ingénieur des ponts et chaussées. 2° édition. 1 volume in 8° avec 188 figures dans le texte . . . . 10 fr.

Moyens de transport.

Les moyens de transport appliqués dans les mines, les usines et les travaux publics ; voitures, tramways, chemins de fer, plans inclinés, tirage par câble et par chaîne, etc., organisation et matériel, par Evrard. 2 volumes in 8° avec 1 atlas de 123 planches in folio contenant 1.400 figures . . . . . 100 fr.

Tarifs de chemins de fer.

Traité général des tarifs de chemins de fer, contenant une étude spéciale des tarifs appliqués en Allemagne, Autriche-Hongrie, Suisse, Italie, France, Belgique, Hollande, Angleterre et Russie, par L. Eisner, conseiller intime au ministère des travaux publics de Berlin. Edition française revue et augmentée par l'auteur. 1 volume grand in 8° . . . . . 16 fr.

Chemin de fer métropolitain de Paris.

Le chemin de fer métropolitain de Paris. Description du réseau propre, lignes actuellement exécutées, usine de Bercy, exploitation des lignes en service, lignes actuellement en construction, par A. Dicrays, ingénieur des arts et manufactures. 1 volume grand in 8° avec 104 figures dans le texte et 7 planches hors texte . . . . 40 fr.

La Politique française en matière de chemins de fer.

La politique française en matière de chemins de fer, par Rudolf Kyllmann, de l'Université de Berlin. Traduit, mis à jour et précédé d'une étude critique et complémentaire par François Hayem, sous-chef de bureau au ministère des Finances. 1 fort volume in 8° de 1.000 pages contenant de nombreux tableaux et diagrammes . . . 10 fr.

Avenir de la politique française en matière de chemins de fer.

L'avenir de la politique française en matière de chemins de fer, complément à l'ouvrage de Rudolf Kyllmann, par François Hayem, sous-chef de bureau au ministère des Finances. 1 volume in 8° contenant de nombreux tableaux . . . . 10 fr.

Montagnes et Torrents.

Restauration des montagnes, correction des torrents, reboisement, dénudation, classification et cause de formation des torrents. Origines, mode de transport et de dépôt des matières charriées. Formation de lits de torrents. Ravages causés par les torrents. Correction des torrents. Fixation des alluvions. Digues et barrages. Construction en maçonnerie. Extraction de torrents. Glissement et stabilité des barrages, construction des ouvrages de défense, déboucher d'un torrent à l'entrée d'un barrage. Travaux de reboisement, difficulté. Méthodes employées, exécution des travaux, par L. Lorieux, professeur à l'Ecole nationale forestière, avec une introduction par M. Cézanne. 1 volume grand in 8° avec 161 figures dans le texte. 15 fr.

Hydraulique agricole.

Hydraulique agricole. Aménagement des eaux ; irrigation des terres labourables, des cultures maraîchères, des jardins, des prairies, etc. ; création et entretien des prairies ; desséchements, dessalage, limonage et colmatage, curage ; irrigation et drainages combinés ; renseignements complémentaires techniques et administratifs, par J. Charpentier et Cossiany, ancien élève de l'École polytechnique. 2e édition revue et augmentée. Un volume grand in-8° avec de nombreuses figures dans le texte . . . . . 1 fr

Aménagement des eaux à Java.

Aménagement des eaux à Java. Irrigation des rizières. Rapport établi à la suite d'une mission d'études aux Indes néerlandaises par le capitaine E. Brevet, de l'artillerie coloniale. 1 volume in-4° avec 75 figures dans le texte et 10 planches hors texte. . . . . 1 fr

Hydraulique fluviale.

Hydraulique fluviale. Météorologie et hydrologie ; les fleuves, grandes inondations, navigation ; conditions techniques d'un grand développement de la navigation fluviale ; conclusions ; par M. C. Lechalas, inspecteur général des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° avec figures dans le texte. . . . . 17 fr.

Guide de l'expert.

Le guide de l'expert. Application de l'hydraulique à l'usage du personnel des ponts et chaussées, des mines, du service vicinal, des chemins de fer, des ingénieurs, des architectes et des experts, par L. Parchomowe, ingénieur. 1 volume in-8° avec figures dans le texte. . . . . 6 fr

Navigation intérieure. — Rivières à courant libre.

Rivières à courant libre. État naturel des cours d'eau. Opérations et observations pour l'étude des cours d'eau et de leur régime. Matériel et procédés de la navigation fluviale. Premières améliorations. Travaux contre les inondations. Régularisation des fleuves et rivières. Exploitation. Cours de navigation intérieure de l'École nationale des ponts et chaussées, par E. B. et Max, inspecteur général des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° avec 18 planches intercalées dans le texte. . . . . [illegible]

Navigation intérieure. — Rivières canalisées.

Rivières canalisées. Généralités. Barrages autres que les barrages mobiles. Barrages mobiles à fermettes. Barrages mobiles à pont supérieur. Barrages à hausses. Barrages mobiles à tambour. Règles à suivre pour l'étude des [illegible] retenue d'eau au moyen d'un barrage mobile. Écluses à sas. Pertes d'écluses. Emplacement abords et accessoires des écluses. Exploitation. Cours de navigation intérieure de l'École nationale des ponts et chaussées, par E. B. et M. [illegible] général des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° avec 8 planches [illegible] intercalées dans le texte. . . . . [illegible]

Construction du Canal de Jonage. — Utilisation des forces motrices du Rhône

Construction du canal de Jonage. Travaux et installations hydro[illegible] tiques, par Rey [illegible] de l'École polytechnique. [illegible] 1 volume in-[illegible] planches . . . . . [illegible]

Ascenseurs hydrauliques pour bateaux.

Les ascenseurs hydrauliques pour bateaux. Notice sur l'ascenseur [illegible] pour bateaux [illegible] par Charles Hermans, ingénieur. [illegible] des systèmes [illegible] par Bertous, ingénieur. [illegible] avec planches. . . . . [illegible]

Moyens de franchir les chutes des canaux.

[illegible] les chutes des canaux. Écluses [illegible] par H. Gressin, ingénieur en chef des ponts et chaussées et [illegible] de l'usine Cail. 1 volume [illegible] planches . . . . . [illegible]

Torrents.

Les torrents, leurs lois, leurs causes, leurs effets, moyen de les réprimer et de les utiliser. Leur action géologique universelle, par Costa de Beauregard. 1 volume in-8° avec figures et planches. . . . . 7 fr. 50

Travaux maritimes.

Cours de travaux maritimes professé à l'Ecole nationale des ponts et chaussées par le baron Quinette de Rochemont, inspecteur des ponts et chaussées, et Henri Dubois, ingénieur des ponts et chaussées. Marées, courants et vents. Propagation de la marée dans les fleuves. Lames. Régime des plages. — Action de la mer sur les matériaux de construction. Navires, navigation. — Rades. Ports. Entrée des ports. Digues, jetées. Brise-lames. Estacades. Mode d'exécution des digues et jetées. Avant-ports. Bassins. Darses. Murs de quai. Appontements. Modes d'exécution des quais. Ecluses de navigation. Portes d'écluses. Ponts mobiles. Formes de radoub. Bateaux-postes. Appareils de radoub divers. Ouvrages divers. — Moyens d'obtenir et de maintenir les profondeurs dans les ports et à leurs abords. Chasses. Dragages. — Défense des côtes. — Fleuves maritimes. — Canaux maritimes. Eclairage et balisage des côtes. Outillage des ports. — Administration et exploitation des ports de commerce. — Renflouement et dispersion des épaves. 2 volumes grand in-8° avec 982 figures intercalées dans le texte et 1 atlas de 18 planches. . . . . 90 fr.

Travaux maritimes.

Travaux maritimes : phénomènes marins ; accès des ports. Mouvements de la mer. — Régime des côtes. — Matériaux dans l'eau de mer. — Atterrage. Entrée des ports. Jetées, par Lamoine, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° et 1 atlas in-4° de 46 planches doubles. . . . . 40 fr.

Ports maritimes.

Ports maritimes. Ports d'échouage. — Bassins à flot. — Ecluses des bassins à flot. Portes d'écluses. — Ponts mobiles. — Moyens d'obtenir et d'entretenir la profondeur à l'entrée des ports. — Ouvrages et appareils pour la réparation des navires. Défense des côtes. Eclairage et balisage des côtes. Exploitation des ports. Canaux maritimes, par E. Lamoine, inspecteur général des ponts et chaussées. 2 volumes in-8° avec figures dans le texte et 2 atlas in-4° contenant 37 planches doubles. . 50 fr.

Cours de ponts.

Cours de Ponts de l'Ecole des ponts et chaussées. *Débouchés, Emplacements*, détermination du débouché. Choix de l'emplacement, dispositions générales des ponts. *Fondations*. Ponts en maçonnerie, stabilité des voûtes droites en berceau, voûtes en maçonnerie, tympans, culées, piles. Ponts en pente ou courbes. Voûtes biaises, voûtes diverses. Abords et architecture des ponts. Cintres. Exécution et décintrement des voûtes, par Jean Résal, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° avec de nombreuses figures dans le texte. . . . . 14 fr.

Ponts en maçonnerie.

Ponts en maçonnerie, par F. Degrand, inspecteur général des ponts et chaussées, et J. Résal, ingénieur des ponts et chaussées. 2 volumes grand in-8° avec de nombreuses figures dans le texte . . . . . 40 fr.

Barème des poutres métalliques.

Barèmes des poutres métalliques à âmes pleines et à treillis, par Pascal, ingénieur civil. 1 volume in-4° avec figures dans le texte, Relié. . . . . 12 fr. 50

Grands Barèmes de la construction métallique.

1re *Série*. Barèmes généraux : flexion, compression, flambage, traction, torsion, moments d'inertie, poids des matériaux, renseignements utiles au constructeur, par Raymond Coss, ingénieur des arts et manufactures. 1 volume in-4° de 172 pages et 520 figures dans le texte. Relié . . . . . 35 fr.

2e *Série*. Poutres à âmes pleines et en treillis, par Raymond Coss, ingénieur des arts et manufactures. 1 volume in-4° relié, de 181 pages avec 400 figures dans le texte. Broché . . . . . 35 fr.

Constructions métalliques.

Constructions métalliques. Notions sur la théorie mathématique de l'élasticité. Propriétés élastiques des matériaux. Résistance des matériaux. Fonte, fer et acier. Méthodes générales et formules usuelles, par Jean Résal, ingénieur des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° avec figures dans le texte. . . . . 20 fr.

Croquis de ponts métalliques.

Croquis de ponts métalliques, Ponts en métal moulé, ponts en fer ou acier laminé, lavage des ponts métalliques, réception et surveillance des ponts, poids des fers, par J. Gaudard, ingénieur civil. 1 volume in-4°, accompagné de 50 planches hors texte, contenant 320 figures. . . . . 20 fr.

Ponts métalliques.

Traité pratique des ponts métalliques ; statique graphique ; applications pratiques. Conditions d'établissement des ponts métalliques. Projets de ponts métalliques à une seule travée. Ponts pour voie charretière. Ponts à une travée et supportant des voies ferrées de largeur normale. Ponts métalliques à plusieurs travées solidaires. Pont en arc à longeron droit. Formules. Renseignements divers. Tableaux. Règlements, par M. Pascal, ingénieur. 2e édition. 1 volume in-8° avec 125 figures dans le texte et 15 planches hors texte. Relié. . . . . 15 fr.

Ponts métalliques.

Ponts métalliques, par Jean Résal, ingénieur des ponts et chaussées.

Tome premier. — Calcul des pièces prismatiques ; renseignements pratiques ; formules usuelles ; poutres droites à travées indépendantes ; ponts suspendus ; ponts en arc. Un volume grand in-8° avec de nombreuses gravures dans le texte. 20 fr.

Tome second. — Poutres à travées solidaires ; théorie générale des poutres à section constante ; calcul des poutres symétriques ; poutres continues à section variable ; théorie générale des poutres de hauteur variable ; montage des ponts par encorbellement ; ponts-grues ; calcul des systèmes articulés ; piles métalliques ; tables numériques. Un volume grand in-8° avec de nombreuses figures dans le texte. 20 fr.

Ponts métalliques.

Calcul des ponts métalliques à poutres droites, à une ou plusieurs travées par la méthode des lignes d'influence. Formules et tables servant au calcul rapide des moments fléchissants et des efforts tranchants maximums déterminés, en divers points des poutres par des charges uniformément réparties et des charges concentrées mobiles, par Adrien Cary et Léon Portes, ingénieurs civils. 1 volume grand in-8° avec figures dans le texte et 2 planches, relié. . . . . 20 fr.

Ponts et viaducs métalliques.

Calculs de résistance des ponts et viaducs métalliques à poutres droites, d'après la circulaire ministérielle du 29 août 1891, par Maurice Hulewicz, ingénieur, ancien élève de l'Ecole des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° avec 1 planche. 10 fr.

Ponts métalliques.

Etudes théoriques et pratiques sur les ponts métalliques à une travée et à poutres droites et pleines, par E. Dumetz, commis des ponts et chaussées. 1 volume in-8° avec 117 figures dans le texte. . . . . 10 fr.

Ponts métalliques.

Ponts métalliques à travées continues. Méthode de calcul satisfaisant aux nouvelles prescriptions du règlement ministériel du 29 août 1891, avec tables numériques pour en faciliter l'emploi, par Bertrand de Fontvieilant, ingénieur à la Compagnie de Fives-Lille. Un volume grand in-8° avec 3 planches. . . . . 10 fr.

Arches surbaissées en maçonnerie.

Tables et graphiques pour le calcul des arches surbaissées en maçonnerie, d'après la méthode de M. Tourtay, ingénieur des ponts et chaussées, par N. de Tedesco, ingénieur civil. 1 volume in-4° avec 25 planches. . . . . 7 fr. 50

Emploi des pieux métalliques.

Etude sur l'emploi des pieux métalliques dans les fondations d'ouvrages d'art. Cas où il peut être fait emploi des pieux métalliques. Diverses sortes de pieux métalliques. Mise en place ou fonçage des pieux métalliques. Disposition des ouvrages d'art reposant sur pieux métalliques, application, par C. Grange, agent-voyer en chef du département de la Vienne. 1 volume grand in-8° avec 51 figures dans le texte. . . . . 7 fr.

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY